Hence putting

$$F(z,n)=\frac{(-1)^n}{z^{\nu+n+1}}\exp(-z^{-\lambda})L^{\nu}_{n,\lambda}\left(\frac{1}{z^\lambda}\right)$$

and using Taylor's theorem, we obtain since $\partial F/\partial z=F(z,n+1)$,

$$\frac{1}{(z+y)^{\nu+n+1}}\exp\left(-\frac{1}{(z+y)^\lambda}\right)L^{\nu}_{n,\lambda}\left\{\frac{1}{(z+y)^\lambda}\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-y)^m}{m!}z^{-(\nu+n+m+1)}\exp\left(-\frac{1}{z^\lambda}\right)L^{\nu}_{n+m,\lambda}\left(\frac{1}{z^\lambda}\right).$$

After a slight transformation, we have

$$\frac{1}{(1-u)^{\nu+n+1}}\exp\left(\omega-\frac{\omega}{(1-u)^\lambda}\right)L^{\nu}_{n,\lambda}\left\{\frac{\omega}{(1-u)^\lambda}\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}L^{\nu}_{m+n,\lambda}(\omega).$$

For $n=0$, we have in particular

$$\frac{1}{(1-u)^{\nu+1}}\exp\left(\omega-\frac{\omega}{(1-u)^\lambda}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}L^{\nu}_{m,\lambda}(\omega).$$

References

[1] R. P. Agarwal, *Sur une généralisation de la transformation de Hankel*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles I, Sér. 64 (1950), p. 164-168.

[2] M. Angelescu, *Sur certaines polynômes biorthogonaux*, C. R. Acad. Sci. Paris 176 (1923), p. 1531-1533.

[3] A. M. Chak, *On a class of polynomials and a generalization of Stirling Numbers*, (unpublished manuscript) Thesis (Lucknow) 1954.

[4] P. Delerue, *Sur l'utilisation des fonctions hyperbesseliennes à la résolution d'une équation différentielle et au calcul symbolique à n variables*, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), p. 912-914.

[5] A. Erdélyi, *Über eine Methode zur Gewinnung von Funktionalbeziehungen zwischen konfluenten hypergeometrischen Funktionen*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 45 (1936), p. 31-52.

[6] C. Truesdell, *An essay toward a unified theory of special functions based upon a functional equation*, Princeton 1948.

[7] E. M. Wright, *The asymptotic expansion of the generalized Bessel function*, Proc. Lond. Math. Soc. 38 (1935), p. 257-270.

MATHEMATICS DEPARTMENT, UNIVERSITY OF LUCKNOW

Sur le problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas hyperbolique de deux variables indépendantes

par S. Łojasiewicz (Kraków)

Introduction. Nous nous occuperons du problème de Cauchy pour le système

(1) $$\partial z_i/\partial t=f_i(t,x,z_1,\ldots,z_n,\partial z_1/\partial x,\ldots,\partial z_n/\partial x)$$

du type hyperbolique (toutes les racines caractéristiques de la matrice $[\partial f_i/\partial q_j]$ sont réelles et différentes entre elles). M. Cinquini-Cibrario à démontré[1]) l'unicité et l'existence des solutions en supposant que les troisièmes dérivées des seconds membres satisfont à la condition de Lipschitz. Nous donnons ici un théorème d'existence et une méthode de construction des solutions. L'idée de la construction de la solution m'a été suggérée au cours d'une conférence prononcée par M. T. Ważewski à l'Institute Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences. M. Ważewski a introduit des surfaces polygonales dont les arrêtes sont des courbes intégrales de certaines équations différentielles ordinaires et tendent vers les caractéristiques, lorsque le nombre de ces équations tend vers l'infini. L'intégrale de l'équation aux dérivées partielles construite par M. Ważewski était la limite des surfaces polygonales. L'existence de cette limite était garantie par un théorème de Ważewski sur les inégalitées aux dérivées approximatives. La méthode de E. Baiada est aussi proche de la mienne. M. Baiada [1] a obtenu pour solution la limite des surfaces polygonales dont les arrêtes sont situées dans des plans $t=\text{const}$. Ces surfaces sont construites successivement dans les bandes $t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i$, $i=1,2,\ldots$, à partir des données de Cauchy (de même que dans la méthode de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires). Les deux méthodes sont également employées dans le cas d'une équation. S'il s'agit de systèmes, M. Conti [4] a généralisé la méthode de E. Baiada dans le cas où le second membre f_i ne dépend pas de $\partial z_j/\partial x$ $(j\neq i)$. Pour le théorème d'existence dans ce cas cf. aussi

[1]) [2] et [3]; on peut trouver en [3] la littérature de ce problème.

Ważewski [9] où a été employée la méthode des approximations successives. Nous renvoyons le lecteur au travail de Conti [4] pour la bibliographie.

Dans ma méthode les arrêtes des surfaces polygonales sont situées dans des plans $x=\text{const}$ et ils forment des solutions des équations différentielles ordinaires, que l'on obtient si l'on remplace dans (1) les dérivées $\partial z_i/\partial x$ par les quotients $\Delta z_i/\Delta x$ correspondants. Cette méthode est complètement indépendante de la théorie des caractéristiques.

Dans le théorème d'existence nous supposerons que les premières dérivées satisfont à la condition de Lipschitz. Un exemple de M. Ważewski [10] montre que cette hypothèse est essentielle. En voici un autre exemple.

Considérons le problème de Cauchy

$$z(0,x)=\omega(x) \tag{2}$$

pour l'équation

$$\partial z/\partial t=\varphi(\partial z/\partial x) \tag{3}$$

et supposons que ω et φ sont de la classe C^1 dans un voisinage de zéro, que $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ et que $\omega(x)=0$ pour $x\geqslant 0$. Les équations des caractéristiques sont

$$x^{\cdot}=-\varphi'(q),\qquad z^{\cdot}=\varphi(q)-q\varphi'(q),\qquad q^{\cdot}=0,$$

donc les caractéristiques déterminées par les valeurs initiales (2) sont

$$\begin{aligned} x&=x(t)=\xi-\varphi'\big(\omega'(\xi)\big)t,\\ z&=z(t)=\omega(\xi)+\big[\varphi\big(\omega'(\xi)\big)-\omega'(\xi)\varphi'\big(\omega'(\xi)\big)\big]t,\\ q&=\omega'(\xi). \end{aligned} \tag{4}$$

Pour $\xi>0$, $x=x(t)=\xi$ sont des droites parallèles à l'axe t et $z=0$ pour $x>0$ est une solution de (2) et (3). Soit $\xi<0$; si $\varphi'\big(\omega'(\xi)\big)\neq 0$, la droite $x=x(t)$ coupe l'axe t pour $t=\xi/\varphi'\big(\omega'(\xi)\big)$; supposons que

$$t_\xi=\xi/\varphi'\big(\omega'(\xi)\big)\to 0 \tag{5}$$

en décroissant lorsque $\xi\to 0$, $\xi>0$ et que $\varphi(q)$, $\omega(x)$ sont de la classe C^2 pour $q\neq 0$ resp. $x\neq 0$. Les caractéristiques (4) forment une solution $z_1(t,x)$ pour $x<0$ dans un voisinage de $t=x=0$.

En supposant que $z(t,x)$ est une solution de la classe C^1 dans un voisinage de $t=x=0$, nous obtenons $z=0$ pour $x>0$ et $z=z_1$ pour $x<0$ [2]), donc $z(t_\xi)=0$ et par conséquent

$$\omega(\xi)-\omega'(\xi)\xi+\frac{\varphi\big(\omega'(\xi)\big)}{\varphi'\big(\omega'(\xi)\big)}\xi=0 \qquad \text{pour} \qquad \xi<0. \tag{6}$$

Il en résulte que si ω et φ sont telles que la condition (6) ne subsiste dans aucun voisinage de zéro (pour $\xi<0$), il n'existe pas non plus de solution de la classe C^1 dans aucun voisinage de $t=x=0$. Pour cet effet il suffit d'admettre $\omega(x)=x^2/2$, $\varphi(q)$ de la classe C^2 pour $q\neq 0$, $\varphi'(0)=\varphi(0)=0$ et $\varphi'(q)/q\to\infty$ en croissant pour $q\to 0$, $q<0$, ou $\varphi(q)=q^2$, $\omega(x)$ de la classe C^2 pour $x<0$ et $\omega'(\xi)/\xi\to\infty$ en croissant pour $\xi\to 0$, $\xi<0$.

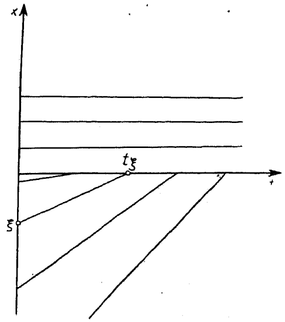

Fig. 1.

Nous voyons donc que même la condition de Hölder pour $\omega'(x)$ et $\varphi'(q)$ n'est pas suffisante pour l'existence de la solution.

Nous désignerons les vecteurs (points de l'espace euclidien à n dimensions) par minuscules grasses, leurs coordonnées — par minuscules ordinaires, munies d'indices: $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$. Les matrices sont désignées par majuscules grasses, la matrice-unité par $\boldsymbol{I}$; $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ est la matrice d'éléments a_{ij}. Posons $|\boldsymbol{a}|=\max\limits_{i=1,\ldots,n}|a_i|$, $|\boldsymbol{A}|=n\max\limits_{i,j=1,\ldots,n}|a_{ij}|$; on a donc $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\leqslant|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{AB}|\leqslant|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ et $|\boldsymbol{Ax}|\leqslant|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{x}|$.

Nous dirons qu'une matrice $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ est hyperbolique, lorsque toutes ses racines caractéristiques sont réelles et différentes entre elles: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$. Dans ce cas, il existent deux verseurs seulement $\boldsymbol{p}_i$ et $-\boldsymbol{p}_i$ tels qu'on a $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}_i=0$; les vecteurs $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n$ sont linéairement indépendants. Les λ_i sont des fonctions analytiques de a_{ij}, ainsi que $\boldsymbol{p}_i$, pourvu qu'ils puissent être déterminés de façon pour que leur dépendance de a_{ij} soit continue. Si la fonction $\boldsymbol{A}(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ est continue dans un ensemble connexe E et $\boldsymbol{p}_i(\xi_1^0,\ldots,\xi_n^0)$ est donné pour un $(\xi_1^0,\ldots,\xi_n^0)\in E$, alors $\boldsymbol{p}_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ sont déterminés univoquement dans E par la condition de continuité. Cette détermination est toujours possible lorsque l'ensemble E est convexe. Si la matrice $\boldsymbol{A}^0$ est hyperbolique, il existe alors un $\delta>0$

[2]) On peut appliquer le théorème d'unicité dans $OABC$ et PQD (cf. fig. 1) en utilisant au besoin le principe d'induction continue par rapport à t, ou le théorème de A. Pliś [7], que chaque solution de la classe C^1 est formée de caractéristiques.

tel que pour $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^0|<\delta$ la matrice $\boldsymbol{A}$ est hyperbolique et $\boldsymbol{p}_i$ dépendent de $\boldsymbol{A}$ de façon analytique. Considérons la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$; la matrice inverse $\boldsymbol{P}$ sera appelée la matrice transformante de $\boldsymbol{A}$. On a

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

La dépendance $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{A}$ est analytique pourvu qu'elle puisse être faite continue. Si $\boldsymbol{A}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ est continue dans un ensemble convexe E, alors $\boldsymbol{P}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ est déterminée univoquement par la condition de continuité, pourvu que $\boldsymbol{P}(\xi_1^0,\dots,\xi_n^0)$ soit donnée pour un $(\xi_1^0,\dots,\xi_n^0)\in E$. Cette détermination est toujours possible, lorsque E est convexe. Enfin, à chaque matrice hyperbolique $\boldsymbol{A}^0$ on peut faire correspondre un $\delta>0$ et un $K>0$ tels que si $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^0|\leqslant\delta$, $|\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}^0|\leqslant\delta$, alors $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ sont hyperboliques et $|\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P}|\leqslant K|\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}|$.

Nous dirons qu'une fonction $f(u_1,\dots,u_n)$ est de la classe C^{1+L}, lorsque ses dérivées $\partial f/\partial u_i$ satisfont à la condition de Lipschitz; nous dirons qu'une fonction $f(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$ est de la classe C^{**} resp. de la classe C^*, lorsque f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial z_i$, $\partial f/\partial q_i$ resp. f, $\partial f/\partial q_i$ sont continues, satisfont à la condition de Lipschitz par rapport à $x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}$ resp. par rapport à $\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}$ et $\partial f/\partial q_i$ — par rapport à $t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}$ (dans tous les deux cas).

Par $\partial^+f/\partial t$, $\partial_+f/\partial t$, $\partial^-f/\partial t$, $\partial_-f/\partial t$ (resp. par d^+f/dt, d_+f/dt, d^-f/dt, d_-f/dt dans le cas où f est une fonction d'une variable t) nous désignerons les nombres dérivés de Dini par rapport à t (les autres variables étant fixées). Le symbole $\partial_+^*f/\partial t$ (resp. $\partial_-^*f/\partial t$) désigne un nombre dérivé à droite (resp. à gauche) quelconque. Si $f(t)$, $g(t)$ satisfont à la condition de Lipschitz alors à chaque $d_+^*(fg)/dt$ on peut faire correspondre un d_+^*f/dt et un d_+^*g/dt tels qu'on ait $d_+^*(fg)/dt=gd_+^*f/dt+fd_+^*g/dt$; il en est de même pour $d_-^*(fg)/dt$, $d_+^*(f+g)/dt$, $d_-^*(f+g)/dt$. Supposons que $\boldsymbol{v}(t)$ satisfait à la condition de Lipschitz; si pour un t, $|\boldsymbol{v}|=|v_p|$, alors pour chaque $d_-^*v_p/dt$ nous avons $d_-|\boldsymbol{v}|/dt\leqslant(d_-^*v_p/dt)\operatorname{sign}v_p$ et pour chaque $d_+^*v_p/dt$ on a

$$d^+(\boldsymbol{v})/dt\geqslant(d_+^*v_p/dt)\operatorname{sign}v_p$$

$\big($car $|\boldsymbol{v}(t')|-|\boldsymbol{v}(t)|\geqslant|v_p(t')|-|v_p(t)|\geqslant[v_p(t')-v_p(t)]\operatorname{sign}v_p(t)\big)$. Pareillement, lorsque $v=\max\limits_{i,j}|v_{ij}|$ et $v=|v_{pq}|$ pour un t, alors $d_-v/dt\leqslant(d^-v_{pq}/dt)\operatorname{sign}v_{pq}$.

