Hence we have

$$\beta = \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{t}_{j+1}^0 = \boldsymbol{t}_j^0 \boldsymbol{t}_{j+1}^0 + \sigma\left\{\boldsymbol{t}_{j+1}^0 (d\boldsymbol{t}_j/d\sigma)_0 + \varepsilon\right\}, \tag{10}$$

where ε is a scalar quantity infinitely small with respect to σ. But on the basis of Frenet's equation we have

$$(d\boldsymbol{t}_j/d\sigma)_0 = -\varkappa_{j-1}^0 \boldsymbol{t}_{j-1}^0 + \varkappa_j^0 \boldsymbol{t}_{j+1}^0.$$

Substituting this into (10) and taking into account the fact that

$$\boldsymbol{t}_{j+1}^0 \boldsymbol{t}_{j+1}^0 = 1, \qquad \boldsymbol{t}_j^0 \boldsymbol{t}_{j+1}^0 = 0, \qquad \boldsymbol{t}_{j+1}^0 \boldsymbol{t}_{j-1}^0 = 0$$

we obtain $\beta = \sigma\{\varkappa_j^0 + \varepsilon\}$, whence (by (9)) $\varrho = 1/(\varkappa_j^0 + \varepsilon)$. Substituting this into the first equation of (8) we have

$$\tau = \alpha/(\varkappa_j^0 + \varepsilon). \tag{11}$$

But we have

$$\alpha = \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{t}_j^0 = (\boldsymbol{t}_j^0 + \boldsymbol{e})\boldsymbol{t}_j^0 = 1 + \bar{\varepsilon}, \tag{12}$$

where $\bar{\varepsilon}$ is infinitely small with respect to σ.

Formulas (11) and (12) give

$$\tau = (1 + \bar{\varepsilon})/(\varkappa_j^0 + \varepsilon). \tag{13}$$

Assuming that $\varkappa_j^0 \neq 0$ we obtain for the coordinate of point B_j on the axis l_j^0 the value

$$(1 + \bar{\varepsilon})/(\varkappa_j^0 + \varepsilon).$$

When $\sigma \to 0$, then $\varepsilon \to 0$, $\bar{\varepsilon} \to 0$ and $B_j \to S_j$, where point S_j is defined as a radius-vector $(1/\varkappa_j^0)\boldsymbol{t}_j^0$ and thus the theorem is proved.

Point S_j, called the centre of the jth curvature, lies on the straight line l_j^0.

The above reasoning may also be applied to the case of $j=1$. Then, however, we should obtain the centre of the first curvature S_1 lying on a tangent straight line, and not on the principal normal as in the classical definition of the centre of the first curvature. If we want to preserve the classical definition of the centre of the first curvature and retain the above construction for $j=2,\ldots,n-1$ we obtain an asymmetry consisting in the fact that both the centre of the first curvature and the centre of the second curvature lie on the axis l_2^0, the centres of the succeeding curvatures lie on the axes l_j^0 where $j=3,\ldots,n-1$, while none of the curvature centres lie on the axes l_1^0 and l_n^0.

For $n=3$ and $j=2$ we obtain exactly the construction of v. Lilienthal.

Sur certaines inégalités aux dérivées partielles relatives aux fonctions possédant la différentielle approximative

par T. Ważewski (Kraków)

Les intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires peuvent être approchées par des *fonctions brisées* ayant pour diagrammes des lignes brisées (méthode *polygonale* de Euler, Cauchy et Peano). On sait qu'il est possible d'évaluer l'exactitude d'une telle approximation au moyen de théorèmes convenables sur les inégalités differentielles ordinaires.

Dans le présent article nous traitons un problème analogue relatif à l'approximation des surfaces intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles par des surfaces brisées. Le théorème 2 du § 5 sert à évaluer l'exactitude d'une telle approximation.

Les surfaces brisées sont définies comme diagrammes des fonctions possédant *la différentielle ε-approximative* qui au cas $\varepsilon=0$ se réduit à la différentielle classique au sens de Stolz. Cette notion se rattache de près à la notion de contingent de M. Bouligand. Nous nous servons aussi des notions de *dérivées partielles ε-approximatives* et de *gradients ε-approximatifs* constituant une généralisation des dérivées et des gradients au sens classique (§ 2).

Le théorème 1 du § 4 fournit une inégalité permettant d'évaluer le nombre dérivé supérieur d'une fonction auxiliaire $M(r)$ qui est égale au maximum que prend une fonction de plusieurs variables sur une surface mobile dépendant du paramètre réel r. Ce théorème permet de ramener l'examen des inégalités aux dérivées partielles à celui des inégalités différentielles ordinaires.

Le théorème 3 du § 6 fournit une limitation de l'exactitude avec laquelle une surface brisée approche l'intégrale d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Les théorèmes 1, 2, 3 constituent une généralisation de nos résultats antérieurs [3] et [4] qui correspondent au cas $\varepsilon=0$, c'est-à-dire au cas des inégalités aux dérivées partielles au sens classique.

La méthode de démonstration de ces théorèmes est, à quelques détails près, la même que celles des articles [3] et [4]. Cependant, grâce au lemme 1 du § 3, les résultats du présent article s'appliquent aussi au cas des fonctions complexes des variables complexes et, en particulier, ils peuvent être appliqués aux équations aux dérivées partielles envisagées au cas des fonctions analytiques. Ils englobent aussi nos résultats antérieurs relatifs à la limitation des intégrales des équations différentielles ordinaires considérées dans le domaine des fonctions analytiques [5].

