# Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications aux équations elliptiques

par W. Pogorzelski (Warszawa)

**1. Introduction.** La recherche des solutions des problèmes aux limites concernant l'équation différentielle du type elliptique de la forme

$$(1) \qquad \Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \partial^2 u/\partial x_\nu^2 = F[x_1, \ldots, x_n, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n]$$

exige des études de la limitation de la fonction de Green et de ses dérivées. Dans le cas $n=2$ cette limitation a été donnée par E. Picard [1] à l'aide de la représentation conforme sur un cercle.

Dans le cas $n=3$ le mathématicien polonais S. Zaremba [7] a démontré que les premières et les secondes dérivées de la fonction de Green, concernant le problème de Dirichlet, vérifient les inégalités de la forme suivante:

$$(2) \qquad |D_1 G(A,B)| < C/r_{AB}^2, \qquad |D_2 G(A,B)| < C'/r_{AB}^3$$

où $C$ et $C'$ sont les constantes positives qui ne dépendent pas des points $A, B$. Les suppositions concernant la surface limitant le domaine, sous lesquelles on a démontré les propriétés (2), étaient assez restrictives.

L'auteur de cet article [2] a démontré les propriétés (2) de la fonction de Green concernant le problème aux limites *mixte* pour $n=3$, en se basant sur les propriétés de l'équation de Fredholm. Mais les suppositions qu'on avait fait étaient aussi restrictives.

Dans le travail présent, nous déduirons les limitations de la fonction de Green et de ses dérivées premières, concernant le problème aux limites *mixte* pour l'équation de Laplace à $n$ variables, en faisant les supposition plus générales. Nous supposons notamment que la surface, qui limite le domaine, vérifie les conditions de Liapounoff.

Nous appliquerons ensuite les propriétés démontrées de la fonction de Green à la résolution du problème aux limites mixte pour l'équation elliptique (1). On fera l'hypothèse plus générale que la fonction donnée $F$ satisfait au condition d'Hölder, par conséquent le problème sera irrésoluble par la méthode classique des approximations successives. Nous résoudrons donc le problème par application du théorème topologique



de J. Schauder [4] sur le point invariant d'une transformation dans l'espace fonctionnel.

Nous signalons que J. Schauder [3] a obtenu une solution „presque partout" du problème aux limites de Dirichlet pour l'équation (1) dans le cas particulier $n=2$, en faisant une supposition encore plus générale que la fonction $F(x,y,u,p,q)$ n'est que *continue*.

**2. Les théorèmes auxiliaires.** Soit dans l'espace euclidien à $n$ dimensions $(n>2)$ un domaine $\Omega$ limité par l'hypersurface fermée $S$. On fera les suppositions suivantes concernant l'hypersurface $S$.

1. L'hypersurface $S$ admet un plan tangent continu en tout point $P$.

2. L'angle $\delta(P,Q)$, que font les normales à la surface $S$ aux deux points arbitraires $P$ et $Q$ de cette surface, vérifie l'inégalité d'Hölder

$$(3) \qquad \delta(P,Q) < C r_{PQ}^{\mu} \qquad (0<\mu\leqslant 1),$$

$r_{PQ}$ désignant la distance des points $P$, $Q$ dans l'espace à $n$ dimensions, $C$ et $\mu$ étant les constantes positives déterminées.

3. Au voisinage de tout point $P$ de la surface $S$ il existe une portion $S_P$ de cette surface assez petite, pour que chaque parallèle à la normale au point $P$ coupe cette portion en un point au plus.

Les conditions citées s'appellent les *conditions de Liapounoff.*

Considérons maintenant au point $P$ un système d'axes $P\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ rectangulaires, dont l'axe $P\xi_1$ est normale à la surface $S$ au point $P$ et les autres axes sont situés dans le plan tangent en $P$ à la surface $S$. D'après la condition troisième, chaque point $Q'(\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n)$ de la projection $S_P'$ de la portion $S_P$ sur le plan tangent en $P$ n'est que la projection d'un seul point $Q(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ de la portion $S_P$. D'après l'existence du plan tangent continu, la coordonnée $\xi_1$ du point $Q$ de la portion $S_P$ est une fonction de coordonnées

$$(4) \qquad \xi_1 = f(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$$

qui admet les dérivées continues dans $S_P'$, en outre, d'après le choix d'axe $P\xi_1$, ces dérivées s'annullent au point $P$

$$(5) \qquad f'_{\xi_\nu}(0,0,\ldots,0) = 0 \qquad (\nu = 2,3,\ldots,n).$$

Soient $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ les angles que fait la normale à la surface $S$ au point $Q(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ avec les axes des coordonnées. Nous avons alors

$$(6) \qquad |\cos\alpha_\nu| = \frac{|\partial\xi_1/\partial\xi_\nu|}{\sqrt{1+\sum_{j=2}^{n}(\partial\xi_1/\partial\xi_j)^2}} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n).$$

Nous pouvons toujours supposer que la portion $S_P$ soit assez petite, pour qu'en tout point $Q$ de cette portion soient vraies les inégalités

$$\tag{7} \tfrac{1}{2} \leqslant \cos\alpha_1 \leqslant 1 .$$

Remarquons maintenant que

$$\tag{8} \cos\alpha_\nu = \sin\alpha_1 \cos\alpha'_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

où $\alpha'_\nu$ désignent les angles que fait avec les axes $P\xi_\nu$ la projection de la normale $QN$ à la surface $S$ sur le plan tangent en $P$. Nous en déduirons, d'après la condition (3) de Liapounoff,

$$\tag{9} |\cos\alpha_\nu| \leqslant \alpha_1 \leqslant C r_{PQ}^{\mu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

et ensuite les inégalités

$$\tag{10} |\partial\xi_1/\partial\xi_\nu| = |\cos\alpha_\nu/\cos\alpha_1| \leqslant 2 C r_{PQ}^{\mu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

satisfaites en tout point $Q$ de la portion $S_P$. En appliquant le théorème des accroissements, nous avons

$$\tag{11} \xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{\nu=2}^{n} \xi'_{1\xi_\nu}(\theta\xi_2, \theta\xi_3, \ldots, \theta\xi_n)\xi_\nu \qquad (0 < \theta < 1)$$

ensuite il existe une constante positive $k$, telle que

$$1 \leqslant r_{PQ}/r_{PQ'} \leqslant k .$$

Nous en concluons, d'après les inégalités (10), que la fonction $\xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ satisfait dans $S'_P$ à l'inégalité

$$\tag{12} |\xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)| \leqslant 2(n-1) C k^{\mu} r_{PQ}^{\mu+1} .$$

Il en résulte que le cosinus de l'angle $\nu_{PQ}$, que fait le vecteur $\boldsymbol{r}_{PQ}$ avec la normale au point $P$ de la surface $S$ dirigée vers l'intérieur du domaine $\Omega$, vérifie l'inégalité

$$\tag{13} |\cos\nu_{PQ}| = |\xi_1/r_{PQ}| \leqslant 2(n-1) C k^{\mu} r_{PQ}^{\mu} .$$

Pour obtenir l'inégalité analogue, concernant l'angle $\nu_{QP}$, que fait le vecteur $\boldsymbol{r}_{PQ}$ avec la normale au point $Q$, remarquons qu'on a

$$|\cos\nu_{QP}| = \Big|\sum_{j=1}^{n} (\xi_j/r_{PQ}) \cos\alpha_j\Big| \leqslant \sum_{j=2}^{n} |\cos\alpha_j| + |\xi_1/r_{PQ}| ,$$

donc, d'après les inégalités (9) et (13), nous avons

$$\tag{14} |\cos\nu_{QP}| \leqslant (n-1) C (2k^{\mu}+1) r_{PQ}^{\mu} .$$



Les inégalités (13) et (14) seront utilisées dans la limitation de la solution d'une équation intégrale du problème mixte.

Théorème I. *Si $\psi(P)$ est une fonction intégrable, déterminée sur l'hypersurface $S$, satisfaisant aux conditions de Liapounoff, les fonctions $J_1(P)$ et $J_2(P)$ déterminées sur la surface $S$ par les intégrales*[1])

$$\tag{15} J_1(P) = \iint\limits_S \frac{\cos\nu_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}} \psi(Q)\, d\sigma_Q , \qquad J_2(P) = \iint\limits_S \frac{\psi(Q)}{r_{PQ}^{n-2}}\, d\sigma_Q$$

*vérifient les conditions suivantes d'Hölder:*

$$\tag{16} |J_1(P) - J_1(P_1)| < k_1 M_\psi r_{PP_1}^{\mu-\varepsilon} , \qquad |J_2(P) - J_2(P_1)| \leqslant k_2 M_\psi r_{PP_1}^{1-\varepsilon}$$

*où $\varepsilon$ est un nombre positif arbitraire, plus petit que $\mu$, $M_\psi$ désigne la borne supérieure de la fonction $|\psi(P)|$, $k_1$ et $k_2$ sont les constantes positives ne dépendant que de la surface $S$ et de $\varepsilon$.*

Soit $\delta$ le nombre positif suffisamment petit, pour que la sphère $K$ de rayon $\delta$ et de centre au point *arbitraire* $P$ de la surface $S$ découpe de cette surface une portion $\Sigma$, située à l'intérieur de la sphère $K$, qui vérifie la troisième condition de Liapounoff.

Il suffit de démontrer la propriété (16) sous la supposition, que le point $P_1$ est situé dans la portion $\Sigma$ si près du point $P$, pour que la sphère $K_1$ de centre en $P$ et de rayon $2r_{PP_1}$ soit située à l'intérieur de la sphère $K$. Décomposons maintenant les intégrales $J_1(P)$ et $J_1(P_1)$ en trois parties

$$\tag{17} \begin{aligned} J_1(P) &= J_1^{\Sigma_1}(P) + J_1^{\Sigma_2}(P) + J_1^{S-\Sigma}(P) , \\ J_1(P_1) &= J_1^{\Sigma_1}(P_1) + J_1^{\Sigma_2}(P_1) + J_1^{S-\Sigma}(P_1) \end{aligned}$$

étendues aux trois surfaces $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $S-\Sigma$, où $\Sigma_1$ est la partie de la surface $\Sigma$, située à l'intérieur de la sphère $K_1$, $\Sigma_2$ — partie de $\Sigma$ à l'extérieur de $K_1$, $S-\Sigma$ — partie de la surface $S$, située à l'extérieur de la sphère $K$.

D'après l'inégalité (13), nous avons

$$|J_1^{\Sigma_1}(P)| = \Big|\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\cos\nu_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}} \psi(Q)\, d\sigma_Q\Big| \leqslant 2(n-1) C k^{\mu} M_\psi \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1-\mu}} .$$

En appliquant maintenant une transformation homothétique, qui amène la sphère $K_1$ de rayon $2r_{PP_1}$ à la sphère $K'_1$ de rayon unitaire, nous obtenons

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1-\mu}} = 2^{\mu} r_{PP_1}^{\mu} \iint\limits_{\Sigma'_1} \frac{d\sigma_{Q'}}{r_{PQ'}^{n-1-\mu}} .$$

[1]) Nous conservons le signe de l'intégrale double pour l'intégrale étendue à la surface à $(n-1)$ dimensions dans l'espace à $n$ dimensions.