Nous allons utiliser le principe d'induction continue: Lorsque

1° une proposition $T(x)$ subsiste pour $x=0$,

2° $T(x)$ pour $0<x<s$ entraîne $T(s)$ et $T(s)$ entraîne $T(x)$ pour $s<x<s+\varepsilon$ (ε suffisamment petit) pourvu que $0<s<b$,

alors $T(x)$ subsiste pour $0\leqslant s\leqslant b$.

Nous appliquerons enfin un lemme d'Hadamard (cf. [5], p. 352-354) sous les formes suivantes:

1. Si $f(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial z_i$, $\partial f/\partial q_j$ sont continues dans un domaine G de $t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}$, alors

$$f(t,x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')-f(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})=h(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')(x'-x)+$$
$$+\sum_{i=1}^n e_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')(z_i'-z_i)+\sum_{i=1}^n d_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}'\boldsymbol{q}')(q_i'-q_i),$$

où h,e_i,d_i sont continues et

$$h(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')=(\partial f/\partial x)\big(t,x+(x'-x)\vartheta,\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z})\vartheta,\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\vartheta\big)\quad\text{etc.}$$

pourvu que le segment des extrémités $(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$, $(t,x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')$ soit contenu dans G. Lorsqu'on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\bar x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant M(|\bar x-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z_i}(t,\bar x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial f}{\partial z_i}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant M(\bar x-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial q_i}(\bar t,\bar x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial f}{\partial q_i}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant M(|\bar t-t|+|\bar x-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),$$

nous avons aussi

$$|h(t,\bar x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar x',\bar{\boldsymbol{z}}',\bar{\boldsymbol{q}}')-h(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')|$$
$$\leqslant\frac{M}{2}(|\bar x-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|+|\bar x'-x'|+|\bar{\boldsymbol{z}}'-\boldsymbol{z}'|+|\bar{\boldsymbol{q}}'-\boldsymbol{q}'|),$$

$$|e_i(t,\bar x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar x',{}^{-\prime},\bar{\boldsymbol{q}}')-e_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')|$$
$$\leqslant\frac{M}{2}(|\bar x-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|+|\bar x'-x'|+|\bar{\boldsymbol{z}}'-\boldsymbol{z}'|+|\bar{\boldsymbol{q}}'-\boldsymbol{q}'|),$$

$$|d_i(\bar t,\bar x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar x',\bar{\boldsymbol{z}}',\bar{\boldsymbol{q}}')-d_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')|$$
$$\leqslant M|\bar t-t|+\frac{M}{2}(|\bar x-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|+|\bar x'-x'|+|\bar{\boldsymbol{z}}'-\boldsymbol{z}'|+|\bar{\boldsymbol{q}}'-\boldsymbol{q}'|).$$

En effet, il suffit de poser

$$h(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')$$
$$=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}\big(t,x+(x'-x)u,\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z})u,\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})u\big)\,du\qquad\text{etc.}$$

2. Si $f(t,x,z,q)$ est de la classe C^*, alors

$$f(t,x,z,\bar{q})-f(t,x,z,q)=\sum_{i=1}^{n} e_i(t,x,z,q,\bar{z},\bar{q})(\bar{z}_i-z_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} d_i(t,x,z,q,\bar{z},\bar{q})(\bar{q}_i-q_i),$$

où e_i sont bornées et $d_i(t,x,z,q,\bar{z},\bar{q})=\partial f\big(t,x,z,q+(\bar{q}-q)\vartheta\big)/\partial q_i$ satisfont à la condition de Lipschitz par rapport à toutes les variables.

En effet, il suffit de poser

$$e_i=\frac{f(t,x,z_1,\ldots,\bar{z}_i,\ldots,\bar{z}_n,\bar{q})-f(t,x,z_1,\ldots,z_i,\ldots,\bar{z}_n,\bar{q})}{\bar{z}_i-z_i}\quad \text{pour}\quad z_i\neq\bar{z}_i,$$

$$e_i=0 \text{ pour } z_i=\bar{z}_i \text{ et } d_i(t,x,z,q,\bar{z},\bar{q})=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial q_i}\big(t,x,z,q+(\bar{q}-q)u\big)du.$$

§ 1. Unicité

Ecrivons le système (1) sous la forme vectorielle

$$\partial z/\partial t=f(t,x,z,\partial z/\partial x) \tag{7}$$

et considérons le problème de Cauchy

$$z(0,x)=z_0(x)\quad \text{pour}\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{8}$$

Supposons que $z_0(x)$ est de la classe C^{1+L} dans $[a,b]$, que $f(t,x,z,q)$ est de la classe C^* dans un voisinage de la courbe $t=0$, $z=z_0(x)$, $q=z_0'(x)$, où $a\leqslant x\leqslant b$. Supposons ensuite que la matrice

$$D(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\big(0,x,z_0(x),z_0'(x)\big)\right]$$

est hyperbolique pour $a\leqslant x\leqslant b$; soient $\lambda_1(x)<\ldots<\lambda_n(x)$ ses racines caractéristiques et soit $\alpha<\lambda_1(a)$, $\lambda_n(b)<\beta$.

Nous avons le suivant

Théorème d'unicité. *Si $z_1(t,x)$, $z_2(t,x)$ sont des solutions de la classe C^{1+L} dans un ensemble T_ε*

$$0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\quad a-\alpha t\leqslant x\leqslant b-\beta t,$$

il existe alors un $\delta>0$ tel qu'on a $z_1=z_2$ dans T_δ.

La démonstration est basée sur le lemme d'Hadamard; elle est une modification d'un raisonnement de M. J. Szarski (cf. [8], p. 9-15). Il suffit d'admettre que

$$\alpha<\lambda_1(x)<\ldots<\lambda_n(x)<\beta\quad \text{dans}\quad [a,b]. \tag{9}$$

En effet, admettons que le théorème est démontré sous l'hypothèse (9). Il existent $a_1,a_2,b_1,b_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ tels qu'on a $a<a_2<a_1<b_1<b_2<b$, $\alpha<\lambda_1(x)<\lambda_n(x)<\alpha_1$ dans $[a,a_1]$, $\beta_1<\lambda_1(x)<\lambda_n(x)<\beta$ dans $[b_1,b]$ et $\alpha_2<\lambda_1(x)<\lambda_n(x)<\beta_2$ dans $[a_2,b_2]$. Il en résulte que $z_1=z_2$ dans chacun des ensembles suivants

$$0\leqslant t\leqslant\delta_1,\quad a-\alpha t\leqslant x\leqslant a_1-\alpha_1 t,$$

$$0\leqslant t\leqslant\delta_2,\quad b_1-\beta_1 t\leqslant x\leqslant b-\beta t,$$

$$0\leqslant t\leqslant\delta_3,\quad a_2-\alpha_2 t\leqslant x\leqslant b_2-\beta_2 t$$

et par conséquent dans T_δ pourvu que δ soit suffisamment petit.

Il existe un $\eta>0$ tel que dans l'ensemble

$$0\leqslant t\leqslant\eta,\quad a-\alpha t\leqslant x\leqslant b-\beta t,\quad |z-z_0(x)|\leqslant\eta,\quad |q-z_0'(x)|\leqslant\eta \tag{10}$$

$f(t,x,z,q)$ est de la classe C^*, la matrice $[\partial f_i(t,x,z,q)/\partial q_j]$ est hyperbolique et ses racines caractéristiques satisfont à l'inégalité (9). On a

$$|z_1(t,x)-z_0(x)|<\eta,\qquad |z_2(t,x)-z_0(x)|<\eta,$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,x)-z_0'(x)\right|<\eta,\qquad \left|\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,x)-z_0'(x)\right|<\eta$$

dans T_δ pour un $\delta\in(0,\eta)$. Puisque pour $(t,x)\in T_\delta$ les points $(t,x,z_1,\partial z_1/\partial x)$, $(t,x,z_2,\partial z_2/\partial x)$ appartiennent à l'ensemble (10), donc, selon le lemme d'Hadamard, en posant $u=z_2-z_1$, nous aurons

$$\partial u/\partial t=E(t,x)u+B(t,x)\partial u/\partial x\quad \text{dans}\quad T_\delta, \tag{11}$$

où $|E|$ est borné, la matrice

$$B(t,x)=\left[\varphi_{ij}\left(t,x,z_1,\frac{\partial z_1}{\partial x},z_2,\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\right]=\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\left(t,x,z_1,\frac{\partial z_1}{\partial x}+\vartheta_i\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}-\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)\right)\right]$$

est hyperbolique, ses racines caractéristiques satisfont à l'inégalité

$$\alpha<\lambda_1(t,x)<\ldots<\lambda_n(t,x)<\beta \tag{12}$$

et $\varphi_{ij}(t,x,z,q,\bar{z},\bar{q})$ satisfont à la condition de Lipschitz par rapport à toutes les variables. Il en résulte qu'il existe une constante M_1 telle que

$$|B(t',x')-B(t,x)|\leqslant M_1(|t'-t|+|x'-x|).$$

Soit $P(t,x)$ une matrice transformante de $B(t,x)$, continue dans T_δ.

Nous avons donc

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t,x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(t,x) \end{bmatrix}$$

et $|\boldsymbol{P}(t',x')-\boldsymbol{P}(t,x)| \leqslant M_2(|t'-t|+|x'-x|)$ pour une constante M_2. Posons

(13) $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u};$$

il suffit de prouver que $\boldsymbol{v}=0$ dans T_δ.

Soit $(t,x)\epsilon T_\delta$; il existent

$$\frac{d_-^*\boldsymbol{P}}{ds} = \frac{d_-^*}{ds}\boldsymbol{P}(t+s,x-\alpha s)\Big|_{s=0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial_+^*\boldsymbol{P}}{\partial x}(t,x)$$

tels qu'on a

$$\frac{d^-}{ds}\boldsymbol{v}(t+s,x-\alpha s)\Big|_{s=0} = \frac{d_-^*\boldsymbol{P}}{ds}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \alpha\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)$$

et

$$\frac{\partial^+\boldsymbol{v}}{\partial x} = \frac{\partial_+^*\boldsymbol{P}}{\partial x}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x},$$

d'où, d'après (11) et (13), nous obtenons

$$\frac{d^-}{ds}\boldsymbol{v}(t+s,x-\alpha s)\Big|_{s=0} = (\boldsymbol{\Lambda}-\alpha\boldsymbol{I})\frac{\partial^+\boldsymbol{v}}{\partial x} + \left[\frac{d_-^*\boldsymbol{P}}{ds} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{\Lambda}-\alpha I)\frac{\partial_+^*\boldsymbol{P}}{\partial x}\right]\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{v}.$$

Il existe donc une constante M tel qu'on a

(14) $$\left|\frac{d^-}{ds}v_i(t+s,x-\alpha s)\Big|_{s=0} - (\lambda_i-\alpha)\frac{\partial^+ v_i}{\partial x}\right| \leqslant M|\boldsymbol{v}|$$

et pareillement

(15) $$\left|\frac{d^-}{ds}v_i(t+s,x-\beta s)\Big|_{s=0} - (\lambda_i-\beta)\frac{\partial^- v_i}{\partial x}\right| \leqslant M|\boldsymbol{v}|,$$

lorsque $(t,x)\epsilon T_\delta$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{v}(t,x)$ n'est pas identiquement nulle dans T_δ. Il existerait alors un $h>0$ tel que la relation $he^{(1+M)t} < |\boldsymbol{v}(t,x)|$ subsiste pour un $(t,x)\epsilon T_\delta$ [3]). Puisque $\boldsymbol{v}(0,x)=0$, donc il existe un $(t_0,x_0)\epsilon T_\delta$, $t_0>0$ tel que

[3]) S'il s'agissait de la démonstration que la solution dépend de façon continue des valeurs initiales, nous supposerions que $|\boldsymbol{z}_1(0,x)-\boldsymbol{z}_2(0,x)|\leqslant h$ et nous obtiendrions l'inégalité $|\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{z}_1|\leqslant h^{(1+M)t}$ dans T_δ. Le nombre δ peut être choisi indépendant de $\boldsymbol{z}_2$, en appliquant le lemme 3 dans la démonstration.

$$|\boldsymbol{v}(t,x)| < he^{(1+M)t} \quad \text{pour} \quad t<t_0 \quad \text{dans } T_\delta \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{v}(t_0,x_0)| = he^{(1+M)t_0},$$

d'où il résulte

(16) $$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\alpha s)|_{s=0} \geqslant (1+M)he^{(1+M)t_0} > M|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)|,$$
$$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\beta s)|_{s=0} \geqslant (1+M)he^{(1+M)t_0} > M|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)|$$

et

(17) $$\frac{\partial^+|\boldsymbol{v}|}{\partial x}(t_0,x_0) \leqslant 0 \quad \text{dans le cas où} \quad a-\alpha t_0 \leqslant x_0 < b-\beta t_0,$$

(18) $$\frac{\partial_-|\boldsymbol{v}|}{\partial x}(t_0,x_0) \geqslant 0 \quad \text{dans le cas où} \quad a-\alpha t_0 < x_0 \leqslant b-\beta t_0.$$

D'autre part, nous avons $|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)| = |v_p(t_0,x_0)|$ pour un p, alors, si $a-\alpha t_0 \leqslant x_0 < b-\beta t_0$, on a

$$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\alpha s)|_{s=0} \leqslant \frac{d^-}{ds}v_p(t_0+s,x_0-\alpha s)\Big|_{s=0}\operatorname{sign} v_p(t_0,x_0)$$

et

$$\frac{\partial^+|\boldsymbol{v}|}{\partial x}(t_0,x_0) \geqslant \frac{\partial^+ v_p}{\partial x}(t_0,x_0)\operatorname{sign} v_p(t_0,x_0),$$

d'où, d'après (14) et (12), nous obtenons

$$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\alpha s)|_{s=0} \leqslant (\lambda_p-\alpha)\frac{\partial^+|\boldsymbol{v}|}{\partial x}(t_0,x_0) + M|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)|,$$

donc, d'après (17) et (12)

$$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\alpha s)|_{s=0} \leqslant M|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)|,$$

contrairement à (16). De même, si $a-\alpha t_0 < x_0 \leqslant b-\beta t_0$, on a

$$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\beta s)|_{s=0} \leqslant (\lambda_i-\beta)\frac{\partial_-|\boldsymbol{v}|}{\partial x}(t_0,x_0) + M|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)|,$$

d'où, d'après (18) et (12)

$$\frac{d_-}{ds}|\boldsymbol{v}(t_0+s,x_0-\beta s)|_{s=0} \leqslant M|\boldsymbol{v}(t_0,x_0)|,$$

contrairement à (16).