Dans le § 7 nous donnons une esquisse rapide d'une certaine méthode d'approcher les intégrales de l'équation aux dérivées partielles $p=f(x,y,z,q)$ par des surfaces brisées d'un genre spécial. Cette méthode d'approcher par des surfaces brisées les intégrales a découlé d'une manière naturelle, d'une définition des caractéristiques que j'ai eue soin de construire de manière à ne pas faire intervenir les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles en question. C'est en partant de cette définition que j'ai eu l'idée d'étendre mes résultats antérieurs [3] et [4] au cas des surfaces brisées[1]).

§ 1. Notations. Posons

$$X=(x_1,\ldots,x_p),\qquad \overline{X}=(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_p),\qquad A=(a_1,\ldots,a_p), \tag{1.1}$$

$$Y=(y_1,\ldots,y_q),\qquad \overline{Y}=(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_q),\qquad B=(b_1,\ldots,b_q), \tag{1.2}$$

$$A(X-\overline{X})=\sum_{i=1}^{p}a_i(x_i-\overline{x}_i),\qquad B(Y-\overline{Y})=\sum_{j=1}^{q}b_j(y_j-\overline{y}_j), \tag{1.3}$$

$$|A|=\Big(\sum_{i=1}^{p}|a_i|^2\Big)^{1/2},\qquad |B|=\Big(\sum_{j=1}^{q}|b_j|^2\Big)^{1/2}. \tag{1.4}$$

X et Y désignent les points (ou vecteurs) qui appartiennent respectivement aux espaces p et q dimensionnels.

Les définitions et les résultats qui suivent se rapportent non seulement au cas où les coordonnées des points (X,Y) (appartenant à l'espace à $p+q$ dimensions) et les fonctions de ces points sont *réelles* mais aussi au cas où elles sont *complexes*.

§ 2. Différentielle ε-approximative. Gradients ε-approximatifs. Dérivées partielles ε-approximatives. Soit ε un nombre fini non négatif $0\leqslant\varepsilon<\infty$. Supposons que $f(X,Y)$ soit une fonction (réelle ou complexe) du point

$$(X,Y)=(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)\qquad\text{(réel ou complexe)},$$

définie dans un voisinage du point $(\overline{X},\overline{Y})$. En tenant compte des notations (1.1), (1.2) et (1.3), introduisons la fonction auxiliaire

[1]) J'ai exposé, il y a quelques années, les résultats du présent article (cas des variables réelles) au cours d'un séminaire à l'Institut Mathématique de l'Etat. Le théorème 2 (cas des variables complexes) est publié dans les Comptes Rendus du VIII-ème Congrès des Mathématiciens Polonais [7].

$$K(X,Y)=f(X,Y)-f(\overline{X},\overline{Y})-A(X-\overline{X})-B(Y-\overline{Y}) \tag{2.1}$$

où A et B sont des points (ou vecteurs) fixes. On dira que la fonction linéaire

$$f(\overline{X},\overline{Y})+A(X-\overline{X})+B(Y-\overline{Y}) \tag{2.2}$$

représente une différentielle ε-approximative de la fonction $f(X,Y)$ relativement au point $(\overline{X},\overline{Y})$ lorsque (cf. la notation (1.4))

$$\overline{\lim_{(X,Y)\to(\overline{X},\overline{Y})}}\big\{|K(X,Y)|:(|X-\overline{X}|^2+|Y-\overline{Y}|^2)^{1/2}\big\}\leqslant\varepsilon, \tag{2.3}$$

où $|K(X,Y)|$ désigne la valeur absolue de la fonction K et

$$|X-\overline{X}|=\big(\textstyle\sum|x_i-\overline{x}_i|^2\big)^{1/2},\qquad |Y-\overline{Y}|=\big(\textstyle\sum|y_j-\overline{y}_j|^2\big)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Introduisons les notations

$$\operatorname{grad}_X\big(\varepsilon,f(\overline{X},\overline{Y})\big)=A,\qquad \operatorname{grad}_Y\big(\varepsilon,f(\overline{X},\overline{Y})\big)=B, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{D}_{x_i}\big(\varepsilon,f(\overline{X},\overline{Y})\big)=a_i,\qquad \mathrm{D}_{y_j}\big(\varepsilon,f(\overline{X},\overline{Y})\big)=b_j, \tag{2.6}$$

$$(i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q)$$

Les vecteurs fixes différents A et B pour lesquels l'inégalité (2.3) a lieu réprésentent différents exemplaires de *gradients ε-approximatifs* de $f(X,Y)$ relatifs respectivement aux variables X et Y et au point $(\overline{X},\overline{Y})$. Les formules (2.6) représentent alors les *dérivées partielles ε-approximatives* de $f(X,Y)$ au point $(\overline{X},\overline{Y})$. Il peut arriver que, pour le même $\varepsilon>0$, la fonction $f(X,Y)$ possède, au point $(\overline{X},\overline{Y})$, différents exemplaires de ces dérivées partielles ε-approximatives. Appelons le plan

$$z=f(\overline{X},\overline{Y})+A(X-\overline{X})+B(Y-\overline{Y})$$

plan tangent ε-approximatif à la surface

$$z=f(X,Y) \tag{2.7}$$

au point $(\overline{X},\overline{Y})$. Il peut arriver que, pour le même $\varepsilon>0$, cette surface admette plusieurs plans tangents ε-approximatifs au point donné. Cette notion se rattache à la notion de contingent due à M. Bouligand.