En amenant l'intégrale obtenue à la projection de la surface $\Sigma_1'$ sur le plan tangent en $P$ et remarquant qu'on a $\cos\alpha_1 > \frac{1}{2}$, nous concluons que cette intégrale est bornée pour tout point $P$.

Donc l'intégrale $J_1^{\Sigma_1}(P)$ vérifie l'inégalité

$$|J_1^{\Sigma_1}(P)| \leqslant C_1 M_\psi r_{PP_1}^\mu \quad (\mu \leqslant 1)\,, \tag{18}$$

$C_1$ est une constante positive déterminée, qu'on peut choisir de façon que l'intégrale $J_1^{\Sigma_1}(P_1)$ vérifie la même inégalité.

Nous allons étudier maintenant la différence des secondes parties

$$J_1^{\Sigma_2}(P) - J_1^{\Sigma_2}(P_1) = \iint\limits_{\Sigma_2} \left(\frac{\cos\nu_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}} - \frac{\cos\nu_{P_1Q}}{r_{P_1Q}^{n-1}}\right)\psi(Q)\,d\sigma_Q \tag{19}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\cos\nu_{PQ} - \cos\nu_{P_1Q}}{r_{P_1Q}^{n-1}}\psi(Q)\,d\sigma_Q + \iint\limits_{\Sigma_2}\left(\frac{1}{r_{PQ}^{n-1}} - \frac{1}{r_{P_1Q}^{n-1}}\right)\cos\nu_{PQ}\cdot\psi(Q)\,d\sigma_Q.$$

En désignant par $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n)$ les coordonnées du point $P_1$, par $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — les coordonnées du point $Q$ dans $\Sigma_2$ par rapport au système d'axes rectangulaires avec l'axe $P\xi_1$ normale intérieur à la surface $S$ et par $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ les cosinus directeurs de la normale au point $P_1$, nous aurons

$$\cos\nu_{P_1Q} - \cos\nu_{PQ} = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \frac{\xi_j - \bar{\xi}_j}{r_{P_1Q}} - \frac{\xi_1}{r_{PQ}}$$

d'où

$$|\cos\nu_{P_1Q} - \cos\nu_{PQ}| \leqslant \sum_{j=2}^{n} |\bar{a}_j| + \left|\frac{\xi_1}{r_{PQ}} - \frac{\xi_1 - \bar{\xi}_1}{r_{P_1Q}}\right| + |\bar{a}_1 - 1|.$$

D'après l'inégalité de Liapounoff et les inégalités (9), nous aurons $|\bar{a}_j| \leqslant C r_{PP_1}^\mu$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$, $|\bar{a}_1 - 1| \leqslant \frac{1}{2}C^2 r_{PP_1}^{2\mu}$ et ensuite

$$\left|\frac{\xi_1}{r_{PQ}} - \frac{\xi_1 - \bar{\xi}_1}{r_{P_1Q}}\right| \leqslant |\xi_1| \frac{|r_{P_1Q} - r_{PQ}|}{r_{PQ}\, r_{P_1Q}} + \frac{|\bar{\xi}_1|}{r_{P_1Q}}.$$

En appliquant les inégalités

$$|\xi_1| \leqslant 2(n-1)Ck^\mu r_{PQ}^{\mu+1}, \qquad |\bar{\xi}_1| \leqslant 2(n-1)Ck^\mu r_{P_1P}^{\mu+1},$$
$$\tfrac{2}{3} \leqslant r_{PQ}/r_{P_1Q} \leqslant 2\,, \qquad |r_{P_1Q} - r_{PQ}| \leqslant r_{PP_1}, \tag{20}$$

nous aurons donc

$$|\cos\nu_{PQ} - \cos\nu_{P_1Q}|$$
$$\leqslant (n-1)Cr_{PP_1}^\mu + \tfrac{1}{2}C^2 r_{PP_1}^{2\mu} + 4(n-1)Ck^\mu r_{PP_1}/r_{PQ}^{1-\mu} + 4(n-1)Ck^\mu r_{PP_1}^{\mu+1}/r_{PQ}$$



lorsque $Q \in \Sigma_2$. Il en résulte

$$\left|\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\cos\nu_{PQ} - \cos\nu_{P_1Q}}{r_{P_1Q}^{n-1}}\psi(Q)\,d\sigma_Q\right| \leqslant 2^{n-1}CM_\psi[n-1+\tfrac{1}{2}Cr_{PP_1}^\mu]r_{PP_1}^\mu \iint\limits_{\Sigma_2}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1}} +$$
$$+2^{n+1}(n-1)Ck^\mu M_\psi r_{P_1P}\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-\mu}} + 2^{n+1}(n-1)Ck^\mu r_{PP_1}^{\mu+1}M_\psi \iint\limits_{\Sigma_2}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n}}.$$

En projetant la surface $\Sigma_2$ sur le plan tangent en $P$, nous allons voir que la première intégrale de la somme à droite est comparable à $|\log r_{PP_1}|$ si $P_1 \to P$, la seconde intégrale est comparable à $1/r_{P_1P}^{1-\mu}$, si $\mu < 1$, la troisième intégrale est comparable à $1/r_{PP_1}$, si $P_1 \to P$. Nous en concluons l'inégalité suivante:

$$\left|\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\cos\nu_{PQ} - \cos\nu_{P_1Q}}{r_{P_1Q}^{n-1}}\psi(Q)\,d\sigma_Q\right| \leqslant C_2 M_\psi r_{PP_1}^{\mu-\varepsilon} \tag{21}$$

où $C_2$ est une constante positive, indépendante de la fonction $\psi$ et $\varepsilon$ — un nombre positif arbitraire, inférieur à $\mu$.

En raisonnant d'une façon pareille et en appliquant les inégalités (13), (20), nous obtiendrons pour la seconde intégrale de la différence (19) l'inégalité

$$\left|\iint\limits_{\Sigma_2}\left(\frac{1}{r_{PQ}^{n-1}} - \frac{1}{r_{P_1Q}^{n-1}}\right)\cos\nu_{PQ}\psi(Q)\,d\sigma_Q\right| \leqslant 2(n-1)Ck^\mu M_\psi(3^n - 2^n)r_{PP_1}\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-\mu}} \tag{22}$$

d'où résulte une limitation de la même forme que (21). En réunissant les résultats (21) et (22) nous aurons l'inégalité

$$|J_1^{\Sigma_2}(P) - J_1^{\Sigma_2}(P_1)| \leqslant C_2' M_\psi r_{PP_1}^{\mu-\varepsilon}, \tag{23}$$

$C_2'$ étant une constante positive indépendante de $\psi$. Il reste à étudier la différence des troisièmes intégrales dans la somme (17) que nous décomposons en deux parties, de même que la différence (19). Pour la seconde partie, d'après les inégalités (20) et la propriété $r_{PQ} \geqslant \delta$, on aura tout de suite

$$\left|\iint\limits_{S-\Sigma}\left(\frac{1}{r_{PQ}^{n-1}} - \frac{1}{r_{P_1Q}^{n-1}}\right)\cos\nu_{PQ}\cdot\psi(Q)\,d\sigma_Q\right| \tag{24}$$
$$\leqslant M_\psi \iint\limits_{S-\Sigma}\frac{|r_{PQ}^{n-1} - r_{P_1Q}^{n-1}|}{r_{PQ}^{n-1}r_{P_1Q}^{n-1}}\,d\sigma_Q \leqslant (3^n - 2^n)M_\psi \frac{A}{\delta^n} r_{PP_1},$$

$A$ désignant l'aire de la surface $S$.

Pour limiter la première partie, désignons par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ les cosinus directeurs (par rapport au système $P\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$) du vecteur $\boldsymbol{r}_{P_1Q}$ et par $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — les cosinus directeurs de la normale à la surface $S$ au point $P_1$. Nous aurons alors

$$|\cos\nu_{PQ}-\cos\nu_{P_1Q}| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \cos\nu_{PQ}\Big|$$
$$\leqslant \sum_{j=2}^{n}|b_j| + |a_1-\cos\nu_{PQ}| + |b_1-1| \leqslant \sum_{j=2}^{n}|b_j| + |b_1-1| + |\theta^Q|$$

où $\theta^Q$ désigne l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{r}_{PQ}$ et $\boldsymbol{r}_{P_1Q}$. Or cet angle atteint son maximum en un point de la surface de la sphère $K$ de rayon $\delta$ et nous avons

$$\lim_{P_1\to P}\theta^Q_{\max}/r_{PP_1} = 1/\delta.$$

En réunissant cette propriété avec les propriétés (3), (9), nous aurons l'inégalité

$$|\cos\nu_{PQ}-\cos\nu_{P_1Q}| \leqslant Br^{\mu}_{PP_1} \tag{25}$$

($B$ est une constante positive) vraie pour les points $Q$ dans la partie $S-\Sigma$, donc

$$\Big|\iint_{S-\Sigma}\frac{\cos\nu_{PQ}-\cos\nu_{P_1Q}}{r^{n-1}_{P_1Q}}\psi(Q)\,d\sigma_Q\Big| \tag{26}$$
$$\leqslant 2^{n-1}BM_\psi r^{\mu}_{P_1P_2}\iint_{S-\Sigma}\frac{d\sigma_Q}{r^{n-1}_{PQ}} \leqslant \frac{2^{n-1}ABM_\psi}{\delta^{n-1}} r^{\mu}_{P_1P_2} \qquad (\mu\leqslant 1).$$

En réunissant les inégalités (18), (23), (24), (26), on arrivera finalement à la première des inégalités (16). On démontrera la limitation de la seconde intégrale $J_2(P)$ d'une façon analogue et d'ailleurs plus facile.

La propriété (16) de l'intégrale $J_1(P)$ a été démontrée pour la première fois par Liapounoff dans le cas $n=3$; la démonstration de cette propriété donnée par Smirnoff [6] est différente de la notre.

THÉORÈME II. *Il existe une constante positive $K$ telle que l'inégalité*

$$\iint_S\Big|\frac{d(1/r^{n-2}_{AQ})}{dn_Q}\Big|\,d\sigma_Q = (n-2)\iint_S\Big|\frac{\cos\nu_{QA}}{r^{n-1}_{AQ}}\Big|\,d\sigma_Q < K \tag{27}$$

*soit satisfaite en tout point $A$ de l'ensemble $\Omega+S$ ($\nu_{QA}$ désigne l'angle entre le vecteur* $\boldsymbol{QA}$ *et la normale à la surface $S$ au point $Q$).*

Le théorème est évident pour la surface convexe, puisqu'alors la seconde intégrale (27) est égale à l'aire de la surface d'une hypersphère



de rayon unité où bien à sa moitié. Le théorème est aussi évidemment vrai pour la surface composée d'un nombre fini de parties convexes ou planes. Il y a des auteurs qui admettent, dans la théorie du potentiel, la propriété (27) comme une supposition sans démonstration. Nous allons démontrer que la *propriété* (27) *est vraie pour la surface $S$ satisfaisant aux conditions de Liapounoff*. Nous ne savons pas qui a donné, le premier, la preuve du théorème (27); on trouve une démonstration pour le cas $n=3$ dans le travail de Schauder [5], mais pas complète. La démonstration que nous donnerons pour $n$ arbitraire sera un peu différente.