Nous avons donc $\boldsymbol{v}=0$ dans T_δ, c. q. f. d.

Corollaire. *Supposons qu'une fonction $z(t,x)$ de la classe C^{1+L} dans l'ensemble*

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad a(t) \leqslant x \leqslant b(t) \tag{19}$$

est une solution du problème de Cauchy (8) *pour un système* (7) *dont les seconds membres sont de la classe C^*. Supposons que la matrice*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\left(t,x,\boldsymbol{z}(t,x),\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial x}(t,x)\right)\right]$$

est hyperbolique dans l'ensemble (19) *et soient $\lambda_1(t,x)<\ldots<\lambda_n(t,x)$ ses racines caractéristiques. Si $a(0)=a$, $b(0)=b$,*

$$\frac{da(t)}{dt} \geqslant -\lambda_1\big(t,a(t)\big), \qquad \frac{db(t)}{dt} \leqslant -\lambda_n\big(t,b(t)\big) \quad \text{dans } [0,T]$$

alors $\boldsymbol{z}(t,x)$ est la solution unique de (7) *et* (8) *dans* (19).

La démonstration consiste à l'application du principe d'induction continue par rapport à t dans l'ensemble $0\leqslant t\leqslant T$, $\bar{a}(t)\leqslant x\leqslant \bar{b}(t)$, où

$$\bar{a}(0)=a, \qquad \frac{d\bar{a}}{dt} = -\lambda_1(t,\bar{a})+\frac{da}{dt}+\lambda_1\big(t,a(t)\big)+\varepsilon > -\lambda_1(t,\bar{a})$$

et

$$\bar{b}(0)=b, \qquad \frac{d\bar{b}}{dt} = -\lambda_n(t,\bar{b})+\frac{db}{dt}+\lambda_n\big(t,b(t)\big)-\varepsilon < -\lambda_n(t,\bar{b});$$

en faisant ε tendre vers zéro nous obtenons l'ensemble (19) (car $\bar{a}(t)\to a(t)$, $\bar{b}(t)\to b(t)$).

Remarque 1. Une modification des raisonnements faits dans ce paragraphe donne un théorème sur la dépendance continue des valeurs initiales: *si $|\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}(x)|\leqslant h$ (h étant suffisamment petit), donc $|\boldsymbol{z}_1(t,x)-\boldsymbol{z}(t,x)|\leqslant he^{(1+M)t}$ dans l'ensemble* (19), *où M est une constante convenable* (cf. renvoi [3])).

§ 2. Existence

Lemme 1. *Supposons que les fonctions continues ${}^1\boldsymbol{v}(t),\ldots,{}^m\boldsymbol{v}(t)={}^0\boldsymbol{v}(t)$ satisfont au système d'inégalités*

$$\left|\frac{d^-({}^\nu v_i)}{dt}-{}^\nu d_i(t)({}^{\nu+1}v_i-{}^\nu v_i)\right| \leqslant Av+B \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant s, \tag{20}$$

$\nu=0,1,\ldots,m-1$, $i=1,2,\ldots,n$, où ${}^\nu d_i(t)\geqslant 0$ et $v(t)=\max\limits_\nu|{}^\nu v(t)|$. On a alors

$$v(t)\leqslant\big(v(0)+B/A\big)e^{At}-B/A \quad \text{lorsque} \quad 0\leqslant t\leqslant s. \tag{21}$$

Démonstration. Soit $0<t\leqslant s$. On a $v=|{}^\sigma v_p|$ pour un couple p,σ. Nous avons alors $d\_v/dt\leqslant\big(d^-({}^\sigma v_p)/dt\big)\operatorname{sign}{}^\sigma v_p$, d'où, d'après (20),

$$d\_v/dt\leqslant {}^\sigma d_p({}^{\sigma+1}v_p-{}^\sigma v_p)\operatorname{sign}{}^\sigma v_p+Av+B.$$

Mais ${}^\sigma d_p({}^{\sigma+1}v_p-{}^\sigma v_p)\operatorname{sign}{}^\sigma v_p\leqslant 0$, car ${}^\sigma d_p\geqslant 0$ et ${}^{\sigma+1}v_p\operatorname{sign}{}^\sigma v_p\leqslant{}^\sigma v_p\operatorname{sign}{}^\sigma v_p$, donc $d\_v/dt\leqslant Av+B$, d'où il résulte l'inégalité (21).

Lemme 2. *Supposons que les fonctions ${}^1\boldsymbol{u}(t),\ldots,{}^m\boldsymbol{u}(t)={}^0\boldsymbol{u}(t)$ satisfont au système d'inégalités*

$$\left|\frac{d\big({}^\nu\boldsymbol{u}(t)\big)}{dt}-{}^\nu\boldsymbol{D}(t)\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{u}(t)-{}^\nu\boldsymbol{u}(t)}{\Delta x}\right|<L \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant s, \quad \nu=0,1,\ldots,m-1, \tag{22}$$

où ${}^1\boldsymbol{D}(t),\ldots,{}^m\boldsymbol{D}(t)={}^0\boldsymbol{D}(t)$ sont des matrices hyperboliques de racines caractéristiques non-négatives $0\leqslant{}^\nu\lambda_1(t)<\ldots<{}^\nu\lambda_n(t)$ $(\nu=0,1,\ldots,m)$. Soit ${}^\nu\boldsymbol{P}(t)$ une matrice transformante de ${}^\nu\boldsymbol{D}(t)$; supposons qu'il existent des constantes positives K_1,K_2,Λ,H telles qu'on ait

$$\begin{gathered}|{}^\nu\boldsymbol{P}(t')-{}^\nu\boldsymbol{P}(t)|\leqslant K_1|t'-t|, \qquad |{}^{\nu+1}\boldsymbol{P}(t)-{}^\nu\boldsymbol{P}(t)|\leqslant K_2\Delta x, \qquad \lambda_i\leqslant\Lambda,\\ |{}^\nu\boldsymbol{P}(t)|\leqslant H, \qquad |{}^\nu\boldsymbol{P}(t)^{-1}|\leqslant H.\end{gathered} \tag{23}$$

Nous affirmons que la fonction $v(t)=\max\limits_\nu|{}^\nu\boldsymbol{P}(t){}^\nu\boldsymbol{u}(t)|$ satisfait à l'inégalité

$$v(t)\leqslant\big(v(0)+B/A\big)e^{At}-B/A \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant s, \tag{24}$$

où $A=K_1H+K_2H\Lambda$ et $B=HL$.

Démonstration. Posons ${}^\nu\boldsymbol{v}={}^\nu\boldsymbol{P}{}^\nu\boldsymbol{u}$ et ${}^\nu\boldsymbol{g}=d({}^\nu\boldsymbol{u})/dt-{}^\nu\boldsymbol{D}({}^{\nu+1}\boldsymbol{u}-{}^\nu\boldsymbol{u})/\Delta x$. On a

$$\frac{d^-({}^\nu\boldsymbol{v})}{dt}=\frac{d^*_-({}^\nu\boldsymbol{P})}{dt}{}^\nu\boldsymbol{u}+{}^\nu\boldsymbol{P}\frac{d({}^\nu\boldsymbol{u})}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{v}-{}^\nu\boldsymbol{v}}{\Delta x}=\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{P}-{}^\nu\boldsymbol{P}}{\Delta x}{}^{\nu+1}\boldsymbol{u}+{}^\nu\boldsymbol{P}\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{u}-{}^\nu\boldsymbol{u}}{\Delta x},$$

d'où, en vertu de la relation

$${}^\nu\boldsymbol{P}\,{}^\nu\boldsymbol{D}\,{}^\nu\boldsymbol{P}^{-1}={}^\nu\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}{}^\nu\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^\nu\lambda_n\end{bmatrix},$$

il résulte

$$\frac{d^-({}^\nu\boldsymbol{v})}{dt}={}^\nu\boldsymbol{\Lambda}\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{v}-{}^\nu\boldsymbol{v}}{\Delta x}-{}^\nu\boldsymbol{\Lambda}\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{P}-{}^\nu\boldsymbol{P}_\nu}{\Delta x}{}^\nu\boldsymbol{P}^{-1}\,{}^\nu\boldsymbol{v}+{}^\nu\boldsymbol{P}\,{}^\nu\boldsymbol{g}+\frac{d^*_-({}^\nu\boldsymbol{P})}{dt}{}^\nu\boldsymbol{P}^{-1}\,{}^\nu\boldsymbol{v}$$

et par conséquent, d'après (22) et (23),

$$\left|\frac{d^-({}^\nu\boldsymbol{v}_i)}{dt}-{}^\nu\lambda_i\frac{{}^{\nu+1}v_i-{}^\nu v_i}{\Delta x}\right|\leqslant(K_1H+K_2H\Lambda)v+HL.$$

En appliquant le lemme 1, nous obtenons l'inégalité (24).

LEMME 3. *Soient* $z_i(t)$, $g_i(t)$, $h_i(t)$, $i=1,2,\dots,k$ *des fonctions continues dans* $[0,s]$ *et soit* $0<g_i(t)<h_i(t)$ *dans* $[0,s]$. *Supposons que pour chaque* $t'\in(0,s)$ *le système d'inégalités*

$$|z_i(t)|\leqslant h_i(t)\quad pour\quad 0\leqslant t\leqslant t'\quad (i=1,2,\dots,k)$$

entraîne les inégalités

$$|z_i(t)|\leqslant g_i(t)\quad pour\quad 0\leqslant t\leqslant t'\quad (i=1,2,\dots,k).$$

Si $|z_i(0)|\leqslant g_i(0)$, $i=1,2,\dots,k$, *alors* $|z_i(t)|\leqslant g_i(t)$ *dans* $[0,s]$[4].

La démonstration consiste à l'application du principe d'induction continue.

THÉORÈME 1. *Considérons le système*

$$\partial\boldsymbol{z}/\partial t=\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\partial\boldsymbol{z}/\partial x) \tag{25}$$

et les conditions initiales

$$\boldsymbol{z}(0,x)=\boldsymbol{z}_0(x). \tag{26}$$

Supposons que $\boldsymbol{z}_0(x)$ *soit périodique:* $\boldsymbol{z}_0(x+a)=\boldsymbol{z}_0(\cdot)$, *de la classe* C^{1+L} *dans* $(-\infty,\infty)$ *et que* $\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$ *soit périodique par rapport à* x:

$$\boldsymbol{f}(t,x+a,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}),$$

de la classe C^{**} *dans un voisinage* U *de la courbe* $t=0$, $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0(x)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{z}_0'(x)$. *Supposons ensuite que la matrice*

$$\boldsymbol{D}(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}(0,x,\boldsymbol{z}_0(x),\boldsymbol{z}_0'(x))\right] \tag{27}$$

est hyperbolique de racines caractéristiques, positives et soit $\boldsymbol{P}(x)$ *sa matrice transformante dépendant de* x *d'une façon continue; supposons qu'on ait*

$$\boldsymbol{P}(x+a)=\boldsymbol{P}(x)\,[5]. \tag{28}$$

Soit $0={}^0x<\dots<{}^mx=a$, ${}^{\nu+1}x-{}^{\nu}x=\Delta x=a/m$ $(\nu=0,1,\dots,m-1)$ *et soit* ${}^1\boldsymbol{z}(t),\dots,{}^m\boldsymbol{z}(t)={}^0\boldsymbol{z}(t)$ *la solution du système d'équations différentielles ordinaires*

$$\frac{d({}^{\nu}\boldsymbol{z})}{dt}=f\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{z}-{}^{\nu}\boldsymbol{z}}{\Delta x}\right)\quad(\nu=0,1,\dots,m-1) \tag{29}$$

[4]) En général, lorsqu'un ensemble fermé F est contenu dans un ouvert G, $A\in F$ et tout arc partiel AC d'un arc AB est contenu dans F pourvu qu'il soit contenu dans G, alors l'arc AB est contenu dans F.