Soit, en effet, S la surface composée des points (X,Y,z) pour lesquels $z=f(X,Y)$. Posons $\overline{z}=f(\overline{X},\overline{Y})$. Si f admet au point $(\overline{X},\overline{Y})$ la différentielle ε-approximative avec les gradients ε-approximatifs (2.5), le contingent de S au point $(\overline{X},\overline{Y},\overline{z})$ est contenu dans l'ensemble des points (X,Y,z) satisfaisant à l'inégalité

$$|z-\overline{z}-A(X-\overline{X})-B(Y-\overline{Y})|^2\leqslant\varepsilon^2(|X-\overline{X}|^2+|Y-\overline{Y}|^2).$$

Ce dernier ensemble est limité par le cône

$$|z-\bar{z}-A(X-\overline{X})-B(Y-\overline{Y})|^2=\varepsilon^2(|X-\overline{X}|^2+|Y-\overline{Y}|^2)$$

qui, au cas $\varepsilon=0$, se réduit au plan tangent à S au point $(\overline{X},\overline{Y},\bar{z})$. D'après une remarque due à M. A. Bielecki la suivante propriété, inverse en un certain sens, a lieu. Soit $f(X,Y)$ une fonction définie dans un voisinage de $(\overline{X},\overline{Y})$ et continue en ce point. Soit S le diagramme de cette fonction dans l'espace des points (X,Y,z). Si aucune direction contingentielle de S au point $\overline{X},\overline{Y},\bar{z}=f(\overline{X},\overline{Y})$ n'est pas parallèle au vecteur $X=0$, $Y=0$, $z=1$, alors il existe un $\varepsilon\geqslant 0$ (ε fini) tel que f admet au point $(\overline{X},\overline{Y})$ une différentielle ε-approximative.

Cas $\varepsilon=0$. Les notions de gradient, de différentielle, de dérivées partielles et de plan tangent ε-approximatifs coïncident avec les notions correspondantes au sens classique lorsque $\varepsilon=0$.

Surfaces ε-brisées. Fonctions ε-brisées. Toute fonction $f(X,Y)$ ayant, partout où elle est déterminée, une différentielle ε-approximative sera dite fonction ε-brisée. La surface (2.7) sera alors appelée surface ε-brisée.

§ 3. Lemme 1. *Considérons le polynôme linéaire*

$$L(Y)=L(y_1,\ldots,y_q)=c+\sum_{j=1}^{q}b_j(y_j-y_j^*),$$

c'est-à-dire $L(Y)=c+B(Y-Y^*)$ *où les constantes* c,b_j,y_j^* *et les variables* y_j *sont soit toutes complexes, soit toutes réelles.*

À tout nombre non négatif t $(t\geqslant 0)$ *correspond alors au moins un point*

$$Y^{\sim}=(y_1^{\sim},\ldots,y_q^{\sim})$$

tel que

$$|Y^{\sim}-Y^*|=t,\qquad |L(Y^{\sim})|-|L(Y^*)|=t|B|.$$

Démonstration. Il existe un vecteur U tel que

$$(3.1)\qquad |U|=1,\qquad BU=|B|.$$

En effet, au cas $|B|=0$ — chaque vecteur pour lequel $|U|=1$ satisfait aux équations (3.1). Au cas où $|B|>0$, il suffit de poser $U=\overline{B}:|B|$ où $\overline{B}$ désigne le vecteur dont la j-ème coordonnée $\bar{b}_j$ est égale au nombre conjugué avec la coordonnée b_j de B $(j=1,2,\ldots,q)$. Il existe évidemment un nombre k tel que

$$c=|c|k,\qquad |k|=1.$$

En posant $Y^{\sim}=Y^*+tkU$ on a

$$L(Y^{\sim})=k|c|+ktBU=k(|c|+t|B|).$$

Donc

$$|L(Y^{\sim})|-|L(Y^*)|=|c|+t|B|-|c|=t|B|$$

ce qui termine la démonstration.

§ 4. Hypothèse H relative à l'ensemble $E=E(g,c,X^\circ,Y^\circ)$ et à sa section $S(r)$. Admettons que la fonction réelle $g(r)$ de la variable réelle r soit continue dans l'intervalle

$$(4.1)\qquad 0\leqslant r<c\leqslant\infty$$

et que $g(r)>0$ pour $0\leqslant r<c$. Désignons par $E(g,c,X^\circ,Y^\circ)$ ou, tout court, par E l'ensemble des points (X,Y) satisfaisant aux inégalités

$$(4.2)\qquad |Y-Y^\circ|\leqslant g(|X-X^\circ|),\qquad |X-X^\circ|<c\qquad (\text{Ensemble } E)$$

(cf. les notations (2.4)). Désignons par $S(r)$ (où $0\leqslant r<c$) la section de E par le cylindre

$$|X-X^\circ|=r,\qquad Y \text{ arbitraire.}$$

La section $S(r)$ est donc définie par les relations

$$(4.3)\qquad |Y-Y^\circ|\leqslant g(|X-X^\circ|),\qquad |X-X^\circ|=r\qquad (\text{Section } S(r)).$$