Soit un point arbitraire $A$ à l'intérieur du domaine $\Omega$ et le point correspondant $P$ de la surface $S$ où la distance $r_{AQ}$ entre le point variable $Q$ de la surface $S$ atteint sa borne inférieure. Le point $A$ est donc situé sur la normale à la surface $S$ au point $P$.

Considérons maintenant le système rectangulaire d'axes $Px_1x_2\ldots x_n$ où l'axe $Px_1$ est normale à la surface $S$, dirigée vers le domaine $\Omega$, et les axes $Px_2, \ldots, Px_n$ sont situés dans le plan tangent à la surface $S$ au point $P$. Soient $(x_1, 0, 0, \ldots, 0)$ les coordonnées du point $A$ et $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées du point $Q$ de la surface $S$. On sait que dans la partie suffisamment petite $\Sigma$ de la surface $S$, contenant le point $P$, la fonction $\xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ vérifie l'inégalité

$$|\xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)| \leqslant 2(n-1)Ck^{\mu}r^{\mu+1}_{PQ} \leqslant 2(n-1)Ck^{2\mu+1}\varrho^{\mu+1} \tag{28}$$

où $\varrho = (\sum_{j=2}^{n}\xi_j^2)^{1/2}$ désigne la distance entre le point $P$ et la projection $Q'$ du point $Q$ sur le plan $(Px_2\ldots x_n)$. D'après l'inégalité (28), il existe un nombre positif $\delta_1$ indépendant de $A$ et suffisamment petit, pour que la sphère à $n-1$ dimensions $C'_*$ de rayon $\delta_1$ et centre $P$, située dans le plan tangent $(Px_2, \ldots, x_n)$, soit la projection d'une telle partie $C_*$ de la surface $\Sigma$, que tous ses points avec le bord satisfassent à l'inégalité

$$|\xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)| < \tfrac{1}{2}\varrho. \tag{29}$$

Remarquons maintenant que dans le triangle $AQQ'$ est vraie l'inégalité

$$r_{AQ} \geqslant r_{AQ'} - |\xi_1| > \varrho - |\xi_1| \tag{30}$$

donc en tout point $Q\in C_*$ nous avons

$$\frac{1}{r_{AQ}} \leqslant \frac{1}{r_{AQ'}}\cdot\frac{1}{1-|\xi_1|/r_{AQ'}} \leqslant \frac{1}{r_{AQ'}}\cdot\frac{1}{1-|\xi_1|/\varrho} \leqslant \frac{2}{r_{AQ'}}. \tag{31}$$

Nous avons ensuite

$$\cos\nu_{QA} = \sum_{j=2}^{n} \cos a_j \frac{\xi_j}{r_{AQ}} + \cos a_1 \frac{\xi_1 - x_1}{r_{AQ}},$$

$$|\cos\nu_{QA}| \leqslant \sum_{j=2}^{n} |\cos a_j| + \frac{|\xi_1|}{\varrho} + \frac{x_1}{r_{AQ}}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent les angles que fait la normale au point $Q$ avec les axes des coordonnées.

En appliquant maintenant les inégalités (9) et (12), on obtient

$$(32) \qquad |\cos\nu_{QA}| \leqslant (n-1)Ck^{\mu}(1+2k^{\mu+1})\varrho^{\mu} + \frac{x_1}{r_{AQ}} \quad \text{si} \quad Q \epsilon C_*.$$

Pour démontrer le théorème (27), nous commençons par prouver que l'intégrale étendue à la surface $C_*$ est bornée si petite que soit la distance $\xi_1 = r_{AP}$. En appliquant les inégalités (31) et (32), nous pouvons écrire

$$\iint\limits_{C_*} \left| \frac{\cos\nu_{QA}}{r_{AQ}^{n-1}} \right| d\sigma_Q \leqslant (n-1)Ck^{\mu}(1+2k^{\mu+1}) \iint\limits_{C_*} \frac{\varrho^{\mu} d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-1}} + 2^n x_1 \iint\limits_{C_*} \frac{d\sigma_Q}{r_{AQ'}^{n}}$$

et, en tenant compte de l'inégalité $\cos a_1 > \frac{1}{2}$, nous aurons

(33)

$$\iint\limits_{C_*} \left| \frac{\cos\nu_{QA}}{r_{AQ}^{n-1}} \right| d\sigma_Q \leqslant 2(n-1)Ck^{\mu}(1+2k^{\mu+1}) \iint\limits_{C'_*} \frac{d\sigma_{Q'}}{\varrho^{n-1-\mu}} + 2^{n+1} x_1 \iint\limits_{C'_*} \frac{d\sigma_{Q'}}{(\varrho^2 + x_1^2)^{n/2}}.$$

Or les intégrales

$$\iint\limits_{C'_*} \frac{d\sigma_{Q'}}{\varrho^{n-1-\mu}} = \omega_{n-1} \int_0^{\delta_1} \frac{d\varrho}{\varrho^{1-\mu}} = \frac{\omega_{n-1}}{\mu} \delta_1^{\mu}, \qquad \omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)},$$

$$x_1 \iint\limits_{C'_*} \frac{d\sigma_{Q'}}{(\varrho^2 + x_1^2)^{n/2}} = x_1 \omega_{n-1} \int_0^{\delta_1} \frac{\varrho^{n-2} d\varrho}{(\varrho^2 + x_1^2)^{n/2}} = \omega_{n-1} \int_0^{\delta_1/x_1} \frac{t^{n-2} dt}{(t^2+1)^{n/2}}$$

sont bornées si $x_1 \to 0$; nous en concluons que l'intégrale (33) est bornée pour toute la valeur positive de $x_1$. L'étude de l'intégrale étendue à la partie extérieure $S - C_*$ est plus facile. Dans le cas $x_1 \geqslant \delta_1/2$ nous avons notamment

$$\iint\limits_{S-C_*} \frac{|\cos\nu_{QA}|}{r_{QA}^{n-1}} d\sigma_Q \leqslant 2^{n-1} \iint\limits_{S-C_*} \frac{d\sigma_Q}{\delta_1^{n-1}} < \frac{2^{n-1}|S|}{\delta_1^{n-1}},$$



$|S|$ désignant la mesure de la surface $S$. Si $x_1 < \delta_1/2$ on a $r_{AQ}/r_{PQ} > \frac{1}{2}$ et nous pouvons écrire

$$\iint\limits_{S-C_*} \frac{|\cos\nu_{QA}|}{r_{AQ}^{n-1}} d\sigma_Q < 2^{n-1} \iint\limits_{S-C_*} \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1}} < 2^{n-1} \iint\limits_{S-C_*} \frac{d\sigma_Q}{\delta_1^{n-1}} < \frac{2^{n-1}|S|}{\delta_1^{n-1}}.$$

Il en résulte que l'intégrale proposée (27) est bornée pour toute valeur positive de $x_1$. D'après l'inégalité (14), cette intégrale est aussi évidemment bornée si le point $A$ coïncide avec le point $P$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

**3. Les propriétés d'une fonction de Green.** On appelle la *fonction de Green*, concernant le problème mixte pour l'équation de Laplace dans le domaine à $n$ dimensions $\Omega$, limité par la surface $S$, la fonction $G(A,B)$ de couples $A$, $B$ de points intérieurs du domaine $\Omega$ définie par les propriétés suivantes:

I. La fonction $G(A,B)$ est la somme des deux fonctions

$$(34) \qquad G(A,B) = 1/r_{AB}^{n-2} + H(A,B)$$

dont la première est la solution fondamentale de l'équation de Laplace, admettant une singularité, si $A \to B$, la seconde $H(A,B)$ est une fonction harmonique en tout point $A$ du domaine $\Omega$, même si le point $A$ coïncide avec le point intérieur $B$.

II. Si le point $A$ tend vers le point arbitraire $P$ de la surface $S$ et le point $B$ est à l'intérieur du domaine $\Omega$, alors la dérivée de la fonction de Green au point $A$ dans la direction de la normale au point $P$ et la fonction de Green elle-même tendent vers les valeurs limites vérifiant l'égalité

$$(35) \qquad \lim_{A \to P} [dG(A,B)/dn_P] + a(P)G(P,B) = 0$$

où $a(P)$ est une fonction donnée, définie en tout point $P$ de la surface $S$ et vérifiant la condition d'Hölder

$$(36) \qquad |a(P) - a(P_1)| \leqslant \text{const} \cdot r_{PP_1}^{\mu_1}.$$

D'après la condition (35), la composante régulière $H(A,B)$ de la fonction de Green est une fonction harmonique en tout point $A$ du domaine $\Omega$, qui satisfait à la condition suivante aux limites:

$$(37) \quad \lim_{A \to P} \left[ \frac{dH(A,B)}{dn_P} + a(P)H(A,B) \right] = -\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{PB}^{n-2}}\right) - a(P)\frac{1}{r_{PB}^{n-2}}.$$

La fonction $H(A,B)$, où le point intérieur $B$ joue un rôle de paramètre est donc une solution du problème mixte, bien connue pour l'équation de Laplace. Cette fonction s'exprime par le potentiel de la simple couche

$$H(A,B)=\iint_S \frac{\psi(Q,B)}{r_{AQ}^{n-2}}\,d\sigma_Q \tag{38}$$

dont la densité $\psi(Q,B)$ est une solution de l'équation intégrale de la forme

$$\psi(P,B)=f(P,B)+\lambda\iint_S N(P,Q)\psi(Q,B)\,d\sigma_Q \tag{39}$$

où l'on a posé

$$\begin{gathered} f(P,B)=\frac{2}{(n-2)\omega_n}\cdot\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{r_{PB}^{n-2}}\right)+\frac{2}{(n-2)\,\omega_n}\,a(P)\,\frac{1}{r_{PB}^{n-2}}, \\ \lambda=\frac{2}{\omega_n}, \qquad N(P,Q)=\frac{\cos\nu_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}}+\frac{a(P)}{(n-2)\,r_{PQ}^{n-2}}. \end{gathered} \tag{40}$$

Le point intérieur $B$ dans l'équation (39) joue un rôle de paramètre constant et $\omega_n$ désigne l'aire de la surface sphérique dans l'espace à $n$ dimensions de rayon unité

$$\omega_n=\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}. \tag{41}$$

Soit l'équation $p-1$ fois itérée de l'équation (39)

$$\psi(P,B)=f_1(P,B)+\lambda\iint_S N_p(P,Q)\psi(Q,B)\,d\sigma_Q \tag{42}$$

où

$$f_1(P,B)=f(P,B)+\iint_S \sum_{j=1}^{p-1}\lambda^j N_j(P,Q)f(Q,B)\,d\sigma_A \tag{43}$$

dont le noyau $N_p(P,Q)$ est borné et qui est équivalente à l'équation donnée (39).

Si $\lambda=2/\omega_n$ n'est pas une valeur propre du noyau $N_p$ (par exemple dans le cas $a<0$), la solution unique de l'équation (42) et de l'équation (39) prend la forme

$$\psi(P,B)=f_1(P,B)+\lambda\iint_S \mathfrak{N}(P,Q)f_1(Q,B)\,d\sigma_Q \tag{44}$$

où $\mathfrak{N}$ est le noyau résolvant du noyau $N_p$.