[5]) Cette condition est certainement remplie lorsqu'on a $|\boldsymbol{D}(x)-\boldsymbol{D}(0)|<\delta$, où δ est un nombre positif tel, que la matrice $\boldsymbol{D}$ est hyperbolique, pourvu que $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(0)|<\delta$ (cf. introduction).

satisfaisant aux conditions initiales

$${}^{\nu}\boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{z}_0({}^{\nu}x). \tag{30}$$

Ceci étant admit, il existe un $\delta>0$ *tel que* ${}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)$ *sont définies dans* $[0,\delta]$ *lorsque* m *est suffisamment grand; la suite*

$$\boldsymbol{z}_m(t,x)={}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)+[{}^{\nu+1}\boldsymbol{z}(t)-{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)]\frac{x-{}^{\nu}x}{\Delta x}\quad pour\quad {}^{\nu}x\leqslant x\leqslant{}^{\nu+1}x,$$
$$\nu=0,\dots,m-1$$

est uniformément convergente dans $0\leqslant t\leqslant\delta$, $0\leqslant x\leqslant a$ *et sa limite est une solution de la classe* C^{1+L} *du problème de Cauchy* (26) *pour le système* (25). *Cette solution peut être prolongée à l'ensemble* $0\leqslant t\leqslant\delta$, $-\infty<x<\infty$ *de façon périodique par rapport à* x *de période* a *(en continuant d'être solution). Elle est la seule solution possédant cette propriété.*

Démonstration. Il existent des constantes K_0 et K tels que

$$\begin{gathered}|\boldsymbol{z}_0(x)|<K_0<K,\qquad |\boldsymbol{z}_0'(x)|<K_0<K,\\ |\boldsymbol{z}_0'(\bar{x})-\boldsymbol{z}_0'(x)|\leqslant K_0|\bar{x}-x|\leqslant K|\bar{x}-x|.\end{gathered} \tag{31}$$

La fonction $\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$ peut être prolongée d'un voisinage V:

$$|t|\leqslant\varepsilon,\qquad |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0(x)|\leqslant\varepsilon,\qquad |\boldsymbol{q}-\boldsymbol{z}_0'(x)|\leqslant\varepsilon, \tag{32}$$

contenu dans l'intérieur de U, à l'ensemble de $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{q}$ quelconques, par une méthode exposée dans le livre de E. Kamke ([6], p. 359-362), la classe C^{**} étant gardée. Il existe alors une constante M telle qu'on a

$$|\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})|\leqslant M\quad \text{dans}\quad V \tag{33}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}\right|\leqslant M,\qquad \left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z_i}\right|\leqslant\frac{M}{n},\qquad \left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial q_i}\right|\leqslant\frac{M}{n},\\ &\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}(t,\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant M(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),\\ &\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z_i}(t,\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z_i}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant\frac{M}{n}(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),\\ &\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial q_i}(\bar{t},\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial q_i}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant\frac{M}{n}(|\bar{t}-t|+|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),\end{aligned}\right. \tag{34}$$

pour $|t|\leqslant\varepsilon$ et $x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}$ quelconques. La solution ${}^1\boldsymbol{z},\dots,{}^m\boldsymbol{z}$ de (29) et (30) existe donc dans l'intervalle $[0,\varepsilon]$. Si l'ensemble U est de la forme $|t|\leqslant b$, $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0|\leqslant c$,

$|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0|\leqslant d$, ce prolongement peut être fait alors de telle façon, que les relations (34) dans U entraînent celles pour $\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}$ quelconques avec la même constante M. Il suffit d'utiliser successivement la méthode suivante: Lorsqu'une fonction $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y)$ est définie pour $a-d\leqslant y\leqslant a$, nous posons

$$\varphi(x_1,\ldots,x_k,y)=2\varphi(x_1,\ldots,x_k,a)-\varphi(x_1,\ldots,x_k,2a-y)\quad \text{pour}\quad a\leqslant y\leqslant a+d.$$

Il existe un $\delta_0>0$ tel que

(35) $\boldsymbol{D}$ est hyperbolique de racines caractéristiques positives pourvu que $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x)|\leqslant\delta_0$.

Pour chaque x la matrice transformante $\boldsymbol{P}(x,\boldsymbol{D})$ d'une matrice $\boldsymbol{D}$, où $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x)|\leqslant\delta_0$, est déterminée univoquement par la condition qu'elle soit continue par rapport à $\boldsymbol{D}$ et qu'on ait $\boldsymbol{P}\big(x,\boldsymbol{D}(x)\big)=\boldsymbol{P}(x)$. D'après (28) nous avons donc

$$\boldsymbol{P}(x+a,\boldsymbol{D})=\boldsymbol{P}(x,\boldsymbol{D})\quad \text{lorsque}\quad |\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x)|\leqslant\delta_0. \tag{36}$$

Lorsqu'on a $|\boldsymbol{D}(x)-\boldsymbol{D}(x_1)|\leqslant\delta_0$ pour $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, alors

$$\boldsymbol{P}(x_1,\boldsymbol{D})=\boldsymbol{P}(x_2,\boldsymbol{D})\quad \text{pour}\quad |\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x_1)|\leqslant\delta_0\quad\text{et}\quad |\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x_2)|\leqslant\delta_0. \tag{37}$$

En effet, si $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, $\boldsymbol{P}\big(x_1,\boldsymbol{D}(x)\big)$ et $\boldsymbol{P}(x)$ sont des matrices transformantes de $\boldsymbol{D}(x)$ qui dépendent de x de façon continue, donc, puisqu'on a $\boldsymbol{P}\big(x_1,\boldsymbol{D}(x_1)\big)=\boldsymbol{P}(x_1)$, on aura $\boldsymbol{P}\big(x_1,\boldsymbol{D}(x_2)\big)=\boldsymbol{P}(x_2)$ et par conséquent $\boldsymbol{P}\big(x_1,\boldsymbol{D}(x_2)\big)=\boldsymbol{P}\big(x_2,\boldsymbol{D}(x_2)\big)$. Mais cela entraîne la relation (37), puisque l'ensemble $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x_1)|\leqslant\delta_0$, $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x_2)|\leqslant\delta_0$ est convexe et il contient $\boldsymbol{D}(x_2)$.

Il existe enfin des constantes $H\geqslant 1$ et Λ telles que si $|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}(x)|\leqslant\delta_0$ et $|\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}(x)|\leqslant\delta_0$, alors

$$\begin{gathered}|\boldsymbol{P}(x,\boldsymbol{D}')-\boldsymbol{P}(x,\boldsymbol{D})|\leqslant H|\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}|,\qquad |\boldsymbol{P}(x,\boldsymbol{D})|\leqslant H,\\ |\boldsymbol{P}(x,\boldsymbol{D})^{-1}|\leqslant H\quad\text{et}\quad \lambda_i\leqslant\Lambda,\end{gathered} \tag{38}$$

où λ_i sont les racines caractéristiques de $\boldsymbol{D}$.

Nous supposerons dans la suite que m soit suffisamment grand pour qu'on ait

$$\Delta x<\frac{\delta_0}{4M(1+2KH^2)}. \tag{39}$$

Posons

$$\begin{gathered}{}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)=\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{z}(t)-{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)}{\Delta x},\qquad \nu=0,1,\ldots,m-1,\qquad {}^{m}\boldsymbol{q}(t)={}^{0}\boldsymbol{q}(t),\\ {}^{\nu}\boldsymbol{r}(t)=\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{q}(t)-{}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)}{\Delta x},\qquad \nu=0,1,\ldots,m-1,\qquad {}^{m}\boldsymbol{r}(t)={}^{0}\boldsymbol{r}(t),\end{gathered}$$

pour $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$. Soit τ un nombre positif et tel que

$$\tau<\min\left(\varepsilon,\ \frac{\delta_0}{4M+4M^2(2+3K+3KH^2)},\ \frac{K-K_0}{2M(1+3K+KH^2)}\right) \tag{41}$$

et supposons qu'on ait

$$|{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)|<K,\qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)|<KH^2,\qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{r}(t)|<KH^2\qquad \text{lorsque}\quad 0\leqslant t\leqslant\tau. \tag{42}$$

Nous avons alors, d'après (29), (31), (33) et (34)

$$\left|\frac{d({}^{\nu}z)}{dt}\right|\leqslant M(1+3K+KH^2)\qquad \text{pour}\qquad 0\leqslant t\leqslant\tau. \tag{43}$$

D'après le lemme d'Hadamard on a (cf. (34))

$$\begin{aligned}f_i(t,x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')-f_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})&=h_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')(x'-x)+\\ &+\sum_{j=1}^{n}e_{ij}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')(z_j'-z_j)+\sum_{j=1}^{n}d_{ij}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')(q_j'-q_j),\end{aligned}$$

où $h_i(t,x+a,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x'+a,\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')=h_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')$ etc.,

$$\left\{\begin{aligned}&|h_i(t,\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar{x}',\bar{\boldsymbol{z}}',\bar{\boldsymbol{q}}')-h_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')|\\ &\qquad\leqslant\frac{M}{2}(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|+|\bar{x}'-x'|+|\bar{\boldsymbol{z}}'-\boldsymbol{z}'|+|\bar{\boldsymbol{q}}'-\boldsymbol{q}'|),\\ &|e_{ij}(t,\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar{x}',\bar{\boldsymbol{z}}',\bar{\boldsymbol{q}}')-e_{ij}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')|\\ &\qquad\leqslant\frac{M}{2n}(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|+|\bar{x}-x'|+|\bar{\boldsymbol{z}}'-\boldsymbol{z}'|+|\bar{\boldsymbol{q}}'-\boldsymbol{q}'|),\\ &|d_{ij}(\bar{t},\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}},\bar{x}',\bar{\boldsymbol{z}}',\bar{\boldsymbol{q}}')-d_{ij}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')\\ &\qquad\leqslant\frac{M}{n}|\bar{t}-t|+\frac{M}{2n}(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|+|\bar{x}'-x'|+\\ &\qquad\qquad+|\bar{\boldsymbol{z}}'-\boldsymbol{z}'|+|\bar{\boldsymbol{q}}'-\boldsymbol{q}'|)\end{aligned}\right. \tag{44}$$

et

$$\begin{aligned}h_i(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')&=\frac{\partial f_i}{\partial x}\big(t,x+\vartheta_i(x'-x),\boldsymbol{z}+\vartheta_i(\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}),\boldsymbol{q}+\vartheta_i(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\big),\\ e_{ij}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')&=\frac{\partial f_i}{\partial z}\big(t,\ x+\vartheta_{ij}(x'-x),\boldsymbol{z}+\vartheta_{ij}(\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}),\boldsymbol{q}+\vartheta_{ij}(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\big),\\ d_{ij}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q},x',\boldsymbol{z}',\boldsymbol{q}')&=\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\big((t,\ x+\bar{\vartheta}_{ij}(x'-x),\boldsymbol{z}+\bar{\vartheta}_{ij}(\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}),\boldsymbol{q}+\bar{\vartheta}_{ij}(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\big)\\ &\qquad(0<\vartheta_i,\vartheta_{ij},\bar{\vartheta}_{ij}<1).\end{aligned}$$

En posant

$$ {}^\nu\mathbf{h}(t) = \Big(h_1\big(t, {}^\nu x, {}^\nu\mathbf{z}(t), {}^\nu\mathbf{q}(t), {}^{\nu+1}x, {}^{\nu+1}\mathbf{z}(t), {}^{\nu+1}\mathbf{q}(t)\big), \ldots, $$
$$ h_n\big(t, {}^\nu x, {}^\nu\mathbf{z}(t), {}^\nu\mathbf{q}(t), {}^{\nu+1}x, {}^{\nu+1}\mathbf{z}(t), {}^{\nu+1}\mathbf{q}(t)\big)\Big), $$
$$ \nu = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad {}^m\mathbf{h} = {}^0\mathbf{h}, $$
$$ {}^\nu\mathbf{E}(t) = [e_{ij}(t, {}^\nu x, {}^\nu\mathbf{z}, {}^\nu\mathbf{q}, {}^{\nu+1}x, {}^{\nu+1}\mathbf{z}, {}^{\nu+1}\mathbf{q})], \qquad \nu = 0, \ldots, m-1, \qquad {}^m\mathbf{E}(t) = {}^0\mathbf{E}(t), $$

et

$$ (45) \quad \begin{aligned} &{}^\nu\mathbf{D}(t) = \big[d_{ij}\big(t, {}^\nu x, {}^\nu\mathbf{z}(t), {}^\nu\mathbf{q}(t), {}^{\nu+1}x, {}^{\nu+1}\mathbf{z}(t), {}^{\nu+1}\mathbf{q}(t)\big)\big], \qquad \nu = 0, \ldots, m-1, \\ &{}^m\mathbf{D}(t) = {}^0\mathbf{D}(t), \end{aligned} $$

nous obtenons des relations (29) et (40)

$$ (46) \quad \frac{d({}^\nu\mathbf{q})}{dt} = {}^\nu\mathbf{h} + {}^\nu\mathbf{E}\,{}^\nu\mathbf{q} + {}^\nu\mathbf{D}\,\frac{{}^{\nu+1}\mathbf{q} - {}^\nu\mathbf{q}}{\Delta x}, $$

$$ (47) \quad \frac{d({}^\nu\mathbf{r})}{dt} = \frac{{}^{\nu+1}\mathbf{h} - {}^\nu\mathbf{h}}{\Delta x} + \frac{{}^{\nu+1}\mathbf{E} - {}^\nu\mathbf{E}}{\Delta x}\,{}^{\nu+1}\mathbf{q} + {}^\nu\mathbf{E}\,{}^\nu\mathbf{r} + \frac{{}^{\nu+1}\mathbf{D} - {}^\nu\mathbf{D}}{\Delta x}\,{}^{\nu+1}\mathbf{r} + {}^\nu\mathbf{D}\,\frac{{}^{\nu+1}\mathbf{r} - {}^\nu\mathbf{r}}{\Delta x}, $$

où

$$ (48) \quad {}^\nu\mathbf{D}(t) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\big(t, {}^\nu x + \bar\vartheta_{ij}({}^{\nu+1}x - {}^\nu x), {}^\nu\mathbf{z} + \bar\vartheta_{ij}({}^{\nu+1}\mathbf{z} - {}^\nu\mathbf{z}), {}^\nu\mathbf{q} + \bar\vartheta_{ij}({}^{\nu+1}\mathbf{q} - {}^\nu\mathbf{q})\big)\right] $$

et, en vertu de (34), (42), (44)

$$ (49) \qquad |{}^\nu\mathbf{h}| \leqslant M, \qquad |{}^\nu\mathbf{E}| \leqslant M, \qquad |{}^\nu\mathbf{D}| \leqslant M, $$

$$ (50) \quad \begin{aligned} &|{}^{\nu+1}\mathbf{h} - {}^\nu\mathbf{h}| \leqslant M(1+2KH^2)\Delta x, \qquad |{}^{\nu+1}\mathbf{E} - {}^\nu\mathbf{E}| \leqslant M(1+2KH^2)\Delta x, \\ &|{}^{\nu+1}\mathbf{D} - {}^\nu\mathbf{D}| \leqslant M(1+2KH^2)\Delta x \text{ [6]}), \end{aligned} $$

pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $\nu = 0, \ldots, m-1$. D'après (46), (49) et (42), on a pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$,

$$ (51) \qquad \left|\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right| \leqslant M(1+2KH^2), $$

d'où on déduit, selon (45), (44) et (43)

$$ (52) \quad |\mathbf{D}(t') - \mathbf{D}(t)| \leqslant M\big(1 + M(2+3K+3KH^2)\big)|t'-t| \qquad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant \tau. $$