Théorème 1. *Supposons que la fonction* $g(r)$ *intervenant dans la définition de l'ensemble* $E=E(g,c,X^\circ,Y^\circ)$ *soit décroissante au sens large, c'est-à-dire que*

$$g(r_1)\geqslant g(r_2)\qquad \text{lorsque}\qquad 0\leqslant r_1<r_2<c.$$

Soit $f(X,Y)$ *une fonction (complexe ou réelle) continue dans* E. *Posons*

$$M(r)=\max|f(X,Y)|\qquad \text{sur}\qquad S(r).$$

Supposons que

$$(4.4)\qquad 0<r^*<c,\qquad (X^*,Y^*)\in S(r^*),\qquad |f(X^*,Y^*)|=M(r^*).$$

(Un tel point (X^*,Y^*) *existe évidemment car la fonction* $|f(X,Y)|$ *est continue dans l'ensemble compact* $S(r^*)$*).*

Supposons enfin que $g(r)$ *possède pour* $r=r^*$ *la dérivée à gauche unique et finie* $g'_-(r^*)$, *et qu'au point* (X^*,Y^*) *la fonction* $f(X,Y)$ *admette une différentielle ε-approximative avec les gradients ε-approximatifs* $(\varepsilon\geqslant 0)$

$$(4.5)\qquad A^*=\operatorname{grad}_X(\varepsilon,f(X^*,Y^*)),\qquad B^*=\operatorname{grad}_Y(\varepsilon,f(X^*,Y^*)).$$

Cela posé, on a l'inégalité

$$(4.6)\qquad \overline{D}_-M(r^*)\leqslant|A^*|-|g'_-(r^*)|\,|B^*|+\varepsilon\big(1+[g'_-(r^*)]^2\big)^{1/2}$$

où $\overline{D}_-M(r^*)$ *désigne le nombre dérivé supérieur à gauche de* $M(r)$ *pour* $r=r^*$.

Remarque 1. En vue de l'application ultérieure à la démonstration du théorème 2 (§ 5), il est important d'insister sur ce que l'inégalité (4.6) a lieu pour *tous les exemplaires* possibles des gradients ε-approximatifs (4.5).

Démonstration. $f(X,Y)$ étant continue dans E, on démontre facilement que $M(r)$ est continue dans l'intervalle $0\leqslant r<c$. Il existe évidemment une suite de nombres r_n telle que

$$(4.7)\qquad 0<r_n<r^*,\qquad r_n\to r^*,\qquad [M(r_n)-M(r^*)]/(r_n-r^*)\to \overline{D}_-M(r^*).$$

Définissons $K(X,Y)$ par la relation

$$f(X,Y)=f(X^*,Y^*)+A^*(X-X^*)+B^*(Y-Y^*)+K(X,Y).$$

En vertu de la définition de la dérivée ε-approximative on a

$$(4.8)\qquad \overline{\lim_{(X,Y)\to(X^*,Y^*)}}[|K(X,Y)|\cdot(|X-X^*|^2+|Y-Y^*|^2)^{-1/2}]\leqslant\varepsilon.$$

Posons $L(Y)=f(X^*,Y^*)+B^*(Y-Y^*)$. On a les relations

$$(4.9)\qquad f(X,Y)\equiv L(Y)+A^*(X-X^*)+K(X,Y),\qquad L(Y^*)=f(X^*,Y^*).$$

Appliquons à $L(Y)$ le lemme précédent en posant

$$c=f(X^*,Y^*),\qquad B=B^*,\qquad t=g(r_n)-g(r^*)\geqslant 0.$$

En vertu du lemme précédent il existe un point Y_n tel que

$$(4.10)\quad |Y_n-Y^*|=g(r_n)-g(r^*),\ |L(Y_n)|-|L(Y^*)|=|B^*|\big(g(r_n)-g(r^*)\big)\geqslant 0.$$

Posons

$$(4.11)\qquad X_n=X^\circ+\frac{r_n}{r^*}(X^*-X^\circ).$$

Nous prouverons tout d'abord que

$$(4.12)\qquad (X_n,Y_n)\epsilon S(r_n)\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Comme $(X^*,Y^*)\epsilon S(r^*)$, on a (cf. (4.3))

$$(4.13)\qquad |X^*-X^\circ|=r^*,\qquad |Y^*-Y^\circ|\leqslant g(r^*).$$

En s'appuyant sur (4.10), (4.13) et (4.11) on obtient

$$|Y_n-Y^\circ|\leqslant|Y_n-Y^*|+|Y^*-Y^\circ|\leqslant g(r_n)-g(r^*)+g(r^*)=g(r_n),$$
$$|X_n-X^\circ|=r_n.$$

La relation (4.12) se trouve ainsi établie (cf. (4.3)). En vertu de (4.12) et de la définition de la fonction $M(r)$,

$$(4.14)\qquad |f(X_n,Y_n)|\leqslant M(r_n).$$

En vertu de (4.14), (4.4), (4.9) et de (4.10) on a

$$\begin{aligned}M(r_n)-M(r^*)&\geqslant|f(X_n,Y_n)|-|f(X^*,Y^*)|\\&=|L(Y_n)+A^*(X_n-X^*)+K(X_n,Y_n)|-|L(Y^*)|\\&\geqslant|L(Y_n)|-|A^*(X_n-X^*)|-|K(X_n,Y_n)|-|L(Y^*)|\\&=|B^*|\big(g(r_n)-g(r^*)\big)-|A^*(X_n-X^*)|-|K(X_n,Y_n)|.\end{aligned}$$