Quoique la fonction $H(A,B)$ est régulière pour tous les points $A$ et $B$ à l'intérieur du domaine $\Omega$, *elle ne reste pas bornée, si les points $A$ et $B$ tendent vers le même point $P$ de la surface limite $S$.*



Nous allons donc chercher la limitation de la fonction $H(A,B)$ et de ses premières dérivées, vraie pour toute position des points $A$, $B$ dans $\Omega$.

Dans ce but nous démontrerons d'abord les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *L'intégrale de la valeur absolue de la densité $\psi(P,B)$, de laquelle dérive la composante régulière* (38) *de la fonction de Green, est bornée, c'est-à-dire vérifie l'inégalité*

$$\iint_S |\psi(P,B)|\,d\sigma_P\leqslant q \tag{45}$$

*pour toute position du point $B$ à l'intérieur du domaine $\Omega$, où $q$ est une constante positive fixée.*

Cette propriété est une conséquence du théorème II sur l'intégrale (27) qui est bornée quelque soit la position du point $B$ dans l'ensemble fermé $\Omega+S$.

Il en résulte, d'après les égalités (40), que les intégrales

$$\iint_S |f(P,B)|\,d\sigma_P, \qquad \iint_S |N(P,Q)|\,d\sigma_P \tag{46}$$

sont bornées et par conséquent, d'après la formule (43), l'intégrale

$$\iint_S |f_1(P,B)|\,d\sigma_P$$

est aussi bornée. Il existe donc, d'après la solution de Fredholm (44), une constante positive $q$ telle que l'inégalité (45) soit vérifiée pour tout point $B$ dans $\Omega$.

LEMME 2. *Si la fonction $a(P)$ satisfait à la condition d'Hölder à l'exposant $\mu_1\leqslant 1$, la solution $\psi(P,B)$ de l'équation de Fredholm* (44) *satisfait à la condition d'Hölder à l'exposant $h$ arbitrairement inférieur au plus petit des deux nombres $(\mu,\mu_1)$.*

*En outre dans toute partie $\Delta$ de la surface $S$, vérifiant la troisième condition de Liapounoff, l'inégalité d'Hölder peut être écrite sous la forme*

$$|\psi(P,B)-\psi(P_1,B)|\leqslant[k_f(B)+l\,m_\psi(B)+l']\,r_{PP_1}^h \tag{47}$$

*où $k_f(B)$ est le coefficient d'Hölder de la fonction $f(P,B)$ dans la partie $\Delta$, dépendant du point $B$, $m_\psi(B)$ est la borne supérieure de la fonction $|\psi(P,B)|$ dans $\Delta$, dépendant aussi du point $B$, enfin $l$ et $l'$ sont des constantes positives indépendantes du point $B$.*

Pour démontrer ce lemme, remarquons que la fonction $\psi(A,B)$, étant une solution de l'équation de Fredholm (42) représentée par la formule (44), est une fonction continue du point $P$ quel que soit $B\in\Omega$. Il en résulte, d'après le théorème auxiliaire de la page 49, que l'intégrale se trouvant du côté droit de l'équation (39) vérifie la condition d'Hölder, en tout point $P$ de la surface $S$, à l'exposant $h$ égal au nombre positif arbitraire inférieur au plus petit des deux nombres $(\mu, \mu_1)$. La fonction

$$f(P,B) = \frac{2}{\omega_n} \cdot \frac{\cos \nu_{PB}}{r_{PB}^{n-1}} + \frac{2}{\omega_n(n-2)}\, a(P) \frac{1}{r_{PB}^{n-2}} \tag{48}$$

d'après les résultats des considérations précédentes sur l'intégrale $J_1^{S-\Sigma}(P)$, exprimés par les inégalités (25), (26), satisfait aussi à la condition d'Hölder à l'exposant $h$, d'où nous concluons, remarque faite sur l'équation (39), que la fonction $\psi(P,B)$ vérifie la condition d'Hölder (par rapport au point $P$) à l'exposant $h$.

Nous montrerons maintenant que cette condition d'Hölder dans une partie $\Delta$ de la surface $S$ peut être écrite sous la forme (47). Le premier composant $k_f(B)$ du coefficient d'Hölder est évident; pour motiver les deux autres termes, il suffit d'appliquer certaines parties de la démonstration du premier théorème auxiliaire. Décomposons donc l'intégrale dans l'équation (39) en deux parties

$$\iint_{\Delta} N(P,Q)\psi(Q,B)\,d\sigma_Q + \iint_{S-\Delta} N(P,Q)\psi(Q,B)\,d\sigma_Q \,. \tag{49}$$

D'après les résultats des études des intégrales $J_1^{\Sigma_1}$ et $J_1^{\Sigma_2}$, exprimés par les inégalités (18) et (23), le premier terme de la somme (49) satisfait à la condition d'Hölder à l'exposant $h$ et au coefficient $l m_\psi(B)$, où $m_\psi(B)$ est la borne supérieure de la fonction $|\psi(Q,B)|$ sur la surface $\Delta$, dépendant du point $B$. Enfin, d'après les études de l'intégrale $J_1^{S-\Sigma}$, la borne supérieure des intégrales (24) et (26) ne dépend que de l'intégrale $\iint_S |\psi|\,d\sigma$, donc le second terme (49) vérifie aussi la condition d'Hölder à l'exposant $h$ et au coefficient $l'$, contenant comme facteur la borne de l'intégrale

$$\iint_S |\psi(P,B)|\,d\sigma_P \,.$$

Par conséquent ce coefficient $l'$ est une constante positive indépendante de $B$, c. q. f. d.

Le lemme démontré nous permet ensuite de démontrer les suivantes propriétés essentielles de la partie régulière $H(A,B)$ de la fonction de Green.

THÉORÈME. *La partie régulière $H(A,B)$ de la fonction de Green pour le problème mixte et ses dérivées premières ont les valeurs limites à la surface $S$ déterminées (si le point $B$ reste fixe à l'intérieur du domaine $\Omega$) et vérifient les inégalités*



$$|H(A,B)| \leqslant C_1/r_{AB}^{n-2}, \qquad |DH(A,B)| \leqslant C_2/r_{AB}^{n-h} \tag{50}$$

*pour tous les deux points différents $A$ et $B$ à l'intérieur du domaine $\Omega$, où les constantes positives $C_1$ et $C_2$ ne dépendent que de la surface $S$ et de la fonction $a(P)$ (en outre de la constante $h$ choisie).*

Soient deux points arbitraires et différents $A$, $B$ à l'intérieur du domaine $\Omega$. La distance $r_{AQ}$ entre le point $A$ et le point variable $Q$ de la surface $S$ étant une fonction continue, elle atteint sa borne inférieure en un point déterminé $P$ de la surface $S$ (Fig. 1). La sphère $T$ de centre $A$ et de rayon $r_{AP}$ est donc située à l'intérieur du domaine $\Omega$ et est tangente à la surface $S$ au point $P$.

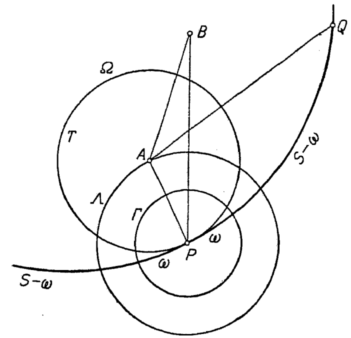

Fig. 1

Soit maintenant une sphère $\Lambda$ de centre $P$ et de rayon $r_{AP}$. Nous considérons deux cas possibles: 1° le point $B$ est situé à l'intérieur ou sur la surface de la sphère $\Lambda$, 2° le point $B$ est extérieur à la sphère $\Lambda$.

Dans le permier cas, $r_{AP}$ étant la distance la plus courte entre le point $A$ et les points de la surface $S$, nous pouvons écrire l'inégalité

$$|H(A,B)| = \left| \iint_S \frac{\psi(Q,B)}{r_{AQ}^{n-2}}\,d\sigma_Q \right| \leqslant \frac{1}{r_{AP}^{n-2}} \iint_S |\psi(Q,B)|\,d\sigma_Q \,. \tag{51}$$

D'où, d'après la propriété (45), nous aurons

$$|H(A,B)| \leqslant q/r_{AP}^{n-2} \tag{52}$$

pour tout point $B$ du domaine $\Omega$. Le point $B$ se trouvant à l'intérieur ou sur la surface de la sphère $\Lambda$, nous avons $r_{AP}/r_{AB} \geqslant \frac{1}{2}$, donc dans ce cas la fonction $H$ vérifie l'inégalité

$$|H(A,B)| \leqslant 2^{n-2} q/r_{AB}^{n-2}. \tag{53}$$

Dans le second cas, quand le point $B$ est extérieur à la sphère $\Lambda$, considérons une sphère $\Gamma$ de centre $P$ et de rayon $\delta r_{PB}/L$, où $L$ désigne le diamètre du domaine $\Omega$ et $\delta$ — un nombre positif défini à la page 49. Cette sphère découpe de la surface $S$ une portion $\omega$ pour laquelle s'applique la troisième supposition de Liapounoff (p. 47).

Décomposons maintenant l'intégrale (38), exprimant la fonction $H(A,B)$, en deux parties suivantes:

$$(54)\qquad H(A,B)=\iint\limits_{S}\frac{\psi(Q,B)}{r_{AQ}^{n-2}}\,d\sigma_Q=H^{(\omega)}(A,B)+H^{(S-\omega)}(A,B)$$

étendues à la surface $\omega$ et à la surface $S-\omega$ extérieure à la sphère $\Gamma$. Dans le cas étudié, le point $B$ est extérieur à la sphère $\Lambda$ et le point $Q$ n'est pas intérieur à la sphère $T$, donc nous avons les inégalités

$$(55)\qquad r_{AQ}/r_{PQ}\geqslant\tfrac{1}{2},\qquad r_{AB}/r_{PB}<2.$$

Remarquons, d'après les formules (42) et (44), qu'il existe une constante positive $q'$, indépendante du point $B$, telle que la fonction $\psi(Q,B)$ dans l'ensemble $\omega$ vérifie l'inégalité $|\psi(Q,B)|<q'/r_{QB}^{n-1}$. Il en résulte que le terme $H^{(\omega)}(A,B)$ satisfait à l'inégalité

$$|H^{(\omega)}(A,B)|<q'\iint\limits_{\omega}\frac{d\sigma_Q}{r_{AQ}^{n-2}r_{QB}^{n-1}}<2^{n-2}q'\iint\limits_{\omega}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-2}r_{QB}^{n-1}}.$$

En transformant maintenant homothétiquement du point $P$ la surface $\omega$ dans le rapport $(L/\delta)(1/r_{PB})$ on amène la sphère $\Gamma$ à la sphère $\Gamma'$ de rayon unité et l'on a

$$\iint\limits_{\omega}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-2}r_{QB}^{n-1}}=\left(\frac{L}{\delta}\right)^{n-2}\frac{1}{r_{PB}^{n-2}}\iint\limits_{\omega'}\frac{d\sigma_{Q'}}{r_{PQ'}^{n-2}r_{Q'B'}^{n-1}}.$$

L'intégrale obtenue est bornée quel que soit $P$, donc, en tenant compte de l'inégalité (55), nous aurons

$$(56)\qquad |H^{(\omega)}(A,B)|<q''/r_{PB}^{n-2}<2^{n-2}q''/r_{AB}^{n-2}$$

où $q''$ est une constante positive.