[6]) Dans le cas où $\nu = m-1$ il faut remarquer qu'on a
${}^m h_i - {}^{m-1}h_i = h_i(t, {}^m x, {}^m\mathbf{z}, {}^m\mathbf{q}, {}^m x + \Delta x, {}^1\mathbf{z}, {}^1\mathbf{q}) - h_i(t, {}^{m-1}x, {}^{m-1}\mathbf{z}, {}^{m-1}\mathbf{q}, {}^m x, {}^0\mathbf{z}, {}^0\mathbf{q})$ etc.

Il résulte des relations (27), (48), (34) qu'on a

$$ |{}^\nu\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}({}^\nu x)| \leqslant M\big(|t| + \Delta x + |{}^\nu\mathbf{z}(t) - {}^\nu\mathbf{z}(0)| + $$
$$ + |{}^{\nu+1}\mathbf{z}(t) - {}^\nu\mathbf{z}(t)| + |{}^\nu\mathbf{q}(t) - {}^\nu\mathbf{q}(0)| + |{}^{\nu+1}\mathbf{q}(t) - {}^\nu\mathbf{q}(t)|\big), $$

donc, en vertu de (43), (51), (42)

$$ |{}^\nu\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}({}^\nu x)| \leqslant M\big(\tau + \Delta x + M(2+3K+3KH^2)\tau + 2KH^2\Delta x\big) $$

et, par conséquent, selon (39) et (41)

$$ (53) \qquad |{}^\nu\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}({}^\nu x)| \leqslant \delta_0/2 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. $$

Nous avons ensuite, d'après (27), (34) et (31),

$$ |\mathbf{D}(x) - \mathbf{D}({}^\nu x)| \leqslant M(1+2K)|x - {}^\nu x|, $$

donc, d'après (39) et (53)

$$ (54) \qquad |\mathbf{D}(x) - \mathbf{D}({}^\nu x)| \leqslant \frac{\delta_0}{2} \qquad \text{lorsque} \quad {}^\nu x \leqslant x \leqslant {}^{\nu+1}x, $$

$$ (55) \qquad |{}^\nu\mathbf{D}(t) - \mathbf{D}({}^{\nu+1}x)| \leqslant \delta_0 \qquad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, $$

$\nu = 0, 1, \ldots, m-1$. On en conclut, selon (35), que la matrice ${}^\nu\mathbf{D}(t)$ est hyperbolique de racines caractéristiques positives: $0 < {}^\nu\lambda_1(t) < \ldots < {}^\nu\lambda_n(t)$; ${}^\nu\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}\big({}^\nu x, {}^\nu\mathbf{D}(t)\big)$ est la matrice transformante de ${}^\nu\mathbf{D}(t)$ et, d'après (36)

$$ (56) \qquad {}^0\mathbf{P}(t) = {}^m\mathbf{P}(t). $$

Selon (38), d'après (53), (54), (55), nous avons

$$ |{}^\nu\mathbf{P}(t') - {}^\nu\mathbf{P}(t)| = \big|\mathbf{P}\big({}^\nu x, {}^\nu\mathbf{D}(t')\big) - \mathbf{P}\big({}^\nu x, {}^\nu\mathbf{D}(t)\big)\big| \leqslant H|{}^\nu\mathbf{D}(t') - {}^\nu\mathbf{D}(t)| $$

et $\big|\mathbf{P}\big({}^{\nu+1}x, {}^{\nu+1}\mathbf{D}(t)\big) - \mathbf{P}\big({}^{\nu+1}x, {}^\nu\mathbf{D}(t)\big)\big| \leqslant H|{}^{\nu+1}\mathbf{D}(t) - {}^\nu\mathbf{D}(t)|$ lorsque $0 \leqslant t \leqslant \tau$, mais, selon (37), en vertu de (53), (54), (55) nous avons $\mathbf{P}\big({}^{\nu+1}x, {}^\nu\mathbf{D}(t)\big) = \mathbf{P}\big({}^\nu x, {}^\nu\mathbf{D}(t)\big)$, donc

$$ |{}^{\nu+1}\mathbf{P}(t) - {}^\nu\mathbf{P}(t)| \leqslant H|{}^{\nu+1}\mathbf{D}(t) - {}^\nu\mathbf{D}(t)|. $$

Il s'ensuit, d'après (52) et (50)

$$ (57) \quad \begin{aligned} &|{}^{\nu+1}\mathbf{P}(t) - {}^\nu\mathbf{P}(t)| \leqslant HM(1+2KH^2)\Delta x \qquad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &|{}^\nu\mathbf{P}(t') - {}^\nu\mathbf{P}(t)| \leqslant HM\big(1 + M(2+3K+3KH^2)\big)|t'-t| \\ &\qquad\qquad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant \tau. \end{aligned} $$

Nous avons enfin, selon (38)

$$ (58) \quad |{}^\nu\mathbf{P}(t)| \leqslant H, \qquad |{}^\nu\mathbf{P}(t)^{-1}| \leqslant H, \qquad {}^\nu\lambda_i(t) \leqslant \Lambda \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. $$

Les relations (46) et (47) entraînent, d'après (42), (49) et (50), les inégalités

$$\left|\frac{d({}^{\nu}\boldsymbol{q})}{dt} - {}^{\nu}\boldsymbol{D}\,\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{q} - {}^{\nu}\boldsymbol{q}}{\Delta x}\right| \leqslant M(1+KH^2) \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

$$\left|\frac{d({}^{\nu}\boldsymbol{r})}{dt} - {}^{\nu}\boldsymbol{D}\,\frac{{}^{\nu+1}\boldsymbol{r} - {}^{\nu}\boldsymbol{r}}{\Delta x}\right| \leqslant M\big(KH^2 + (1+2KH^2)^2\big) \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

À chacune d'elles nous pouvons appliquer le lemme 2, en vertu des relations (56)-(58), donc, en posant

$$(59) \qquad \varkappa_m(t) = \max_{\nu} |{}^{\nu}\boldsymbol{P}(t)\,{}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)|, \qquad \varrho_m(t) = \max_{\nu} |{}^{\nu}\boldsymbol{P}(t)\,{}^{\nu}\boldsymbol{r}(t)|,$$

nous obtenons

$$(60) \qquad \begin{aligned} \varkappa_m(t) &\leqslant \big(\varkappa_m(0) + B/A\big)e^{At} - B/A, \\ \varrho_m(t) &\leqslant \big(\varrho_m(0) + C/A\big)e^{At} - C/A \end{aligned} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

où

$$(61) \qquad \begin{aligned} A &= H^2M\big(1+M(2+3K+3KH^2)\big) + H^2\Lambda M(1+2KH^2), \\ B &= HM(1+KH^2), \\ C &= HM\big(KH^2 + (1+2KH^2)^2\big). \end{aligned}$$

Puisque, d'après (40), (30), (31), on a $|{}^{\nu}\boldsymbol{q}(0)| \leqslant K_0$, $|{}^{\nu}\boldsymbol{r}(0)| \leqslant K_0$, donc d'après (58), (59), $|\varkappa_m(0)| \leqslant K_0H < (K+K_0)H/2$, $|\varrho_m(0)| \leqslant K_0H < (K+K_0)H/2$. Soit τ_0 un nombre positif satisfaisant à (41) et tel qu'on a

$$\begin{aligned} \left(K_0H + \frac{B}{A}\right)e^{At} - \frac{B}{A} &< \frac{K+K_0}{2}\,H, \\ \left(K_0H + \frac{C}{A}\right)e^{At} - \frac{C}{A} &< \frac{K+K_0}{2}\,H \end{aligned} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0$$

(remarquons que τ_0 ne dépend pas de m). Nous avons donc pour chaque $\tau < \tau_0$, $\varkappa_m(t) < (K+K_0)H/2$, $\varrho_m(t) < (K+K_0)H/2$ lorsque $0 \leqslant t \leqslant \tau$, mais d'après (59) et (58), $|{}^{\nu}\boldsymbol{q}| \leqslant H\varkappa_m$, $|{}^{\nu}\boldsymbol{r}| \leqslant H\varrho_m$, donc

$$(62) \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)| \leqslant \frac{K_0+K}{2}\,H^2 < KH^2, \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{r}(t)| \leqslant \frac{K_0+K}{2}\,H^2 < KH^2$$

lorsque $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Enfin puisque, d'après (30) et (31), $|{}^{\nu}\boldsymbol{z}(0)| \leqslant K_0$, donc, en vertu de (41) et (43) nous avons

$$(63) \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)| \leqslant \frac{K_0+K}{2} < K \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Nous avons montré que pour chaque $\tau \in (0, \tau_0)$ les relations (42) entraînent (62) et (63); puisque, d'après (40), (30) et (31), on a

$$|{}^{\nu}\boldsymbol{z}(0)| \leqslant K_0 < \frac{K_0+K}{2}, \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{q}(0)| \leqslant K_0 < \frac{K_0+K}{2}\,H^2,$$

$$|{}^{\nu}\boldsymbol{r}(0)| \leqslant K_0 < \frac{K_0+K}{2}\,H^2,$$

donc, selon le lemme 3, nous avons

$$(64) \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)| \leqslant K, \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)| \leqslant KH^2, \qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{r}(t)| \leqslant KH^2 \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0.$$

Considérons maintenant les suites de fonctions $\boldsymbol{z}_m(t, z)$, $\boldsymbol{q}_m(t, x)$, où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_m(t,x) &= {}^{\nu}\boldsymbol{z}(t) + [{}^{\nu+1}\boldsymbol{z}(t) - {}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)](x - {}^{\nu}x)/\Delta x, \\ \boldsymbol{q}_m(t,x) &= {}^{\nu}\boldsymbol{q}(t) + [{}^{\nu+1}\boldsymbol{q}(t) - {}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)](x - {}^{\nu}x)/\Delta x \end{aligned}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, ${}^{\nu}x \leqslant x \leqslant {}^{\nu+1}x$, $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$. En vertu des inégalités (64), ces suites sont équicontinues dans $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $0 \leqslant x \leqslant a$, donc il existe une suite d'indices α_m telle que $\boldsymbol{z}_{\alpha_m}$ et $\boldsymbol{q}_{\alpha_m}$ sont uniformément convergentes

$$\boldsymbol{z}_{\alpha_m}(t,x) \rightrightarrows \boldsymbol{z}(t,x), \qquad \boldsymbol{q}_{\alpha_m}(t,x) \rightrightarrows \boldsymbol{q}(t,x) \quad \text{dans} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

D'après (29), (30) et (40) nous avons

$$\boldsymbol{z}_m(t, {}^{\sigma}x) = \boldsymbol{z}_0({}^{\sigma}x) + \int_0^t \boldsymbol{f}\big(u, {}^{\sigma}x, \boldsymbol{z}_m(u, {}^{\sigma}x), \boldsymbol{q}_m(u, {}^{\sigma}x)\big)\,du,$$

$$\boldsymbol{z}_m(t, {}^{\sigma}x) = \boldsymbol{z}_m(t, 0) + \sum_{\nu=0}^{\sigma} \boldsymbol{q}_m(t, {}^{\nu}x)\,\Delta x$$

pour $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $\sigma = 1, 2, \ldots, m$. Soit $0 \leqslant x \leqslant a$ et ${}^{\sigma}x = a\beta_m/\alpha_m \to x$ lorsque $m \to \infty$; nous obtenons à la limite

$$\boldsymbol{z}(t,x) = \boldsymbol{z}_0(x) + \int_0^t \boldsymbol{f}\big(u, x, \boldsymbol{z}(u,x), \boldsymbol{q}(t,x)\big)\,du,$$

$$\boldsymbol{z}(t,x) = \boldsymbol{z}(t,0) + \int_0^x \boldsymbol{q}(t,\xi)\,d\xi,$$

d'où $\boldsymbol{q}(t,x) = \partial\boldsymbol{z}(t,x)/\partial x$ et

$$(65) \qquad \partial\boldsymbol{z}/\partial t = \boldsymbol{f}(t, x, \boldsymbol{z}, \partial\boldsymbol{z}/\partial x), \qquad \boldsymbol{z}(0,x) = \boldsymbol{z}_0(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

c'est-à-dire, $\boldsymbol{z}(t,x)$ est une solution du problème de Cauchy (26) pour le système (25).