En posant

$$(4.15)\qquad \begin{aligned}a_n&=|B^*|\big(g(r_n)-g(r^*)\big)/(r_n-r^*),\\ b_n&=-|A^*(X_n-X^*)|/(r_n-r^*),\\ c_n&=-|K(X_n,Y_n)|/(r_n-r^*)\end{aligned}$$

et en divisant la dernière inégalité par $r_n-r^*<0$, on obtient

$$(4.16)\qquad \big(M(r_n)-M(r^*)\big)/(r_n-r^*)\leqslant a_n+b_n+c_n.$$

Remarquons qu'en vertu de (4.11), (4.13) et de (4.10) on a

$$(4.17)\qquad |X_n-X^*|=r^*-r_n,\qquad |Y_n-Y^*|=g(r_n)-g(r^*),$$

$$(4.18)\qquad (|X_n-X^*|^2+|Y_n-Y^*|^2)^{1/2}=(r^*-r_n)\left(1+\left[\frac{g(r_n)-g(r^*)}{r_n-r^*}\right]^2\right)^{1/2}.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz et de (4.17) on a

$$(4.19)\qquad b_n\leqslant|A^*|\cdot|X_n-X^*|/(r^*-r_n)=|A^*|,$$

et en vertu de (4.15) et (4.18)

$$(4.20)\qquad c_n\leqslant\big\{|K(X_n,Y_n)|\cdot\big(|X_n-X^*|^2+|Y_n-Y^*|^2\big)^{-1/2}\big\}\times\\ \times\left(1+\left[\frac{g(r_n)-g(r^*)}{r_n-r^*}\right]^2\right)^{1/2}.$$

Des relations (4.15), (4.19), (4.20) et (4.8) il résulte, pour $n\to\infty$, que

$$\lim a_n=|B^*|g'_-(r^*),\qquad \overline{\lim}\, b_n\leqslant|A^*|,\qquad \overline{\lim}\, c_n\leqslant\varepsilon\big(1+[g'_-(r^*)]^2\big)^{1/2}.$$

Comme $g(r)$ est décroissante on a $g'_-(r^*)\leqslant 0$, $g'_-(r^*)=-|g'_-(r^*)|$. Ces relations, rapprochées de l'inégalité (4.16), impliquent l'inégalité (4.6), ce qui termine la démonstration.

§ 5. Théorème 2. *En tenant compte de la définition des ensembles* $E=E(g,c,X^\circ,Y^\circ)$ *et* $S(r)$ (cf. § 4) *admettons les hypothèses suivantes:*

I. *Pour* $0\leqslant r<c$, *on a* $g(r)>0$, $g'(r)\leqslant 0$, *et la dérivée* $g'(r)$ *est continue.*

II. *Les fonctions s_k intervenant dans le système d'équations différentielles ordinaires*

(5.1) $$u_k'(r)=s_k(r,u_1,\ldots,u_n)+\varepsilon\big(1+[g'(r)]^2\big)^{1/2}\qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

sont continues dans un ensemble ouvert Ω de l'espace des points réels $r,u_1,\ldots,u_n$, et croissantes au sens large relativement à $u_1,\ldots,u_n$, c'est-à-dire

$$s_k(r,u_1,\ldots,u_n)\leqslant s_k(r,\bar u_1,\ldots,\bar u_n)\quad \textit{lorsque}\quad u_i\leqslant \bar u_i\ .\ (i=1,2,\ldots,n).$$

III. *L'intégrale supérieure du système* (5.1)

$$u_k=h_k(r)\qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

issue du point

$$r=0,\qquad u_j=m_j\geqslant 0\qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

existe dans l'intervalle $0\leqslant r<c$ [2]).

IV. *Les fonctions réelles ou complexes $f_k(X,Y)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ des points réels ou complexes (X,Y)* (cf. les notations (1.1) et (1.2)) *sont continues dans l'ensemble E, et y possèdent partout une différentielle ε-approximative, où ε désigne un nombre fixe $(\varepsilon\geqslant 0)$.*

V. *Sur les sections $S(r)$ $(0<r<c)$ pour des exemplaires convenables de gradients ε-approximatifs des fonctions $f_k(X,Y)$ ont lieu les inégalités* [3]).

(5.2) $$|\mathrm{grad}_X(\varepsilon,f_k(X,Y))|\leqslant|g'(r)|\,|\mathrm{grad}_Y(\varepsilon,f_k(X,Y))|+$$
$$+s_k\big(r,|f_1(X,Y)|,\ldots,|f_n(X,Y)|\big)\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

De plus

(5.3) $$|f_k(X,Y)|\leqslant m_k\qquad (k=1,2,\ldots,n)\quad \textit{lorsque}\quad (X,Y)\in S(0).$$

Ceci étant admis on a les inégalités

(5.4) $$|f_k(X,Y)|\leqslant h_k(|X-X^\circ|)\qquad (k=1,2,\ldots,n)\qquad \textit{lorsque}\quad (X,Y)\in E.$$

Remarque 2. Le théorème précédent reste vrai lorsque l'on pose $\varepsilon=\varepsilon(r)\geqslant 0$, où $\varepsilon(r)$ désigne une fonction de r, continue dans l'intervalle $0\leqslant r<c$. La démonstration qui suit s'applique aussi, sans modification, à ce cas.

[2]) En ce qui concerne l'existence des intégrales supérieures d'un système d'équations, voir [1] et [6].