Pour limiter le second terme $H^{(S-\omega)}(A,B)$, remarquons qu'aux points de la surface $S-\omega$ sont vraies les inégalités

$$(57)\qquad r_{AQ}>\tfrac{1}{2}r_{PQ}>\tfrac{1}{2}(\delta/L)r_{PB}>\tfrac{1}{4}(\delta/L)r_{AB},$$

par conséquent

$$(58)\qquad |H^{(S-\omega)}(A,B)|=\left|\iint\limits_{S-\omega}\frac{\psi(Q,B)}{r_{AQ}^{n-2}}\,d\sigma_Q\right|$$
$$<\left(\frac{4L}{\delta}\right)^{n-2}\frac{1}{r_{AB}^{n-2}}\iint\limits_{S-\omega}|\psi(Q,B)|\,d\sigma_Q<\left(\frac{4L}{\delta}\right)^{n-2}\frac{q}{r_{AB}^{n-2}}.$$



En rapprochant les résultats (53), (56), (58), nous obtenons la limitation cherchée de la partie régulière de la fonction de Green

$$(59)\qquad |H(A,B)|<C_1/r_{AB}^{n-2}$$

pour deux points arbitraires et différents $A$, $B$ du domaine $\Omega$.

Passons maintenant à la recherche de la limitation des dérivées de la fonction $H(A,B)$ par rapport aux coordonnées du point $A$. Le point $B$ étant à l'intérieur du domaine $\Omega$, ces dérivées ont les valeurs limites déterminées, si le point $A$ tend vers le point arbitraire $P$ de la surface $S$. Cette propriété a lieu grâce à l'inégalité d'Hölder vérifiée par la densité $\psi(Q,B)$, de laquelle dérive la fonction potentielle $H(A,B)$ exprimée par l'intégrale (54).

Le choix des axes des coordonnées est arbitraire, puisque les inégalités de la forme (50) sont vraies pour tout le système d'axes, si elles sont vraies pour un système particulier.

Considérons donc un système d'axes rectangulaires $(Px_1x_2\ldots x_n)$ avec l'axe $Px_1$ normale à la surface $S$ et les axes $Px_2,Px_3,\ldots,Px_n$ dans le plan tangent en $P$. Nous étudierons la dérivée de la fonction $H(A,B)$ suivant la direction d'un axe tangent $Px_j$ $(j=2,3,\ldots,n)$; l'étude de la dérivée dans la direction de la normale $Px_1$ est plus facile. Considérons d'abord le cas où le point $B$ est situé à l'intérieur ou sur la surface de la sphère $\Lambda$. Nous obtenons alors pour la dérivée de la fonction $H(A,B)$ par rapport à la coordonnée $x_j$ $(j=2,3,\ldots,n)$[2]) du point $A$ l'inégalité

$$(60)\qquad \left|\frac{\partial H(A,B)}{\partial x_j}\right|=\left|(n-2)\iint\limits_{S}\frac{x_j-\xi_j}{r_{AQ}^{n}}\,\psi(Q,B)\,d\sigma_Q\right|$$
$$<\frac{n-2}{r_{AP}^{n-1}}\iint\limits_{S}|\psi(Q,B)|\,d\sigma_Q<\frac{2^{n-1}(n-2)q}{r_{AB}^{n-1}},$$

$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ étant les coordonnées du point $Q$ de la surface $S$. Si le point $B$ est situé à l'extérieur de la sphère $\Lambda$, les dérivées de la fonction $H(A,B)$ s'expriment par les intégrales, que nous décomposons en deux parties

$$(\partial H/\partial x_j)^{\omega},\qquad (\partial H/\partial x_j)^{S-\omega}$$

étendues aux surfaces $\omega$ et $S-\omega$. Pour la première partie nous écrivons

$$(61)\qquad \frac{1}{n-2}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^{\omega}$$
$$=-\iint\limits_{\omega}\frac{x_j-\xi_j}{r_{AQ}^{n}}\,[\psi(Q,B)-\psi(P,B)]\,d\sigma_Q-\psi(P,B)\iint\limits_{\omega}\frac{x_j-\xi_j}{r_{AQ}^{n}}\,d\sigma_Q.$$

---

[2]) Nous conservons le symbole $x_j$ pour faciliter l'orientation, quoique $x_2=x_3=\ldots=x_n=0$ mais $x_1\neq 0$.

En appliquant l'inégalité démontrée (47) d'Hölder à l'expression (61), nous aurons

$$(62)\qquad \frac{1}{n-2}\left|\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^{\omega}\right|$$
$$\leqslant [k_f(B)+lm_\psi(B)+l']\iint\limits_{\omega}\frac{r_{PQ}^h}{r_{AQ}^{n-1}}d\sigma_Q+m_\psi(B)\left|\iint\limits_{\omega}\frac{x_j-\xi_j}{r_{AQ}^n}d\sigma_Q\right|.$$

Remarquons maintenant, que la distance entre le point $Q\epsilon\omega$ et le point $B$ vérifie l'inégalité

$$r_{BQ}\geqslant(1-\delta/L)r_{BP}$$

donc, d'après les formules (40), (43), (44), il existe des constantes positives $q'$, $q''$ telles que pour les points $Q\epsilon\omega$ nous pouvons poser

$$(63)\qquad k_f(B)=q'/r_{BP}^n,\qquad m_\psi(B)=q''/r_{BP}^{n-1}.$$

En appliquant les inégalités (55) et en transformant homothétiquement la sphère $\Gamma$ du point $P$ dans le rapport $(L/\delta)(1/r_{BP})$, nous aurons

$$\iint\limits_{\omega}\frac{r_{PQ}^h}{r_{AQ}^{n-1}}d\sigma_Q<2^{n-1}\iint\limits_{\omega}\frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}^{n-1-h}}=2^{n-1}\left(\frac{\delta}{L}\right)^h r_{BP}^h\iint\limits_{\omega'}\frac{d\sigma_{Q'}}{r_{PQ'}^{n-1-h}}.$$

L'intégrale obtenue est absolument convergente et possède la borne supérieure déterminée. Quant à l'intégrale

$$(n-2)\iint\limits_{\omega}\frac{x_j-\xi_j}{r_{AQ}^n}d\sigma_Q$$

dans l'égalité (61), elle représente la dérivée tangentielle du potentiel de simple couche de la densité constante, donc elle admet les valeurs limites déterminées et sa valeur absolue a une borne supérieure pour toute la position du point $A$. Il en résulte, d'après l'inégalité (62) et les formules (63), la limitation suivante:

$$(64)\qquad |(\partial H/\partial x_j)^{\omega}|<q'''/r_{BP}^{n-h}<2^{n-h}q'''/r_{AB}^{n-h}$$

$q'''$ étant une constante positive. Pour la seconde partie de la dérivée, d'après l'inégalité (57), nous aurons

$$(65)\qquad \left|\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^{S-\omega}\right|=(n-2)\left|\iint\limits_{S-\omega}\frac{x_j-\xi_j}{r_{AQ}^n}\psi(Q,B)d\sigma_Q\right|$$
$$<\left(\frac{4L}{\delta}\right)^{n-1}\frac{n-2}{r_{AB}^{n-1}}\iint\limits_{S-\omega}|\psi(Q,B)|d\sigma_Q<\left(\frac{4L}{\delta}\right)^{n-1}\frac{q(n-2)}{r_{AB}^{n-1}}.$$



En faisant la somme des résultats (60), (64), (65), nous voyons que les dérivées tangentielles de la fonction $H(A,B)$ satisfont à l'inégalité de la forme

$$(66)\qquad |\partial H(A,B)/\partial x_j|<C_2/r_{AB}^{n-h}$$

où la constante positive $C_2$ ne dépend pas des points $A$, $B$.

D'une façon analogue on pourra étudier la dérivée de la fonction $H$ par rapport à la variable $x_1$; on obtient une limitation qui n'est pas supérieure à (66).

Le théorème sur les limitations (50) de la composante régulière $H(A,B)$ de la fonction de Green est donc démontré. Évidemment les inégalités de la même forme sont vraies pour la fonction de Green elle même

$$G(A,B)=1/r_{AB}^{n-2}+H(A,B).$$

Nous signalons encore, que les secondes dérivées de la fonction $H(A,B)$ par rapport aux coordonnées du point $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ existent et sont continues par rapport aux points $A$ et $B$ à l'intérieur du domaine $\Omega$, en outre ces dérivées sont bornées si le point $A$ reste à l'intérieur du domaine $\Omega$ et le point $B$ tend vers le point arbitraire de la surface $S$. En effet, si le point $P$ de la surface $S$ est le plus approché du point $A$, alors, d'après le lemme 1, la seconde dérivée par rapport à la variable $x_j$ satisfait à l'inégalité

$$(67)\qquad \frac{1}{n-2}\left|\frac{\partial^2H(A,B)}{\partial x_j^2}\right|=\left|\iint\limits_{S}\frac{\psi(Q,B)}{r_{AQ}^n}d\sigma_Q-n\iint\limits_{S}\frac{(x_j-\xi_j)^2}{r_{AQ}^{n+2}}\psi(Q,B)d\sigma_Q\right|$$
$$\leqslant\frac{n+1}{r_{AP}^n}\iint\limits_{S}|\psi(Q,B)|d\sigma_Q\leqslant\frac{(n+1)q}{r_{AP}^n}$$

en tout point $B\epsilon\Omega$. Une conclusion analogue concerne de même les dérivées d'ordre quelconque.

Les propriétés de la fonction $H(A,B)$, que nous avons démontré, sont importantes dans les études suivantes d'équations elliptiques.

**4. Étude de l'équation elliptique.** Soit l'équation du type elliptique

$$(68)\qquad \Delta u=\sum_{j=1}^{n}\partial^2u/\partial x_j^2=F(x_1,\dots,x_n,u,\partial u/\partial x_1,\dots,\partial u/\partial x_n).$$

On admet que la fonction des $2n+1$ variables

$$(69)\qquad F(x_1,x_2,\dots,x_n,u,p_1,p_2,\dots,p_n)$$

est déterminée dans la région fermée

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega + S, \tag{70}$$
$$|u| \leqslant R, \quad |p_j| \leqslant R \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

et qu'elle *satisfait à la condition d'Hölder* par rapport à toutes les variables dans la région (70). Nous cherchons la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui vérifie l'équation (68) en tout point intérieur $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du domaine $\Omega$ et qui vérifie la condition aux limites mixte

$$\lim_{A \to P} [du(A)/dn_P] + a(P)u(P) = 0 \tag{71}$$

en tout point $P$ de la surface $S$ limitant le domaine $\Omega$. La fonction $a(P)$, déterminée sur la surface $S$, vérifie la condition d'Hölder.