D'après (64) et (51), $\boldsymbol{q}_m(t,x)$ satisfont à la condition de Lipschitz avec la constante $\max\big(KH^2, M(1+2KH^2)\big)$, donc il en est de même pour $\boldsymbol{q}(t,x)$. Nous voyons donc (en vertu de (65)) que $z(t,x)$ est de la classe C^{1+L}.

Nous avons enfin

$$\boldsymbol{z}(t,0)=\boldsymbol{z}(t,a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial x}(t,a),$$

donc $\boldsymbol{z}(t,x)$ peut être prolongée à l'ensemble $0\leqslant t\leqslant\tau_0$, $-\infty<x<\infty$ de façon périodique par rapport à x de période a (en continuant d'être solution). Selon les théorèmes d'unicité du paragraphe précédant, $\boldsymbol{z}(t,x)$ est la solution unique dans $0\leqslant t\leqslant\tau$, $-\infty<x<\infty$ $(\tau<\tau_0)$.

Les raisonnements ci-dessus conduisent à la conclusion, que chaque suite partielle de $\boldsymbol{z}_m$ resp. de $\boldsymbol{q}_m$ contient une suite partielle qui converge uniformément vers $\boldsymbol{z}(t,x)$ resp. vers $\boldsymbol{q}(t,x)$. Nous avons donc

$$\boldsymbol{z}_m\rightrightarrows\boldsymbol{z} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{q}_m\rightrightarrows\boldsymbol{q} \quad \text{dans} \quad 0\leqslant t\leqslant\tau_0, \quad 0\leqslant x\leqslant a.$$

Il existe un $\delta>0$ tel que la surface $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(t,x)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t,x)$, où $0\leqslant t\leqslant\delta$ est contenue dans l'intérieur de V. Il s'ensuit qu'il en est de même pour la surface $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_m(t,x)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_m(t,x)$, pourvu que m soit suffisamment grand donc ${}^0\boldsymbol{z},\ldots,{}^{m-1}\boldsymbol{z}$ dans $[0,\delta]$ est une solution du système (29) dont les seconds membres sont définis dans V (lorsque m est suffisamment grand).

Remarque 2. *S'il s'agit d'existence de solutions on peut supprimer dans le théorème* 1 *les hypothèses que les racines caractéristiques de* $[\partial f_i/\partial q_j]$ *sont positives et que* $\boldsymbol{z}_0(x)$, $\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$ *sont périodiques par rapport à* x.

En effet, la substitution $x=\xi+\Lambda t$ conduit du système (25) au système

$$\partial\bar{\boldsymbol{z}}/\partial t=\bar{\boldsymbol{f}}(t,\xi,\bar{\boldsymbol{z}},\partial\bar{\boldsymbol{z}}/\partial\xi)=\boldsymbol{f}(t,\xi+\Lambda t,\bar{\boldsymbol{z}},\partial\bar{\boldsymbol{z}}/\partial\xi)+\Lambda\partial\boldsymbol{z}/\partial\xi,$$

pour lequel les racines caractéristiques de la matrice

$$[\partial\bar{f}_i/\partial\bar{q}_j]=[\partial f_i/\partial q_j]+\Lambda\boldsymbol{I}$$

sont positives pourvu que Λ soit plus grand que la valeur absolue de chaque racine caractéristique de $[\partial f_i/\partial q_j]$ (elles sont égales à $\lambda_i+\Lambda$, où λ_i sont celles de la matrice $[\partial f_i/\partial q_j]$).

Dans le cas où $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{z}_0$ ne sont pas périodiques nous pouvons les prolonger d'une façon périodique par rapport à x en utilisant la méthode suivante. Si $\varphi(x)$ est de la classe C^{1+L} dans $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$ nous posons

$$\bar\varphi(x)=\varphi(x) \quad \text{dans} \quad [a,b],$$

$$\bar\varphi(x)=\varphi\left(a+\varepsilon\sin\frac{x-a}{\varepsilon}\right) \quad \text{dans} \quad \left[a-\frac{\varepsilon\pi}{2},a\right],$$

$$\bar\varphi(x)=\varphi\left(b+\varepsilon\sin\frac{x-b}{\varepsilon}\right) \quad \text{dans} \quad \left[b,b+\frac{\varepsilon\pi}{2}\right].$$

La fonction $\bar\varphi$ sera de la classe C^{1+L} dans $[a-\varepsilon\pi/2,b+\varepsilon\pi/2]$ et $\bar\varphi'(a-\varepsilon\pi/2)=\bar\varphi'(b+\varepsilon\pi/2)=0$. Si $\bar\varphi(x)$ est de la classe C^{1+L} dans $[a_1,b_1]$ et si $\bar\varphi'(a_1)=\bar\varphi'(b_1)=0$, nous posons $\bar{\bar\varphi}(x)=\bar\varphi(x)$ dans $[a_1,b_1]$ et $\bar{\bar\varphi}(x)=\bar\varphi(2b_1-x)$ dans $[b_1,2b_1-a_1]$. La fonction $\bar{\bar\varphi}$ sera de la classe C^{1+L}, $\bar{\bar\varphi}(a_1)=\bar{\bar\varphi}(2b_1-a_1)$, $\bar{\bar\varphi}'(a_1)=\bar{\bar\varphi}'(2b_1-a_1)$. On reconnait facilement qu'après l'application de cette méthode, la matrice $[\partial f_i/\partial q_j]$ reste hyperbolique et l'hypothèse (28) est verifiée.

La question se pose si, l'existence locale des solutions étant garantie, un théorème sur l'existence intégrale des solutions peut en être obtenu par des prolongements successifs. D'après une remarque de A. Pliś un tel prolongement ne réussit pas au cas où les dérivées du second ordre de la solution peuvent devenir infinies. En effet, considérons l'exemple donné dans l'introduction, en posant $\varphi(q)=q^2$ et $\omega(x)=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ pour $x\leqslant 0$. On vérifie que

$$q(t,x)=-\big(-x+2t^2+2t(t^2-x)^{1/2}\big)^{1/2} \quad \text{pour} \quad t<0, \quad x\leqslant 0$$

est de la classe C^2, $q(t,0)=0$ et qu'on a

$$\frac{\partial^- q}{\partial x}(t,0)=\frac{-1}{t\sqrt{3}}\to\infty \quad \text{pour} \quad t\to 0.$$

La démonstration du théorème 1 nous fournit des évaluations des dérivées supérieures des expressions

$$\varkappa(t)=\max_x|\boldsymbol{P}(t,x)\boldsymbol{q}(t,x)|,$$
$$(66)\qquad \varrho(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{|x'-x|>\varepsilon}\left|\boldsymbol{P}(t,x)\frac{\boldsymbol{q}(t,x')-\boldsymbol{q}(t,x)}{x'-x}\right|\right\},$$

où $\boldsymbol{P}(t,x)$ est une matrice transformante de

$$\boldsymbol{D}(t,x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\big(t,x,\boldsymbol{z}(t,x),\boldsymbol{q}(t,x)\big)\right]$$

définie pour $0\leqslant t\leqslant\tau_0$ par la continuité et par la condition $\boldsymbol{P}(0,x)=\boldsymbol{P}(x)$.

En effet, soit $\eta_1>0$; d'après (48), en vertu de la convergence uniforme de $\boldsymbol{z}_m$ et $\boldsymbol{q}_m$, nous avons

$$|{}^\nu\boldsymbol{D}(t)-\boldsymbol{D}(t,{}^\nu x)|\leqslant\min(\delta_0/2,\eta_1/H),$$

pourvu que m soit suffisamment grand. On a alors, d'après (53) (en admettant $\tau=\tau_0$), $|\boldsymbol{D}(t,{}^\nu x)-\boldsymbol{D}({}^\nu x)|\leqslant\delta_0$, d'où, selon (38) et (53),

$$\big|\boldsymbol{P}\big({}^\nu x,{}^\nu\boldsymbol{D}(t)\big)-\boldsymbol{P}\big({}^\nu x,\boldsymbol{D}(t,{}^\nu x)\big)\big|\leqslant H|{}^\nu\boldsymbol{D}(t)-\boldsymbol{D}(t,{}^\nu x)|\leqslant\eta_1;$$

mais $P\big({}^\nu x,{}^\nu\boldsymbol{D}(t)\big)={}^\nu\boldsymbol{P}(t)$ et $\boldsymbol{P}\big({}^\nu x,\boldsymbol{D}(t,{}^\nu x)\big)=\boldsymbol{P}(t,{}^\nu x)$, car on a pour $t=0$

$$\boldsymbol{P}\big({}^\nu x,\boldsymbol{D}(0,{}^\nu x)\big)=\boldsymbol{P}\big({}^\nu x,\boldsymbol{D}({}^\nu x)\big)=\boldsymbol{P}({}^\nu x)=\boldsymbol{P}(0,{}^\nu x),$$

donc

$$|{}^{\nu}\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x)|\leqslant\eta_1 .$$

Soit $\eta>0$. Le nombre η_1 étant suffisamment petit, la relation $|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}(t,x)|<\eta_1$ entraîne $|\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}(t,x)^{-1}|<1+\eta$, $|\boldsymbol{P}(t,x)\boldsymbol{P}^{-1}|<1+\eta$, donc

(67) $$|{}^{\nu}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x)^{-1}|<1+\eta, \qquad |\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x){}^{\nu}\boldsymbol{P}(t)^{-1}|<1+\eta$$

pourvu que m soit suffisamment grand. On a alors

$$|{}^{\nu}\boldsymbol{P}(t){}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)|\leqslant(1+\eta)|\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x)\boldsymbol{q}_m(t,{}^{\nu}x)|\leqslant(1+\eta)\max_x|\boldsymbol{P}(t,x)\boldsymbol{q}_m(t,x)|,$$

d'où, d'après (59),

$$\varkappa_m(t)\leqslant(1+\eta)\max_x|\boldsymbol{P}(t,x)\boldsymbol{q}_m(t,x)|;$$

en faisant tendre m vers ∞ et η vers 0 nous obtenons à la limite (cf. (66))

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\varkappa_m(t)\leqslant\varkappa(t).$$

D'autre part on a $\varkappa(t)=|\boldsymbol{P}(t,\bar{x})\boldsymbol{q}(t,\bar{x})|$ pour un $\bar{x}$; soit $|{}^{\nu}x-\bar{x}|\leqslant a/m$. Lorsque m est suffisamment grand, nous avons donc

$$\varkappa(t)-\eta\leqslant|\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x)\boldsymbol{q}_m(t,{}^{\nu}x)|\leqslant(1+\eta)|{}^{\nu}\boldsymbol{P}(t){}^{\nu}\boldsymbol{q}(t)|\leqslant(1+\eta)\varkappa_m(t),$$

d'où, en faisant tendre m vers ∞ et η vers 0 nous obtenons $\varkappa(t)\leqslant\underline{\lim}_{m\to\infty}\varkappa_m(t)$ et par conséquent

(68) $$\varkappa(t)=\lim_{m\to\infty}\varkappa_m(t).$$

Si m est suffisamment grand, on a d'après (67)

(69) $$|{}^{\nu}\boldsymbol{P}(0){}^{\nu}\boldsymbol{r}(0)|\leqslant(1+\eta)|\boldsymbol{P}(0,{}^{\nu}x){}^{\nu}\boldsymbol{r}(0)|$$

$$\leqslant(1+\eta)\left|\frac{\boldsymbol{w}({}^{\nu+2}x)-2\boldsymbol{w}({}^{\nu+1}x)+\boldsymbol{w}({}^{\nu}x)}{\Delta x^2}\right|,$$

où $\boldsymbol{w}(x)=\boldsymbol{P}(0,{}^{\nu}x)\boldsymbol{z}(0,x)$ (cf. (30), (40) et (65)). Nous avons ensuite [7])

$$\left|\frac{\boldsymbol{w}({}^{\nu+2}x)-2\boldsymbol{w}({}^{\nu+1}x)+\boldsymbol{w}({}^{\nu}x)}{\Delta x^2}\right|\leqslant\sup_{{}^{\nu}x\leqslant x<x'\leqslant{}^{\nu+2}x}\left|\frac{\boldsymbol{w}'(x')-\boldsymbol{w}'(x)}{x'-x}\right|$$

$$=\sup_{{}^{\nu}x\leqslant x<x'\leqslant{}^{\nu+2}x}\left|\boldsymbol{P}(0,{}^{\nu}x)\frac{\boldsymbol{q}(0,x')-\boldsymbol{q}(0,x)}{x'-x}\right|;$$

[7]) En s'appuyant sur le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction

$$\frac{w_i(x+\Delta x)-w_i(x)}{\Delta x}\qquad(i=1,\ldots,n).$$

puisqu'on a $|\boldsymbol{P}(0,{}^{\nu}x)\boldsymbol{P}(0,x)^{-1}|<1+\eta$ pour ${}^{\nu}x\leqslant x\leqslant{}^{\nu+2}x$, lorsque m est suffisamment grand, donc

$$\left|\frac{\boldsymbol{w}({}^{\nu+2}x)-2\boldsymbol{w}({}^{\nu+1}x)+\boldsymbol{w}({}^{\nu}x)}{\Delta x^2}\right|\leqslant(1+\eta)\sup_{{}^{\nu}x\leqslant x<x'\leqslant{}^{\nu+2}x}\left|\boldsymbol{P}(0,x)\frac{\boldsymbol{q}(0,x')-\boldsymbol{q}(0,x)}{x'-x}\right|$$

$$\leqslant(1+\eta)\sup_{|x'-x|\leqslant2\Delta x}\left|\boldsymbol{P}(0,x)\frac{\boldsymbol{q}(0,x')-\boldsymbol{q}(0,x)}{x'-x}\right|.$$