[3]) L'hypothèse (5.2) peut être remplacée par l'hypothèse équivalente que pour les $(X,Y)\in E$ aient lieu les inégalités

$$|\mathrm{grad}_X(\varepsilon,f_k(X,Y))|\leqslant|g'(|X-X^\circ|)|\,|\mathrm{grad}_Y(\varepsilon,f_k(X,Y))|+$$
$$+s_k\big(|X-X^\circ|,|f_1(X,Y)|,\ldots,|f_n(X,Y)|\big)\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Démonstration. Posons

(5.5) $$M_k(r)=\max|f_k(X,Y)|\quad \text{sur la section}\quad S(r).$$

Soit $0<r^*<c$. Il existe un point

(5.6) $$(X_k^*,Y_k^*)\in S(r^*)$$

tel que

(5.7) $$M_k(r^*)=|f_k(X_k^*,Y_k^*)|.$$

On a, en vertu du théorème 1,

(5.8) $$\bar D_-M_k(r^*)\leqslant|A_k^*|-|g'(r^*)|\,|B_k^*|+\varepsilon\big((1+[g'(r^*)]^2\big)^{1/2},$$

où A_k^* et B_k^* désignent des exemplaires quelconques de gradients ε-approximatifs

$$A_k^*=\mathrm{grad}_X\big(\varepsilon,f_k(X^*,Y^*)\big),\qquad B_k^*=\mathrm{grad}_Y\big(\varepsilon,f_k(X^*,Y^*)\big).$$

On peut, en particulier, choisir, comme A_k^*, B_k^*, les exemplaires de gradients ε-approximatifs qui interviennent dans les inégalités (5.2) (cf. remarque 1 du § 4). Les inégalités (5.2) peuvent donc être écrites sous la forme

(5.9) $$|A_k^*|\leqslant|g'(r^*)|\,|B_k^*|+s_k\big(r^*,|f_1(X_k^*,Y_k^*)|,\ldots,|f_n(X_k^*,Y_k^*)|\big).$$

Mais, en vertu de (5.5) et (5.6), on a

$$|f_i(X_k^*,Y_k^*)|\leqslant M_i(r^*)\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

La fonction $s_k(r,u_1,\ldots,u_n)$ étant croissante au sens large relativement aux variables $u_1,\ldots,u_n$, on déduit de (5.9) les inégalités

$$|A_k^*|\leqslant|g'(r^*)|\,|B_k^*|+s_k\big(r^*,M_1(r^*),\ldots,M_n(r^*)\big).$$

Ces dernières rapprochées des inégalités (5.8) conduisent au système d'inégalités différentielles *ordinaires*

$$\bar D_-M_k(r^*)\leqslant s_k\big(r^*,M_1(r^*),\ldots,M_n(r^*)\big)+\varepsilon\big(1+[g'(r^*)]^2\big)^{1/2}.$$

On a donc, pour $0<r<c$ et pour $k=1,2,\ldots,n$, les inégalités

(5.10) $$\bar D_-M_k(r)\leqslant s_k\big(r,M_1(r),\ldots,M_n(r)\big)+\varepsilon\big(1+[g'(r)]^2\big)^{1/2}.$$

Des inégalités (5.3) il résulte que

(5.11) $$M_k(0)\leqslant m_k\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

En s'appuyant sur un théorème connu ([6], p. 124) on obtient, en vertu de (5.10), (5.11) et de ce que les fonctions $M_k(r)$ sont continues dans l'intervalle $0\leqslant r<c$,

$$M_k(r)\leqslant h_k(r)\qquad (0\leqslant r<c),\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Or pour $(X, Y) \epsilon S(r)$ on a

$$|f_k(X, Y)| \leqslant M(r), \qquad |X-X^\circ| = r.$$

Il s'ensuit que

$$|f_k(X, Y)| \leqslant h_k(|X-X^\circ|) \quad \text{pour} \quad (X, Y) \epsilon E, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 6. Approximation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles par les surfaces brisées. Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\text{(6.1)} \qquad \partial z_k/\partial x_i = G_{ki}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, \partial z_k/\partial y_1, \ldots, \partial z_k/\partial y_q, z_1, \ldots, z_n)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les fonctions G_{ki} ne renferment pas les dérivées partielles des fonctions $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n$. Soit

$$z_k = L_k(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

un système de fonctions possédant, dans un ensemble Z, une différentielle ε-approximative $(\varepsilon \geqslant 0)$.

Soit $\eta > 0$ un nombre fixe. On dira que la suite de fonctions brisées $L_1, \ldots, L_n$ constitue une solution approchée au sens $s(\varepsilon, \eta)$ du système (6.1) dans l'ensemble Z si, pour chaque $(X, Y) \epsilon Z$, ont lieu les inégalités

$$\text{(6.2)} \qquad |D_{x_i}(\varepsilon, L_k(X, Y)) - G_{ki}[(X, Y, D_{y_1}((\varepsilon, L_k(X, Y)), \ldots$$
$$\ldots, D_{y_q}(\varepsilon, L_k(X, Y)), L_1, \ldots, L_n]| \leqslant \eta \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\; k = 1, 2, \ldots, n)$$

pour des exemplaires convenables des dérivées ε-approximatives D_{x_i} et D_{y_j}.

Les solutions approchées $L_k(X, Y)$ dépendent, en général, de ε et de η. Se pose le problème de savoir dans quelles conditions les intégrales approchées L_k tendent vers les intégrales exactes du système (6.1) lorsque $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$.