Nous montrons d'abord, que si $G(A, B)$ est la fonction de Green vérifiant la condition aux limites

$$\lim_{A \to P} [dG(A, B)/dn_P] + a(P)G(P, B) = 0 \tag{72}$$

la fonction[3])

$$u(A) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega G(A, B) f(B) d\tau_B \tag{73}$$

vérifie l'équation de Poisson

$$\Delta u(A) = f(A) \tag{74}$$

en tout point intérieur $A$ du domaine $\Omega$ et la condition limite (71) en tout point $P$ de la surface $S$; $f(A)$ est une fonction donnée dans le domaine $\Omega$, vérifiant la condition d'Hölder. Quoique la question soit bien connue dans les traités classiques de la théorie du potentiel, il arrivent des points qui exigent une plus grande rigueur de raisonnement.

Démontrons d'abord que *la fonction* (73) *satisfait à l'équation* (74) *en tout point* $A \in \Omega$. Décomposons donc l'intégrale (73) en deux parties

$$u(A) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega \frac{f(B)}{r_{AB}^{n-2}} d\tau_B - \frac{1}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega H(A, B) f(B) d\tau_B. \tag{75}$$

La fonction $f(A)$ vérifiant la condition d'Hölder, on sait bien que la première intégrale vérifie l'équation de Poisson

$$\Delta_A \left[ \iiint_\Omega \frac{f(B)}{r_{AB}^{n-2}} d\tau_B \right] = -(n-2)\omega_n f(A). \tag{76}$$

[3]) On conserve le signe de l'intégrale triple pour l'intégrale étendue au domaine $\Omega$ à $n$ dimensions.



Nous démontrerons que la seconde intégrale

$$u_1(A) = \iiint_\Omega H(A, B) f(B) d\tau_B \tag{77}$$

est une fonction harmonique en tout point $A \in \Omega$. Remarquons d'abord qu'il a été prouvé, que toutes les dérivées de la fonction $H(A, B)$ par rapport aux coordonnées du point $A$ sont continues et bornées, si le point $A$ reste fixe à l'intérieur du domaine $\Omega$ et le point $B$ occupe une position quelconque, il existe donc les intégrales

$$\iiint_\Omega \frac{\partial H(A, B)}{\partial x_j} f(B) d\tau_B, \quad \iiint_\Omega \frac{\partial^2 H(A, B)}{\partial x_j^2} f(B) d\tau_B \tag{78}$$

pour tout point intérieur $A \in \Omega$. Soit maintenant un domaine arbitraire $\Omega'$ situé avec sa surface limite à l'intérieur du domaine $\Omega$. Si le point $A$ est situé dans le domaine $\Omega'$ et le point $B$ dans le domaine $\Omega$, les valeurs absolues des secondes et des troisièmes dérivées de la fonction $H(A, B)$, par rapport aux coordonnées du point $A$, admettent une borne supérieure déterminée. Par conséquent les dérivées

$$\partial H(A, B)/\partial x_j, \quad \partial^2 H(A, B)/\partial x_j^2$$

qui sont les fonctions de couples de points $(A, B)$, définies dans le produit topologique des domaines $\Omega$, $\Omega'$, vérifient la condition de Lipschitz par rapport au point $A$. Ces propriétés suffisent pour appliquer la règle de la différentiation sous le signe de l'intégrale et par conséquent les intégrales (78) représentent la première et la seconde dérivée de la fonction (77) dans le domaine $\Omega'$. Le domaine $\Omega'$ étant arbitraire à l'intérieur du domaine $\Omega$, la fonction (77) admet donc les secondes dérivées de la forme

$$\frac{\partial^2 u_1(A)}{\partial x_j^2} = \iiint_\Omega \frac{\partial^2 H(A, B)}{\partial x_j^2} f(B) d\tau_B$$

en tout point intérieur $A$ du domaine $\Omega$ et par conséquent elle vérifie l'équation de Laplace:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2} = \iiint_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H(A, B)}{\partial x_j^2} f(B) d\tau_B = 0$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$. La proposition énonçant que la fonction (73) vérifie l'équation de Poisson (74) à l'intérieur du domaine $\Omega$ est donc démontrée.

Pour démontrer que la fonction (73) satisfait à la condition limite (71), nous nous basons sur les limitations démontrées (50) de la fonction de Green. Remarquons d'abord que, d'après ces limitations, les intégrales

$$(79)\qquad \begin{aligned} u(P) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G(P,B)f(B)\,d\tau_B, \\ u'(P) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G'(P,B)f(B)\,d\tau_B \end{aligned}$$

sont absolument convergentes et ont les valeurs déterminées en tout point $P$ de la surface $S$. $G'(P,B)$ désigne la limite vers laquelle tend la dérivée $G'(A,B)$ de la fonction de Green $G(A,B)$ par rapport à la coordonnée arbitraire du point $A\neq B$, si ce point $A$ tend vers le point $P$ de la surface $S$. Nous démontrerons que les intégrales (79) présentent les valeurs limites des intégrales

$$(80)\qquad \begin{aligned} u(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G(A,B)f(B)\,d\tau_B, \\ u'(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G'(A,B)f(B)\,d\tau_B \end{aligned}$$

si le point intérieur $A$ tend d'une façon arbitraire vers le point $P$ de la surface $S$.

Il suffit de démontrer cette propriété pour l'intégrale $u'(A)$. Soit donc une sphère $K$ de rayon $\varrho$, ayant pour centre le point arbitraire $P$ de la surface $S$. Soit ensuite une seconde sphère $K_1$ de rayon $2\varrho$, ayant pour centre le point $A$ arbitrairement choisi à l'intérieur de la sphère $K$ et du domaine $\Omega$. La sphère $K$ est située à l'intérieur de la sphère $K_1$. Décomposons maintenant les intégrales $u'(A)$ et $u'(P)$ en deux parties

$$(81)\qquad \begin{aligned} u'(A) &= u'_{K'_1}(A)+u'_{\Omega-K'_1}(A), \\ u'(P) &= u'_{K'_1}(P)+u'_{\Omega-K'_1}(P), \end{aligned}$$

étendues au domaine $K'_1$, étant l'ensemble de tous les points communs au domaine $(K_1,\Omega)$ et au domaine $\Omega-K'_1$ extérieur à la sphère $K_1$. D'après les inégalités (50), nous avons pour tout point $A$ à l'intérieur de la sphère $K$

$$(82)\qquad |u'_{K'_1}(A)| < \frac{M_f(n-2+C_2)}{(n-2)\omega_n}\int_0^{2\varrho}\frac{\omega_n r^{n-1}dr}{r^{n-h}} = \frac{M_f(n-2+C_2)2^h}{(n-2)h}\varrho^h,$$

$M_f$ étant la borne supérieure de la fonction $f(A)$ dans $\Omega$. Nous aurons donc

$$(83)\qquad |u'_{K'_1}(A)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \qquad |u'_{K'_1}(P)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$



en prenant

$$\varrho = \left[\frac{(n-2)h\varepsilon}{3\cdot 2^h M_f(n-2+C_2)}\right]^{1/h}.$$

En remarquant que le point $A$ est extérieur au domaine $\Omega-K'_1$, nous démontrerons que la fonction $G'(A,B)$ tend vers sa valeur limite $G'(P,B)$ *uniformément* par rapport au point $B$ dans le domaine $\Omega-K'$, si le point $A$ dans la sphère $K$ tend vers le point $P$. Cette propriété est évidente pour le composant $1/r^{n-2}$. Quant au composant $H(A,B)$, qui est un potentiel de simple couche de densité $\psi(Q,B)$, nous l'écrivons sous la forme d'une somme

$$H(A,B) = \iint_S \frac{\psi(Q,B)}{r_{AQ}^{n-2}}d\sigma_Q = H_{S_1}(A,B)+H_{S-S_1}(A,B)$$

des intégrales étendues à la partie $S_1$ de la surface $S$ située à l'intérieur de la sphère $K$ et la partie $S-S_1$ située à l'extérieur de la sphère $K$. Le point $B$ étant extérieur à la sphère $K_1$, la fonction $\psi(Q,B)$ dans la partie $S_1$ admet une borne supérieure et elle satisfait au condition d'Hölder avec un coefficient indépendant de $B$. Il en résulte la tendance uniforme des dérivées $H'_S(A,B)$ vers leurs valeurs limites $H'_{S_1}(P,B)$, si $B\in\Omega-K'_1$. La tendance uniforme des dérivées du second composant $H'_{S-S_1}(A,B)$ vers leurs valeurs limites $H'_{S-S_1}(P,B)$ est évidente, d'après la propriété intégrale (45) de la fonction $\psi(Q,B)$. Nous pouvons donc, connaissant la valeur $\varrho$, choisir pour le nombre $\varepsilon$ un nombre $\eta_\varepsilon$ tel qu'on ait

$$(84)\qquad |u'_{\Omega-K'_1}(A)-u'_{\Omega-K'_1}(P)| < \varepsilon/3, \quad \text{si} \quad r_{AP} < \eta_\varepsilon.$$

Il en résulte, d'après (83) et (84), que

$$(85)\qquad \lim_{A\to P} u'(A) = u'(P),$$

c. q. f. d. Nous en concluons, d'après la propriété limite (35) de la fonction de Green, que la fonction (73) satisfait à la condition limite (71).

Passons maintenant à la recherche de la solution de l'équation (68), vérifiant la condition limite (71). D'après la forme (73) de la solution de l'équation (74), nous considérons l'équation intégro-différentielle

$$(86)\qquad u(A) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G(A,B)F\left[B,u(B),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]d\tau_B$$

$u(A)$ étant une fonction inconnue et $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ étant les coordonnées du point $B$.

Pour résoudre l'équation intégro-différentielle (86), considérons un système d'équations intégrales

$$
(87)\qquad
\begin{aligned}
u(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G(A,B)F[B,u(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]\,d\tau_B,\\
u_j(A) &= -\frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\iiint_{\Omega}\frac{\partial G(A,B)}{\partial x_j}F[B,u(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]\,d\tau_B
\end{aligned}
$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

à $(n+1)$ fonctions inconnues $u,u_1,u_2,\ldots,u_n$; $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sont les coordonnées du point $A$. D'après les inégalités (50), les équations (87) admettent une faible singularité.