Il s'ensuit, d'après (69) et (59), qu'on a

$$\varrho_m(0)\leqslant(1+\eta)^2\sup_{|x'-x|\leqslant2\Delta x}\left|\boldsymbol{P}(0,x)\frac{\boldsymbol{q}(0,x')-\boldsymbol{q}(0,x)}{x'-x}\right|,$$

d'où, en faisant tendre m vers ∞ et η vers 0 nous obtenons (cf. (66))

(70) $$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\varrho_m(0)\leqslant\varrho(0).$$

Si $\varepsilon>0$ est suffisamment petit, donc $|\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x)\boldsymbol{P}(t,{}^{\sigma}x)^{-1}|\leqslant1+\eta$ lorsque $|{}^{\sigma}x-{}^{\nu}x|\leqslant2\varepsilon$; nous avons alors d'après (67),

$$|\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x){}^{\sigma}\boldsymbol{r}(t)|\leqslant(1+\eta)|\boldsymbol{P}(t,{}^{\sigma}x){}^{\sigma}\boldsymbol{r}(t)|\leqslant(1+\eta)^2|{}^{\sigma}\boldsymbol{P}(t){}^{\sigma}\boldsymbol{r}(t)|\leqslant(1+\eta)^2\varrho_m(t)$$

(m étant suffisamment grand). Il en résulte que si $|{}^{\mu}x-{}^{\nu}x|\leqslant2\varepsilon$ alors

(71) $$\left|\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x)\frac{\boldsymbol{q}_m(t,{}^{\mu}x)-\boldsymbol{q}_m(t,{}^{\nu}x)}{{}^{\mu}x-{}^{\nu}x}\right|\leqslant\frac{1}{\mu-\nu}\sum_{\sigma=\nu}^{\mu-1}|\boldsymbol{P}(t,{}^{\nu}x){}^{\sigma}\boldsymbol{r}(t)|\leqslant(1+\eta)^2\varrho_m(t).$$

Soit $|x'-x|<\varepsilon$ et ${}^{\nu}x\to x$, ${}^{\mu}x\to x'$ pour $m\to\infty$; nous avons donc $|{}^{\mu}x-{}^{\nu}x|<\varepsilon$ lorsque m est suffisamment grand. En faisant tendre m vers ∞ dans la relation (71) nous obtenons

$$\left|\boldsymbol{P}(t,x)\frac{\boldsymbol{q}(t,x')-\boldsymbol{q}(t,x)}{x'-x}\right|\leqslant(1+\eta)^2\underline{\lim}_{m\to\infty}\varrho_m(t).$$

Il s'ensuit d'après (66), en faisant tendre ε et η vers zéro, qu'on a

(72) $$\varrho(t)\leqslant\underline{\lim}_{m\to\infty}\varrho_m(t).$$

En vertu de (68), (70) et (72) nous tirons des relations (60) (en faisant tendre m vers ∞)

$$\varkappa(t)\leqslant\big(\varkappa(0)+B/A\big)e^{At}-B/A,\qquad\varrho(t)\leqslant\big(\varrho(0)+C/A\big)e^{At}-C/A,$$

où A,B,C sont définis par (61), donc, pour $t=0$, on a

$$d^{+}\varkappa/dt\leqslant A\varkappa+B\quad\text{ et }\quad d^{+}\varrho/dt\leqslant A\varrho+C.$$

Selon la remarque faite au debut de la démonstration du théorème 1, concernant la méthode de prolongement, M peut être une constante quelconque pour laquelle subsistent les relations (33), (34) dans U, pourvu que l'ensemble U soit de la forme $|t|\leqslant b, |z-z_0|\leqslant c$, $|q-q_0|\leqslant d$. Dans le cas où les racines caractéristiques $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de $\boldsymbol{D}(x)$ ne sont pas positives supposons qu'on a $|\lambda_i|<\Lambda$ et effectuons la substitution $x=\xi+\Lambda t$ (cf. remarque 2). Nous obtenons un système pour lequel les racines caractéristiques en question seront positives et pour lequel il faut remplacer les constantes Λ et M par 2Λ et $M+M\Lambda+\Lambda$. Nous avons donc

THÉORÈME 2. *Soit $\boldsymbol{z}(t,x)$ une solution de la classe C^{1+L} dans $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $-\infty<x<\infty$, du problème de Cauchy $z(t_0,x)=z_0(x)$ pour le système $\partial\boldsymbol{z}/\partial t=\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\partial\boldsymbol{z}/\partial x)$. Supposons qu'on a*

$$\boldsymbol{z}_0(x+a)=\boldsymbol{z}_0(x),\qquad |\boldsymbol{z}_0(x)|\leqslant K,\qquad |\boldsymbol{z}_0'(x)|\leqslant K,$$

$$|\boldsymbol{z}_0'(\bar{x})-\boldsymbol{z}_0'(x)|\leqslant K|\bar{x}-x|,\qquad \boldsymbol{f}(t,x+a,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}),\qquad |\boldsymbol{f}|\leqslant M,$$

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}\right|\leqslant M,\quad \left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}(t,\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant M(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|),$$

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z_i}\right|\leqslant\frac{M}{n},\quad \left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z_i}(t,\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z_i}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant\frac{M}{n}(|\bar{x}-x|+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}|),$$

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial q_i}\right|\leqslant\frac{M}{n},\quad \left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial q_i}(\bar{t},\bar{x},\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{q}})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial q_i}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})\right|\leqslant\frac{M}{n}(|\bar{t}-t|+|\bar{x}-x|+$$
$$+|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}|)$$

dans l'ensemble $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $-\infty<x<\infty$, $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0|\leqslant c$, $|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0|\leqslant d$. Supposons ensuite que la matrice $[\partial f_i(t_0,x,\boldsymbol{z}_0(x),\boldsymbol{z}_0'(x))/\partial q_j]$ est hyperbolique de racines caractéristiques $|\lambda_i|<\Lambda$ et de matrice transformante $\boldsymbol{P}(x)$ pour laquelle $\boldsymbol{P}(x+a)=\boldsymbol{P}(x)$. Supposons enfin que si $\boldsymbol{P}$ est une matrice transformante de $\boldsymbol{D}$ définie par continuité pour $\boldsymbol{D}$ d'un voisinage de $\boldsymbol{D}(x)$ alors

$$|\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P}|\leqslant H|\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}|,\qquad |\boldsymbol{P}|\leqslant H,\qquad |\boldsymbol{P}^{-1}|\leqslant H. \tag{73}$$

Soient

$$\varkappa(t)=\max_x\left|\boldsymbol{P}(t,x)\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial x}(t,x)\right|,$$

(74)

$$\varrho(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{|x'-x|\leqslant\varepsilon}\left|\boldsymbol{P}(t,x)\frac{\partial\boldsymbol{z}(t,x')/\partial x-\partial\boldsymbol{z}(t,x)/\partial x}{x'-x}\right|\right\}$$

où $\boldsymbol{P}(t,x)$ est la matrice transformante de

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\left(t,x,\boldsymbol{z}(t,x),\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial x}(t,x)\right)\right]$$

définie par la continuité et par la condition $\boldsymbol{P}(0,x)=\boldsymbol{P}(x)$. Cela posé, nous avons

$$\frac{d^+\varkappa}{dt}(t_0)\leqslant A\varkappa(t_0)+B,\qquad \frac{d^+\varrho}{dt}(t_0)\leqslant A\varrho(t_0)+C, \tag{75}$$

où

$$A=A(K,M,\Lambda,H)=H^2(M+K\Lambda+\Lambda)\times$$
$$\times[1+(M+K\Lambda+\Lambda)(2+3K+3KH^2)+2\Lambda(1+2KH^2)],$$

$$B=B(K,M,\Lambda,H)=H(M+K\Lambda+\Lambda)(1+KH^2),$$

$$C=C(K,M,\Lambda,H)=H(M+K\Lambda+\Lambda)\big(KH^2+(1+2KH^2)^2\big).$$

Application. Soit $\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})$ une fonction définie, périodique par rapport à x de période a et telle qu'il en soit de même avec une matrice transformante de $[\partial f_i/\partial q_j]$ pour $t\geqslant 0$. Supposons que pour u,Z,Q positifs quelconques les hypothèses du théorème 2 sont remplies pour f dans l'ensemble $u\leqslant t\leqslant u+1$, $-\infty<x<\infty$, $|\boldsymbol{z}|\leqslant Z+1$, $|\boldsymbol{q}|\leqslant Q+1$ avec des constantes $M=M(u,Z,Q)$, $\Lambda(u,Z,Q)$, $H(u,Z,Q)$, où M,Λ,H sont des fonctions croissantes par rapport à Z et Q. Supposons enfin que la relation $k\leqslant H(u,\zeta,k)\varkappa$ entraîne $k<k(u,\zeta,\varkappa)$, où $k(u,\zeta,\varkappa)$ est une fonction croissante par rapport à ζ et $\varkappa$.

Soit $\boldsymbol{z}(t,x)$ une solution périodique (de même période que $\boldsymbol{f}$) de la classe C^{1+L} pour $0\leqslant t\leqslant t^*$ du système $\partial\boldsymbol{z}/\partial t=\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\partial\boldsymbol{z}/\partial x)$. Posons $\zeta(t)=\max_x|\boldsymbol{z}(t,x)|$ et soit $0\leqslant u\leqslant t^*$, $\boldsymbol{z}_1(x)=\boldsymbol{z}(u,x)$, $k_1=\max_x|\boldsymbol{z}_1'(x)|$. Si Δu est suffisamment petit, on a $|\boldsymbol{z}(t,x)|<\zeta(u)+1$ et $|\partial\boldsymbol{z}(t,x)/\partial x|\leqslant k_1+1$, lorsque $u\leqslant t\leqslant u+\Delta u$. On a d'après (73) et (74) $|\boldsymbol{z}_1'(x)|\leqslant H(u,\zeta(u),k_1)\varkappa(u)$, donc $k_1\leqslant H(u,\zeta(u),k_1)$, d'où il résulte que $k_1<k(u,\zeta(u),\varkappa(u))$ et par conséquent $|\boldsymbol{z}_1'(x)|\leqslant k(u,\zeta(u),\varkappa(u))$. D'après (74) on a

$$\left|\boldsymbol{P}(u,x)\frac{\boldsymbol{z}_1'(x')-\boldsymbol{z}_1'(x)}{x'-x}\right|\leqslant\varrho(u)+1$$

pourvu que $|x-x'|$ soit suffisamment petit et nous avons d'après (73)

$$|\boldsymbol{z}_1'(x')-\boldsymbol{z}_1'(x)|\leqslant\big(\varrho(u)+1\big)H\big(u,\zeta(u),k_1\big)|x'-x|$$
$$\leqslant\big(\varrho(u)+1\big)H\Big(u,\zeta(u),k\big(u,\zeta(u),\varkappa(u)\big)\Big)|x'-x|.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 2 à la solution $z(t,x)$ du problème de Cauchy $\boldsymbol{z}(u,x)=\boldsymbol{z}_1(x)$ dans l'ensemble $u\leqslant t\leqslant u+\Delta u$, $|\boldsymbol{z}|\leqslant\zeta(u)+1$, $|\boldsymbol{q}|\leqslant k_1+1$ en admettant les constantes

$$K_1=\zeta(u)+k\big(u,\zeta(u),\varkappa(u)\big)+\big(\varrho(u)+1\big)H\Big(u,\zeta(u),k\big(u,\zeta(u),\varkappa(u)\big)\Big),$$

$$M_1=M\Big(u,\zeta(u),k\big(u,\zeta(u),\varkappa(u)\big)\Big),$$

$$\Lambda_1=\Lambda\Big(u,\zeta(u),k\big(u,\zeta(u),\varkappa(u)\big)\Big),$$

$$H_1=H\Big(u,\zeta(u),k\big(u,\zeta(u),\varkappa(u)\big)\Big)$$

et nous obtenons

$$\frac{d^+\zeta}{dt}(u)\leqslant M_1(u,\zeta,\varkappa),$$

$$\frac{d^+\varkappa}{dt}(u)\leqslant A\big(K_1(u,\zeta,\varkappa,\varrho),M_1(u,\zeta,\varkappa),\Lambda_1,H_1\big)\varkappa(u)+B(K_1,M_1,\Lambda_1,H_1),$$

$$\frac{d^+\varrho}{dt}(u)\leqslant A(K_1,M_1,\Lambda_1,H_1)\varrho(u)+C(K_1,M_1,\Lambda_1,H_1).$$

Il s'ensuit que si $\zeta_0(t)$, $\varkappa_0(t)$, $\varrho_0(t)$ est une intégrale (supérieure) du système

$$\zeta_0^{\cdot}=M_1,\qquad \varkappa_0^{\cdot}=A\varkappa+B,\qquad \varrho_0^{\cdot}=A\varrho_0+C,$$

satisfaisant aux conditions $\zeta_0(0)\geqslant\zeta(0)$, $\varkappa_0(0)\geqslant\varkappa(0)$, $\varrho_0(0)\geqslant\varrho(0)$, on a $\zeta(t)\leqslant\zeta_0(t)$, $\varkappa(t)\leqslant\varkappa_0(t)$, $\varrho(t)\leqslant\varrho_0(t)$ [8]). En utilisant le principe d'induction continue, nous obtenons l'existence de la solution $\boldsymbol{z}(t,x)$ pour $0\leqslant t<T$, où $[0,T]$ est l'intervalle d'existence de $\zeta_0,\varkappa_0,\varrho_0$ [9]).