Voici un théorème relatif à ce problème.

Théorème 3. *Admettons que les fonctions*

$$G_{ki}(X, Y, v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kq}, z_1, \ldots, z_n)$$

soient définies dans l'ensemble Z

$$|X-X^\circ| \leqslant a < \infty, \qquad |Y-Y^\circ| \leqslant b < \infty, \qquad v_{kj}, z_k \text{ quelconques},$$

et qu'elles y satisfassent à l'inégalité de Lipschitz

$$\text{(6.3)} \qquad |G_{ki}(X, Y, \bar{v}_{k1}, \ldots, \bar{v}_{kq}, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) - G_{ki}(X, Y, v_{k1}, \ldots, v_{kq}, z_1, \ldots, z_n)|$$
$$\leqslant R \sum_{j=1}^{q} |\bar{v}_{kj} - v_{kj}| + W \sum_{i=1}^{n} |\bar{z}_i - z_i|$$

où R et W sont fixes, $W > 0$.

Désignons par E l'ensemble des points (X, Y) pour lesquels

$$|Y-Y^\circ| \leqslant b - Rpq|X-X^\circ|, \qquad |X-X^\circ| < c = \min(a, b/pqR).$$

Si $R = 0$, on pose $c = a$. Supposons que la suite des fonctions $z_k = N_k(X, Y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ possédant la différentielle de Stolz en chaque point de E représente une solution (exacte) du système (6.1) *définie dans l'ensemble E, et que la suite des fonctions brisées $z_k = L_k(X, Y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ constitue une intégrale approchée au sens $s(\varepsilon, \eta)$ du système* (6.1) *envisagé dans l'ensemble E.*

Supposons que, pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$|L_k(X^\circ, Y) - N_k(X^\circ, Y)| \leqslant \zeta \quad \text{lorsque} \quad |Y-Y^\circ| \leqslant b.$$

Ceci étant admis on a, dans l'ensemble E, les inégalités

$$|L_k(X, Y) - N_k(X, Y)| \leqslant H(|X-X^\circ|, \varepsilon, \eta, \zeta)$$

où $H(r, \varepsilon, \eta, \zeta) = B(\varepsilon, \eta) A^{-1}(e^{Ar} - 1) + \zeta e^{Ar}$ et

$$\text{(6.4)} \qquad B(\varepsilon, \eta) = p\eta + \varepsilon(1 + (pqR)^2)^{1/2}, \qquad A = pnW.$$

Si $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$, $\zeta \to 0$, alors $L_k(X, Y) \to N_k(X, Y)$ uniformément dans l'ensemble E.

Démonstration. Posons $f_k(X, Y) = L_k(X, Y) - N_k(X, Y)$.

Nous démontrerons que les fonctions $f_k(X, Y)$ vérifient une inégalité de la forme (5.2), et nous appliquerons ensuite le Théorème 2.

Les fonctions $N_k(X, Y)$ possédant la différentielle de Stolz, on démontre facilement, en s'appuyant sur la définition des dérivées partielles ε-approximatives, que l'identité

$$D_{x_i}(\varepsilon, L_k - N_k) \equiv D_{x_i}(\varepsilon, L_k) - \partial N_k/\partial x_i$$

a lieu pour des exemplaires convenables des dérivées approximatives.

En vertu de (6.2).

$$D_{x_i}(\varepsilon, L_k(X, Y)) \equiv \vartheta_{ik}\eta + G_{ik}(X, Y, D_{y_1}(\varepsilon, L_k(X, Y)), \ldots, L_1, \ldots, L_n)$$

où $|\vartheta_{ik}| \leqslant 1$. On a

$$\partial N_k/\partial x_i \equiv G_{ki}(X, Y, \partial N_k/\partial y_1, \ldots, \partial N_k/\partial y_q, N_1, \ldots, N_n).$$

Ces deux identités rapprochées de (6.3) donnent

$$|D_{x_i}(\varepsilon, L_k - N_k)| \leqslant \eta + R \sum_{j=1}^{q} |D_{y_j}(\varepsilon, L_k - N_k)| + W \sum_{j=1}^{n} |L_j - N_j|$$

d'ou $\sum_{i=1}^{p} |D_{x_i}(\varepsilon, f_k(X, Y))| \leqslant pR \sum_{j=1}^{q} |D_{y_j}(\varepsilon, f_k)| + pW \sum_{j=1}^{n} |f_j| + p\eta$. On a évidemment

$$|\mathrm{Grad}_X(\varepsilon, f_k)| = \Big(\sum_{i=1}^{p} |D_{x_i}(\varepsilon, f_k)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^{p} |D_{x_i}(\varepsilon, f_k)|,$$

$$|D_{y_j}(\varepsilon, f_k)| \leqslant |\mathrm{Grad}_Y(\varepsilon, f_k)|$$

et, par suite,

$$(6.5) \qquad |\mathrm{Grad}_X(\varepsilon, f_k)| \leqslant pqR |\mathrm{Grad}_Y(\varepsilon, f_k)| + pW \sum_{i=1}^{n} |f_i| + p\eta.$$

Cette inégalité a la forme (5.2). Pour appliquer le Théorème 2 posons $g(r) = b - pqRr$, $s_k(r, u_1, \ldots, u_n) = pW \sum_{i=1}^{n} u_i + p\eta$, $m_i = \zeta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. L'ensemble $E = E(g, c, X^\circ, Y^\circ)$ est défini (cf. (4.2)) par les relations

$$|Y - Y^\circ| \leqslant b - pqR|X - X^\circ|, \qquad |X - X^\circ| < c = \min(a, b/pqR).$$

L'ensemble $S(r)$ est défini par les relations

$$|Y - Y^\circ| \leqslant b - pqR|X - X^\circ|, \qquad |X - X^\circ| = r.$$

On voit facilement que les prémisses du Théorème 2 se trouvent vérifiées et que l'inégalité (6.5) coïncide avec l'inégalité (5.2).