La condition d'Hölder, admise pour la fonction $F$, est insuffisante pour résoudre le système (87) par la méthode classique des approximations successives. Nous résolvons le système (87) par l'application du théorème topologique suivant de J. Schauder [4] sur le point invariant d'une transformation:

*Toute transformation continue d'un ensemble convexe, borné, fermé et contenu dans un espace linéaire, normé et complet, en son sous-ensemble compact a au moins un point invariant.*

Considérons donc un espace $T$ dont les éléments sont tous les systèmes $u(A),u_1(A),u_2(A),\ldots,u_n(A)$ de $n+1$ fonctions continues, réelles, définies dans le domaine $\Omega$. On définit la *distance entre deux points* $U(u,u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $V(\bar u,\bar u_1,\bar u_2,\ldots,\bar u_n)$ de cet espace par la somme des bornes supérieures

$$(88)\qquad \delta(U,V)=\sup|u-\bar u|+\sum_{j=1}^{n}\sup|u_j-\bar u_j|$$

et la *norme du point* $U$ par son distance du point nul $\theta(0,0,\ldots,0)$:

$$(89)\qquad \|U\|=\delta(U,\theta)=\sup|u|+\sum_{j=1}^{n}\sup|u_j|.$$

On définit ensuite la *somme des deux points* $U$ et $V$, ainsi que le *produit* du point $U$ par un nombre réel $\gamma$ à l'aide des formules

$$
(90)\qquad
\begin{aligned}
&[u,u_1,\ldots,u_n]+[\bar u,\bar u_1,\ldots,\bar u_n]=[u+\bar u,u_1+\bar u_1,\ldots,u_n+\bar u_n],\\
&\gamma[u,u_1,\ldots,u_n]=[\gamma u,\gamma u_1,\ldots,\gamma u_n].
\end{aligned}
$$

L'espace considéré $T$ est donc linéaire et normé. Il est évidemment *complet*, puisque, d'après la définition (88) de la distance, toute suite convergente de points de l'espace $T$ est une suite de systèmes de fonctions continues uniformément convergentes et la condition de Cauchy de la convergence des suites de points dans l'espace $T$ est à la fois nécessaire et suffisante.



Considérons maintenant dans l'espace $T$ un ensemble borné $E$ de points $U[u(A),u_1(A),\ldots,u_n(A)]$ vérifiant les inégalités

$$(91)\qquad |u(A)|\leqslant R,\qquad |u_j(A)|\leqslant R\qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

où $R$ est un nombre positif qui détermine la région (70) où la fonction $F(A,u,u_1,\ldots,u_n)$ est définie. L'ensemble $E$ est évidemment *fermé*, puisque la limite de la suite de points $U$ vérifiant la condition (91) est un système de fonctions continues, vérifiant aussi cette condition. En outre *l'ensemble $E$ est convexe*; en effet, si $U(u,u_1,\ldots,u_n)$ et $V(\bar u,\bar u_1,\ldots,\bar u_n)$ sont les deux points de cet ensemble, donc vérifiant les inégalités (91), alors tout point $(1-\gamma)U+\gamma V$ (où $0\leqslant\gamma\leqslant1$) du segment rectiligne, qui joint les points $U$ et $V$, vérifie de même ces inégalités

$$|(1-\gamma)u+\gamma\bar u|\leqslant(1-\gamma)|u|+\gamma|\bar u|\leqslant R,$$
$$|(1-\gamma)u_j+\gamma\bar u_j|\leqslant(1-\gamma)|u_j|+\gamma|\bar u_j|\leqslant R$$

et par conséquent appartient à l'ensemble $E$. Pour démontrer l'existence dans l'ensemble $E$ d'un point $[u(A),u_1(A),\ldots,u_n(A)]$ qui est la solution du système d'équations intégrales (87), considérons une transformation fonctionnelle

$$
(92)\qquad
\begin{aligned}
v(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega} G(A,B)F[B,u(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]\,d\tau_B,\\
v_j(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint_{\Omega}\frac{\partial G(A,B)}{\partial x_j}F[B,u(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]\,d\tau_B
\end{aligned}
$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

qui fait correspondre à tout point $U[u,u_1,\ldots,u_n]$ de l'ensemble $E$ un point $U'[v,v_1,\ldots,v_n]$ de l'espace $T$. Cherchons la condition, pour que l'ensemble $E'$ de tous les points $U'$ transformés de l'ensemble $E$ fasse partie de cet ensemble. En appliquant dans ce but les limitations fondamentales démontrées

$$(93)\qquad |G(A,B)|<c_1'/r_{AB}^{n-2},\qquad \left|\frac{\partial G(A,B)}{\partial x_j}\right|<c_2'/r_{AB}^{n-h}$$

de la fonction de Green, nous aurons pour les fonctions (92) les inégalités suivantes:

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
|v(A)| &< \frac{M_F c_1'}{(n-2)\,\omega_n}\iiint_{\Omega}\frac{d\tau_B}{r_{AB}^{n-2}} < \frac{M_F c_1'}{(n-2)\,\omega_n}\int_0^L\frac{\omega_n r^{n-1}\,dr}{r^{n-2}} = \frac{c_1' M_F L^2}{2(n-2)},\\
|v_j(A)| &< \frac{M_F c_2'}{(n-2)\,\omega_n}\iiint_{\Omega}\frac{d\tau_B}{r^{n-h}} < \frac{M_F c_2'}{(n-2)\omega_n}\int_0^L\frac{\omega_n r^{n-1}\,dr}{r^{n-h}} = \frac{c_2' M_F L^h}{h(n-2)}
\end{aligned}
$$

où $M_F$ désigne la borne supérieure de la fonction donnée $|F|$ dans la région (70) et $L$ — le diamètre du domaine $\Omega$. Nous en concluons que l'ensemble $E'$ fera partie de l'ensemble $E$ si la borne supérieure $M_F$ et le diamètre $L$ satisfont à la fois aux deux inégalités suivantes:

$$M_F L^2 \leqslant \frac{2(n-2)}{c_1'} R, \qquad M_F L^h \leqslant \frac{h(n-2)}{c_2'} R. \tag{95}$$

Dans le cas où le diamètre $L$ est donné a priori, les conditions (95) seront vérifiées, lorsque la borne $M_F$ ne dépasse pas le plus petit des deux nombres

$$2(n-2)R/c_1'L^2, \qquad h(n-2)R/c_2'L^h. \tag{96}$$

Dans le cas où borne $M_F$ est donnée a priori, les conditions (95) seront vérifiées lorsque le diamètre $L$ ne dépasse pas le plus petit des deux nombres

$$\big(2(n-2)R/c_1'M_F\big)^{1/2}, \qquad \big(h(n-2)R/c_2'M_F\big)^{1/h}. \tag{96'}$$

Nous démontrerons maintenant que *la transformation fonctionnelle* (92) *est continue dans l'espace* $T$. Soit une suite arbitraire de points $U_\nu[u^\nu, u_1^\nu, \ldots, u_n^\nu]$ d'ensemble $E$ qui converge vers le point $U[u, u_1, u_2, \ldots, u_n]$ de cet ensemble; on a donc $\delta(U_\nu, U) \to 0$, si $\nu \to \infty$ et par conséquent les suites fonctionnelles $\{u^\nu\}$, $\{u_j^\nu\}$ convergent *uniformément* vers les fonctions $u$ et $u_j$. Nous allons démontrer que les suites des fonctions transformées

$$\begin{aligned} v^\nu(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega G(A,B) F[B, u^\nu, u_1^\nu, \ldots, u_n^\nu]\, d\tau_B, \\ v_j^\nu(A) &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega \frac{\partial G(A,B)}{\partial x_j} F[B, u^\nu, u_1^\nu, \ldots, u_n^\nu]\, d\tau_B \end{aligned} \tag{97}$$

tendent uniformément resp. vers les fonctions $v(A), v_1(A), \ldots, v_n(A)$ transformées des fonctions limites $u(A), u_1(A), \ldots, u_n(A)$ par les relations (92). Nous avons en effet, d'après les propriétés (93)

$$\begin{aligned} |v^\nu(A) - v(A)| &< \frac{c_1'}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega \frac{|F[B, u^\nu, \ldots, u_n^\nu] - F[B, u, \ldots, u_n]|}{r_{AB}^{n-2}}\, d\tau_B, \\ |v_j^\nu(A) - v_j(A)| &< \frac{c_2'}{(n-2)\omega_n} \iiint_\Omega \frac{|F[B, u^\nu, \ldots, u_n^\nu] - F[B, u, \ldots, u_n]|}{r_{AB}^{n-h}}\, d\tau_B. \end{aligned} \tag{98}$$

Or, d'après la continuité de la fonction $F$ et la convergence uniforme des suites $\{u^\nu\}$, $\{u_j^\nu\}$, pour le nombre positif $\varepsilon$ arbitraire on peut choisir un tel nombre naturel $N_\varepsilon$, qu'on ait



$$|F[B, u^\nu, u_1^\nu, \ldots, u_n^\nu] - F[B, u, u_1, \ldots, u_n]| < \varkappa\varepsilon$$

si $\nu > N$, où $\varkappa$ désigne le plus petit des deux nombres $2(n-2)/c_1'L^2$, $h(n-2)/c_2'L^h$.

Il en résulte (voir les inégalités (94))

$$|v^\nu(A) - v(A)| < \varepsilon, \qquad |v_j^\nu(A) - v_j(A)| < \varepsilon,$$

si $\nu > N_\varepsilon$, donc la suite de points transformées $V^\nu[v^\nu, v_1^\nu, \ldots, v_n^\nu]$ tend vers le point $V[v, v_1, \ldots, v_n]$ transformé du point limite $U(u, u_1, \ldots, u_n)$ et la transformation (92) est continue.

Il reste à demontrer, que l'ensemble $E'$ de points transformés de l'ensemble $E$ est *compact*. Dans ce but nous démontrerons d'abord la lemme suivant, qui nous sera encore nécessaire plus loin:

Lemme. *Si la densité $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de la charge spatiale est une fonction continue et bornée dans le domaine $\Omega$, les dérivées*

$$V'_{x_j}(A) = -(n-2) \iiint_\Omega \frac{x_j - \xi_j}{r_{AB}^n} f(B)\, d\tau_B \tag{99}$$

*du potentiel de la charge spatiale*

$$V(A) = \iiint_\Omega \frac{f(B)}{r_{AB}^{n-2}}\, d\tau_B \tag{100}$$

*par rapport aux coordonnées du point intérieur $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfont à la condition d'Hölder de la forme*

$$|V'_{x_j}(A) - V'_{x_j}(A_1)| \leqslant k M_f r_{AA_1}^\lambda \tag{101}$$

*où $\lambda$ est un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité, $M_f$ désigne la borne supérieure de la fonction $|f|$ dans $\Omega$ et $k$ est une constante positive ne dépendant que de la surface $S$ et de $\lambda$ choisi.*

Soient $A$ et $A_1$ les deux points arbitraires dans l'ensemble $\Omega + S$. Considérons une sphère $K$ de centre $A$ et de rayon $2r_{AA_1}$. Décomposons les intégrales $V'_{x_j}(A)$, $V'_{x_j}(A_1)$ en deux intégrales

$$\begin{aligned} V'_{x_j}(A) &= V'^{K}_{x_j}(A) + V'^{\Omega-K}_{x_j}(A), \\ V'_{x_j}(A_1) &= V'^{K}_{x_j}(A_1) + V'^{\Omega-K}_{x_j}(A_1) \end{aligned} \tag{102}$$

étendues à la partie du domaine $\Omega$ située à l'intérieur de la sphère $K$ et à la partie extérieur $\Omega - K$. En transformant homothétiquement la sphère $K$ du point $A$ dans le rapport qui amène cette sphère à la sphère $K'$ de rayon unité, nous aurons

$$|V'^{K}_{x_j}(A)| < (n-2) M_f \iiint_K \frac{d\tau_B}{r_{AB}^{n-1}} = 2(n-2) M_f r_{AA_1} \iiint_{K'} \frac{d\tau_{B'}}{r_{AB'}^{n-1}}$$

et l'inégalité analogue pour le point $A$. Il existe donc une constante positive $k_1$, telle que

$$|V_{x_j}'^{K}(A)| < k_1 M_f r_{AA_1}, \qquad |V_{x_j}'^{K}(A_1)| < k_1 M_f r_{AA_1} \tag{103}$$

quels que soient les points $A$ et $A_1$ dans $\Omega+S$. Étudions maintenant la différence des seconds termes des sommes (102), en l'écrivant de la façon suivante:

$$V_j'^{\Omega-K}(A) - V_j'^{\Omega-K}(A_1) = -(n-2)\iiint\limits_{\Omega-K} \frac{x_j-\bar{x}_j}{r_{AB}^n} f(B)\,d\tau_B -$$
$$-(n-2)\iiint\limits_{\Omega-K} (\bar{x}_j-\xi_j)(1/r_{AB}^n - 1/r_{A_1B}^n) f(B)\,d\tau_B,$$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ étant les coordonnées du point $A_1$. Or nous avons

$$\left|(x_j-\bar{x}_j)\iiint\limits_{\Omega-K} \frac{f(B)}{r_{AB}^n}\,d\tau_B\right| \leqslant M_f r_{AA_1}\int\limits_{2r_{AA_1}}^{L} \frac{\omega_n r^{n-1}\,dr}{r^n} = M_f\omega_n r_{AA_1}\log\frac{L}{2r_{AA_1}}, \tag{104}$$

$L$ étant le diamètre du domaine $\Omega$.