Cette méthode peut nous fournir des criteriums qui garantissent l'existence d'une solution pour $0\leqslant t<\infty$. Par exemple, si l'on suppose que

$$M\leqslant\alpha(u),\qquad \Lambda\leqslant\alpha(u),\qquad H(u,Z,Q)\leqslant H,\qquad \alpha_0=\max_{0\leqslant u<\infty}\big(1,\alpha(u)\big),$$

$$\int_0^\infty\alpha(u)\,du=\beta_0<\infty,\qquad 363\alpha_0^4H^5\beta_0<1,$$

alors la solution existe pour $0\leqslant t<\infty$ pourvu que les valeurs initiales satisfassent aux inégalités (31) avec la constante

$$K=H^{-1}(1-363\,\alpha_0^4H^5\beta_0)^{-1/3}-H^{-1}.$$

---

[8]) Cf. [11], p. 124, théorème 2.

[9]) Nous nous appuyons sur le théorème que si $z_n(x)\rightrightarrows z(x)$, $|z_n'(x)|\leqslant M$, $|z_n'(x')-z_n'(x)|\leqslant M|x'-x|$, alors $z_n'(x)\rightrightarrows z'(x)$ et $|z'(x')-z'(x)|\leqslant M|x_n'-x|$.

Cette méthode peut nous fournir aussi des limitations du domaine d'existence des solutions dans le cas non-périodique, car nous pouvons toujours prolonger les fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{z}_0$ d'une façon périodique (cf. remarque 2).

§ 3. Convergence

THÉORÈME 3. *Soit $\boldsymbol{z}(t,x)$ une solution de la classe C^1 dans $0\leqslant t\leqslant s$, $-\infty<x<\infty$ du système*

$$\partial z_i/\partial t=f_i(t,x,\boldsymbol{z},\partial z_i/\partial x)\qquad (i=1,\dots,n)$$

(f_i ne dépend pas de $q_1,\dots,q_{i-1},q_{i+1},\dots,q_n$). Supposons que $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{f}$ sont périodiques par rapport à x

$$\boldsymbol{z}(t,x+a)=\boldsymbol{z}(t,x);\qquad \boldsymbol{f}(t,x+a,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{f}(t,x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{q}),$$

que la fonction $f_i(t,x,z,q_i)$ est définie et croissante par rapport à q_i dans l'ensemble $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}(t,x)|\leqslant\varepsilon$, $0\leqslant t\leqslant s$, $\boldsymbol{z},q_i$ quelconques et qu'elle satisfait à la condition de Lipschitz suivante

$$(77)\qquad |f_i(t,x,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{q}_i)-f_i(t,x,\boldsymbol{z},q_i)|\leqslant M(|\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}|+|\bar{q}_i-q_i|),$$

lorsque $|q_i-\partial z_i(t,x)/\partial x|\leqslant\varepsilon$, $|\bar{q}_i-\partial z_i(t,x)/\partial x|\leqslant\varepsilon$ $(i=1,\dots,n)$.

Soit $0={}^0x<\ldots<{}^mx=a$, $|{}^{\nu+1}x-{}^{\nu}x|=\Delta x=a/m$ $(\nu=0,\dots,m-1)$ et soit ${}^1\boldsymbol{z}(t),\dots,{}^m\boldsymbol{z}(t)={}^0\boldsymbol{z}(t)$ la solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$(78)\qquad \frac{d({}^{\nu}z_i)}{dt}=f_i\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{{}^{\nu+1}z_i-{}^{\nu}z_i}{\Delta x}\right)\qquad (i=1,\dots,n,\ \ \nu=0,\dots,m-1),$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$(79)\qquad {}^{\nu}\boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{z}(0,{}^{\nu}x)\qquad (\nu=0,\dots,m-1).$$

Cela posé, ${}^1\boldsymbol{z}(t),\dots,{}^m\boldsymbol{z}(t)$ existe dans $[0,s]$ lorsque m est suffisamment grand et $|{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x)|\leqslant\varepsilon_m\to 0$ pour $m\to\infty$ [10]).

Démonstration. Supposons que la solution ${}^1\boldsymbol{z}(t),\dots,{}^m\boldsymbol{z}(t)$ est saturée à droite dans l'intervalle $[0,\tau_0)$. Posons

$$(80)\qquad {}^{\nu}\boldsymbol{v}(t)={}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x).$$

Soit $0<\tau<\tau_0$ et supposons qu'on a

$$(81)\qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{v}(t)|\leqslant\varepsilon\quad\text{pour}\quad 0\leqslant t\leqslant\tau.$$

---

[10]) Cela entraîne l'unicité de la solution périodique.

Puisque la fonction $\partial \boldsymbol{z}(t,x)/\partial x$ est uniformément conitinue, on a

$$(82)\qquad \left|\frac{\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu+1}x)-\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}-\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial x}(t,{}^{\nu}x)\right|\leqslant \eta_m\to 0 \quad \text{lorsque} \quad m\to\infty .$$

Nous avons ensuite

$$\left|\frac{d({}^{\nu}v_i)}{dt}-\left[f_i\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{{}^{\nu+1}z_i-{}^{\nu}z_i}{\Delta x}\right)-f_i\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)\right]\right|$$

$$\leqslant\left|f_i\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)-f_i\left(t,{}^{\nu}x,\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x)\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)\right|+$$

$$+\left|f_i\left(t,{}^{\nu}x,\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x),\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)-f_i\left(t,{}^{\nu}x,\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x),\frac{\partial z}{\partial x}(t,{}^{\nu}x)\right)\right|,$$

mais, d'après (80), vu que f_i est croissant par rapport à q_i, on a

$$f_i\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{{}^{\nu+1}z_i-{}^{\nu}z_i}{\Delta x}\right)-f_i\left((t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z}\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)$$

$$={}^{\nu}d_i(t)[{}^{\nu+1}v_i(t)-{}^{\nu}v_i(t)],$$

où ${}^{\nu}d_i(t)\geqslant 0$; lorsque m est si grand qu'on a $\eta_m<\varepsilon$, nous avons, selon (77), (80), (81), (82)

$$\left|f_i\left(t,{}^{\nu}x,{}^{\nu}\boldsymbol{z},\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)-\right.$$

$$\left.-f_i\left(t,{}^{\nu}x,\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x),\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)\right|\leqslant M|{}^{\nu}\boldsymbol{v}|$$

et

$$\left|f_i\left(t,{}^{\nu}x,\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x),\frac{z_i(t,{}^{\nu+1}x)-z_i(t,{}^{\nu}x)}{\Delta x}\right)-f_i\left(t,{}^{\nu}x,\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x),\frac{\partial z}{\partial x}(t,{}^{\nu}x)\right)\right|\leqslant M\eta_m,$$

donc

$$\left|d({}^{\nu}v_i)/dt-{}^{\nu}d_i(t)[{}^{\nu+1}v_i(t)-{}^{\nu}v_i(t)]\right|\leqslant M\max_{\nu}|{}^{\nu}\boldsymbol{v}|+M\eta_m .$$

Les hypothèses du lemme 1 étant vérifiées, nous avons (en vertu de ${}^{\nu}\boldsymbol{v}(0)=0$)

$$(83)\qquad |{}^{\nu}\boldsymbol{v}(t)|\leqslant\eta_m(e^{Mt}-1)\quad \text{lorsque}\quad 0\leqslant t\leqslant\tau .$$

Si m est suffisamment grand, on a $\eta_m(e^{Mt}-1)<\varepsilon$ pour $0\leqslant t\leqslant s$; pour chaque $\tau\epsilon(0,\tau_0)$ la relation (81) entraîne (83), donc, selon le lemme 3, $|{}^{\nu}\boldsymbol{v}(t)|\leqslant\eta_m(e^{Mt}-1)$ dans $[0,\tau_0]$. On en conclut que $\tau_0=s$, car dans le

cas où $\tau_0<s$ la solution ${}^{1}\boldsymbol{z},\ldots,{}^{m}\boldsymbol{z}$ dans $[0,\tau_0]$ pourrait-être prolongée à droite. En posant $\varepsilon_m=\eta_m(e^{Ms}-1)$, nous avons donc pour m suffisamment grand

$$|{}^{\nu}\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}(t,{}^{\nu}x)|\leqslant\varepsilon_m\to 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Un exemple. L'hypothèse que f_i est *croissante* par rapport à q_i (resp. l'hypothèse dans le théorème 1 que les racines caractéristiques de $[\partial f_i/\partial q_j]$ sont positives) est *essentielle, s'il s'agit de la convergence du système des courbes* $x={}^{0}x$, $\boldsymbol{z}={}^{0}\boldsymbol{z}(t),\ldots,x={}^{m}x$, $\boldsymbol{z}={}^{m}\boldsymbol{z}(t)$ *vers la surface* $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(t,x)$. Nous en donnons un exemple. Considérons l'équation

$$(84)\qquad \partial z/\partial t=-\partial z/\partial x$$

et la condition initiale

$$z(0,x)=z_0(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}2^{-k2^{\mu}}\cos 2^{2^{\mu}}\pi x,\qquad \text{où}\qquad k\geqslant 3.$$

La fonction $z_0(x)$ est périodique (de période 1) et de la classe C^{k-1}, où la $(k-1)^{\text{ème}}$ dérivée $z_0^{(k-1)}(x)$ est la fonction de Weierstrass sans dérivée.

Le système d'équations différentielles ordinaires correspondant à l'équation (84) est

$$(85)\qquad \frac{d({}^{\nu}z)}{dt}=-\frac{{}^{\nu+1}z-{}^{\nu}z}{\Delta x}=m({}^{\nu}z-{}^{\nu+1}z),\qquad \nu=0,1,\ldots,m-1$$

(${}^{m}z={}^{0}z$) avec les conditions initiales

$$(86)\qquad {}^{\nu}z_m(0)=z_0(\nu/m)=\sum_{\mu=0}^{\infty}2^{-k2^{\mu}}\cos(2^{2^{\mu}}\pi\nu/m),\qquad \nu=0,1,\ldots,m-1.$$

Pour chaque p,

$$\zeta_{\nu}=\exp[mt(1-\exp(p2\pi i/m))+p2\pi i\nu/m],\qquad \nu=0,1,\ldots,m-1$$

est une solution de (85), donc il en est de même avec sa partie réelle

$$\exp\left[mt\left(1-\cos\frac{2\pi}{m}p\right)\right]\cos\left(2\pi p\frac{\nu}{m}-mt\sin\frac{2\pi}{m}p\right).$$

En posant $p=2^{2^{\mu}-1}$, $\mu=1,2,\ldots$, la série

$$(87)\qquad {}^{\nu}z_m(t)=\sum_{\mu=0}^{\infty}2^{-k2^{\mu}}\exp\left[mt\left(1-\cos\frac{\pi}{m}2^{2^{\mu}}\right)\right]\cos\left(2^{2^{\mu}}\pi\frac{\nu}{m}-mt\sin 2^{2^{\mu}}\frac{\pi}{m}\right),$$

$$\nu=0,1,\ldots,m-1,$$

est une solution, car la série des dérivées converge uniformément; cette solution satisfait aux conditions (86).

Le système des courbes $x=0$, $z={}^0z_m(t),\ldots,x=1$, $z={}^mz_m(t)$ ne peut pas converger vers aucune surface car on a

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\min_{\nu}|{}^\nu z_m(t)|=\infty \qquad \text{pour} \qquad t>0 \tag{88}$$ [11]).

En effet, considérons la série (87). Soit $t>0$ et posons $m=2^{2^s}$. On a $\cos(2^{2^\mu}\pi/m)=1$ pour $\mu>s$, donc

$$\Big|\sum_{\mu=s+1}^{\infty}\Big|\leqslant\sum_{\mu=s+1}^{\infty}2^{-k2^\mu}\leqslant 1.$$

Nous avons ensuite $2^{2^\mu}\pi/m=\pi\cdot 2^{2^\mu-2^s}\leqslant 2^{-2^{s-1}}$ pour $\mu<s$, d'où il résulte, si s est suffisamment grand, $1-\cos(2^{2^\mu}\pi/m)\leqslant(2^{2^\mu}\pi/m)^2\leqslant 2^{2^s}\pi^2/m^2=\pi^2/m$, donc

$$\Big|\sum_{\mu=0}^{s-1}\Big|\leqslant\exp\pi^2t.$$

Si $\mu=s$, $|\cos(2^{2^\mu}\pi\nu/m-mt\sin 2^{2^\mu}\pi/m)|=1$, donc la valeur absolue de $s^{\text{ème}}$ membre de la série (87) est égale à

$$2^{-k2^s}\exp(2\cdot 2^{2^s}t),$$

donc pour s suffisamment grand

$$|{}^\nu z_{2^{2^s}}(t)|\geqslant 2^{-k2^s}\exp(2\cdot 2^{2^s}t)-1-\exp\pi^2t,$$

d'où il résulte la relation (88).

Travaux cités

[1] E. Baiada, *Sul teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 12 (1943), 135-145.

[2] M. Cinquini-Cibrario, *Un teorema di esistenza e di unicità per un sistema di equazioni alle derivate parziali*, Annali di Mat. Pura ed Appl., S. IV, 24 (1945), p. 157-175.

[3] — *Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del ordine*, Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Padova 17 (1948), p. 75-96.

[4] R. Conti, *Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma* $z_x^{(i)}=f^{(i)}(x,y;z^{(1)},\ldots,z^{(n)};z_y^{(i)})$, Atti Acad. Naz. dei Lincei 12 (1952), 1° sem., p. 61-65 et 151-155.

[5] J. Hadamard, *Leçons de la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Paris 1905.

[6] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[7] A. Pliś, *Characteristics of non-linear partial differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2(1954), p. 419-422.

[8] J. Szarski, *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), p. 7-25.

[11]) La question se pose s'il suffit pour la convergence en question l'hypothèse d'analycité des valeurs initiales.

[9] T. Ważewski, *Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles*, Ann. Soc. Polon. Math. 15 (1937), p. 101-127.

[10] — *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*, Mathematische Zeitschrift 43 (1938), p. 522-532.

[11] — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 112-166.