En remarquant que $\frac{1}{2} \leqslant r_{A_1B}/r_{AB} \leqslant \frac{3}{2}$, si $B \in \Omega-K$, nous aurons

$$\left|\iiint\limits_{\Omega-K} (\bar{x}_j-\xi_j)(1/r_{AB}^n - 1/r_{A_1B}^n) f(B)\,d\tau_B\right| \tag{105}$$
$$\leqslant M_f \iiint\limits_{\Omega-K} \frac{|r_{AB}-r_{A_1B}|\,(r_{AB}^{n-1} + r_{AB}^{n-2} r_{A_1B} + \ldots + r_{A_1B}^{n-1})}{r_{AB}^n r_{A_1B}^{n-1}}\,d\tau_B$$
$$< M_f(3^n-2^n) r_{AA_1}\iiint\limits_{\Omega-K} \frac{d\tau_B}{r_{AB}^n} < (3^n-2^n) M_f r_{AA_1}\omega_n \log\frac{L}{2r_{AA_1}}.$$

En réunissant les résultats (103), (104), (105), on arrive à l'inégalité (101), c. q. f. d.

Pour démontrer que l'ensemble $E'$ est *compact*, il suffit de prouver que les fonctions (92), composantes des points de cet ensemble, sont *équicontinues*. Il suffit de démontrer cette propriété pour l'ensemble de fonctions $v_j(A)$, que nous décomposons en deux parties

$$v_j(A) = \frac{1}{\omega_n}\iiint\limits_{\Omega} \frac{x_j-\xi_j}{r_{AB}^n} F[B, u(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B - \tag{106}$$
$$-\frac{1}{(n-2)\omega_n}\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial H(A,B)}{\partial x_j} F[B, u(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B.$$



Toutes les fonctions représentées par la première intégrale vérifient la même inégalité d'Hölder (101), puisque $M_F$ est commune pour tous les points de l'ensemble $E$; donc elles sont équicontinues, c'est-à-dire toutes ces fonctions $v_j^1(A)$ vérifient l'inégalité $|v_j^1(A) - v_j^1(A_1)| < \varepsilon$, si $r_{AA_1} < \eta$, où le nombre $\eta$ ne dépend que de $\varepsilon$.

Pour étudier la seconde intégrale $I(A)$, remarquons que la fonction $H(A,B)$ est un potentiel (54) de la couche simple de densité $\psi(P,B)$ et nous écrirons

$$\iiint\limits_{\Omega} H(A,B) F[B, u(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B = \iint\limits_{S} \frac{W(P)}{r_{AP}^{n-2}}\,d\sigma_P \tag{107}$$

où

$$W(P) = \iiint\limits_{\Omega} \psi(P,B) F[B, u(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B. \tag{108}$$

En appliquant à l'intégrale (108) la même méthode que pour l'intégrale (99) et en s'appuyant sur la propriété (47) de la fonction $\psi(P,B)$, on démontrera que la densité (108) satisfait à l'inégalité d'Hölder de la forme

$$|W(P) - W(P_1)| \leqslant k_1 M_F r_{PP_1}^{h_1}, \tag{109}$$

$M_F$ étant la borne supérieure de la fonction $|F|$, $h_1$ — un nombre positif arbitraire inférieur à $h$ et $k_1$ une constante positive ne dépendant que de $S$ et de $h_1$. La propriété (109) permet de conclure que les dérivées premières $I$ de la fonction (107), représentées par la seconde intégrale (106), tendent uniformément vers leurs valeurs limites déterminées aux points de la surface $S$ et que ces dérivées sont uniformément continues dans le domaine $\Omega+S$. Pour démontrer que ces dérivées sont équicontinues, remarquons que, d'après les considérations sur l'existence des valeurs limites des dérivées d'un potentiel de simple couche (voir les formules (61) et (62)), leur tendance uniforme vers ces valeurs et la forme (109) de la condition d'Hölder, l'estimation de la continuité des dérivées des fonctions (107) n'exige que la connaissance de la borne supérieure $M_F$ de la fonction $|F|$. Nous pouvons en effet à tout nombre positif $\varepsilon$ choisir une surface $S'$ située à l'intérieur du domaine $\Omega$ si près de la surface limite $S$, que dans le domaine $\Omega^*$ situé entre les surfaces $S$ et $S'$ et sur ces surfaces inclus soit satisfaite l'inégalité

$$|I(A) - I(A_1)| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad r_{AA_1} < \eta_\varepsilon \tag{110}$$

où $\eta_\varepsilon$ ne dépend que du nombre $\varepsilon$ et de la borne supérieure $M_F$. Remarquons maintenant que dans le domaine $\Omega - \Omega^*$ la fonction (107) admet les dérivées secondes bornées, puisque nous avons d'après la propriété (67)

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 H(A,B)}{\partial x_j^2} F[B, u(B), \ldots, u_n(B)]\,d\tau_B\right| < \frac{(n+1)(n-2)q}{\inf r_{AP}^n} V_\Omega M_F, \tag{111}$$

$\inf r_{AP}$ désignant la borne inférieure de la distance entre les points $A$ du domaine $\Omega-\Omega^*$ et les points $P$ de la surface $S$, $V_\Omega$ — le volume du domaine $\Omega$. Il en résulte que la fonction $I(A)$ dans le domaine $\Omega-\Omega^*$ vérifie la condition de Lipschitz avec le coefficient qui a la même valeur pour toutes les fonctions $u, u_1, \ldots, u_n$. Nous pouvons donc au nombre $\varepsilon$ faire correspondre un nombre $\eta'_\varepsilon$ tel qu'on ait $|I(A)-I(A_1)|<\varepsilon$, si $r_{AA_1}<\eta'_\varepsilon$ pour tous les points $A$, $A_1$ du domaine $\Omega-\Omega^*$ et pour toutes les fonctions $u, u_1, \ldots, u_n$ simultanément. Nous en concluons, que l'intégrale $I(A)$ vérifie la condition $|I(A)-I(A_1)|<\varepsilon$ si la distance $r_{AA_1}$ des deux points arbitraires $A$, $A_1$ du domaine $\Omega$ est inférieure du plus petit des deux nombres $\eta_\varepsilon, \eta'_\varepsilon$, quelles que soient les fonctions continues $u, u_1, \ldots, u_n$ vérifiant les inégalités (91). Donc les fonctions $v_j(A)$ sont équicontinues dans le domaine $\Omega$ et par conséquent, d'après un théorème bien connu d'Arzelà, l'ensemble transformé $E'$ est compact.

Toutes les conditions du théorème de Schauder sont donc satisfaites et par conséquent il existe dans l'ensemble $E$ au moins un point invariant relativement à la transformation (92), c'est-à-dire il existe un système de fonctions continues

$$u(A), u_1(A), \ldots, u_n(A) \tag{112}$$

étant la solution du système d'équations intégrales (87), sous les conditions (95). Nous en concluons immédiatement que les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ sont les dérivées de la fonction $u$

$$u_j(A) = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

et par conséquent la fonction $u(A)$ est la solution de l'équation intégro-différentielle

$$u(A) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int\int_\Omega\int G(A,B)F\left[B, u(B), \frac{\partial u(B)}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u(B)}{\partial \xi_n}\right] d\tau_B. \tag{113}$$

Or, d'après un lemme à la page 71, les fonctions $u_j(A)$ vérifient la condition d'Hölder dans tout domaine $\Omega'$ situé à l'intérieur du domaine $\Omega$, donc la fonction composée du point $B$

$$F[B, u(B), \partial u(B)/\partial\xi_1, \ldots, \partial u(B)/\partial\xi_n] = \Phi(B)$$

d'après la supposition sur la fonction $F[B, u, p_1, \ldots, p_n]$, vérifie la condition d'Hölder dans tout domaine intérieur $\Omega'$ et par conséquent la fonction (113) satisfait à l'équation

$$\Delta u = F[A, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n]$$



en tout point intérieur $A(x_1, \ldots, x_n)$ du domaine $\Omega$. D'après la relation (113) et l'étude de l'intégrale (73), la fonction obtenue $u(A)$ vérifie la condition aux limites (71) demandée.

En réunissant les résultats obtenus, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si $\Omega$ est un domaine borné dans l'espace à $n$ dimensions, limité par une surface fermée $S$ vérifiant les conditions de Liapounoff, si $F(A, u, u_1, \ldots, u_n)$ est une fonction déterminée et continue dans la région fermée*

$$A \in \Omega+S, \quad |u| \leqslant R, \quad |u_\nu| \leqslant R \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

*vérifiant la condition d'Hölder, l'équation différentielle*

$$\Delta u = F(A, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$$

*admet au moins une solution $u(A)$ dans le domaine $\Omega$, vérifiant en tout point $P$ de la surface limite $S$ la relation mixte*

$$du/dn_P + a(P)u(P) = 0,$$

*$a(P)$ étant une fonction déterminée sur la surface $S$, vérifiant la condition d'Hölder; on suppose en outre, qu'il n'existe dans $\Omega$ que la solution nulle de l'équation $\Delta u = 0$ qui vérifie sur la surface $S$ la relation mixte donnée.*

## Travaux cités


[1] E. Picard, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Journal de Mathématiques 6 (1890), p. 145-210.

[2] W. Pogorzelski, *Les propriétés du noyau résolvant de l'équation intégrale d'un problème aux limites*, Bibliotheca Universitatis Liberae Poloniae 1, 1922.

[3] J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Zeitschrift 26 (1927), p. 417-431.

[4] — *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

[5] — *Potentialtheoretische Untersuchungen*, Math. Zeitschrift 33 (1931), p. 602-640.

[6] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Москва 1951, vol. IV, p. 589.

[7] S. Zaremba, *Zastosowanie metody Picarda do równań różniczkowych cząstkowych o trzech zmiennych*, Prace Matematyczno-Fizyczne 9 (1898), p. 1-27.