Le système d'équations (5.1) a maintenant la forme

$$u_k'(r) = pW \sum_{i=1}^{n} u_i + p\eta + \varepsilon\big(1 + (pqR)^2\big)^{1/2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'unique intégrale $u_k = h_k(r)$ de ce système, qui passe par le point $r = 0$, $u_j = m_j = \zeta$, a la forme

$$u_k = h_k(r) = H_k(r, \varepsilon, \eta, \zeta) = B(\varepsilon, \eta) A^{-1}(e^{Ar} - 1) + \zeta e^{Ar},$$

où $B(\varepsilon, \eta)$ et A sont données par les formules (6.4). En appliquant le Théorème 2 on obtient, pour $(X, Y) \epsilon E$, l'inégalité

$$|f_k(X, Y)| = |L_k(X, Y) - N_k(X, Y)| \leqslant H(|X - X^\circ|, \varepsilon, \eta, \zeta).$$

Or pour $(X, Y) \epsilon E$ et pour $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$, $\zeta \to 0$, on a $H(|X - X^\circ|, \varepsilon, \eta, \zeta) \to 0$ uniformément dans E. Il s'ensuit que $L_k(X, Y) \to N_k(X, Y)$ uniformément dans E lorsque ε, η et ζ tendent vers zéro, c. q. f. d.

§ 7. Une méthode d'approcher l'intégrale de l'équation $p = f(x, y, z, q)$ au moyen de surfaces brisées. Admettons que la fonction $f(x,y,z,q)$ soit partout de classe C^2 [4]) et envisageons l'équation

$$(7.1) \qquad \partial z(x, y)/\partial x = f\big(x, y, z(x, y), \partial z(x,y)/\partial y\big).$$

Soit

$$(7.2) \qquad x = 0, \qquad y = s, \qquad z = w(s)$$

une courbe initiale de classe C^2 dans l'intervalle $a \leqslant s \leqslant b$.

Divisons cet intervalle en n parties égales. Les points de division sont donnés par les formules

$$s_{in} = a + i(b - a)/n \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Posons

$$A(x, y, z, q) = -f_q(x, y, z, q), \qquad B(x, y, z, q) = f(x, y, z, q) - q f_q(x, y, z, q)$$

et introduisons le système suivant de $2n+2$ équations différentielles ordinaires

$$(7.3_{0n}) \qquad \frac{dy_{0n}}{dx} = A\left(x, y_{0n}, z_{0n}, \frac{z_{1n} - z_{0n}}{y_{1n} - y_{0n}}\right), \qquad \frac{dz_{0n}}{dx} = B\left(x, y_{0n}, z_{0n}, \frac{z_{1n} - z_{0n}}{y_{1n} - y_{0n}}\right),$$

$$(7.3_{1n}) \qquad \frac{dy_{1n}}{dx} = A\left(x, y_{1n}, z_{1n}, \frac{z_{1n} - z_{0n}}{y_{1n} - y_{0n}}\right), \qquad \frac{dz_{1n}}{dx} = B\left(x, y_{1n}, z_{1n}, \frac{z_{1n} - z_{0n}}{y_{1n} - y_{0n}}\right),$$

$$(7.3_{in}) \qquad \frac{dy_{in}}{dx} = A\left(x, y_{in}, z_{in}, \frac{z_{in} - z_{i-1,n}}{y_{in} - y_{i-1,n}}\right), \qquad \frac{dz_{in}}{dx} = B\left(x, y_{in}, z_{in}, \frac{z_{in} - z_{i-1,n}}{y_{in} - y_{i-1,n}}\right),$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$.

On voit que les équations (7.3_{0n}) sont formées suivant une autre règle que les équations (7.3_{in}) pour les indices $i = 1, 2, \ldots, n$.

Envisageons la solution de ce système de $2n+2$ équations

$$(7.4) \qquad y_{in} = y_{in}(x), \qquad z_{in} = z_{in}(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

qui prend les valeurs initiales

$$y_{in}(0) = s_{in}, \qquad z_{in}(0) = w(s_{in}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Pour un indice i fixe les deux équations (7.4) réprésentent une courbe C_i

$$y = y_{in}(x), \qquad z = z_{in}(x)$$

située dans l'espace des points (x, y, z).

[4]) Il suffirait d'admettre que f soit de classe C^2 dans un voisinage d'un point x_0, y_0, z_0, q_0.

À la solution en question de notre système de $2n+2$ équations correspond ainsi un système de $n+1$ courbes $C_0, C_1, \ldots, C_n$, issues de la courbe initiale (7.2). La courbe initiale et les courbes $C_0, C_1, \ldots, C_n$ constituent une sorte de peigne à $n+1$ dents. Si $n \to \infty$, le nombre des dents croît infiniment et le peigne représente une approximation de plus en plus bonne d'une surface limite. Afin de faciliter le passage à la limite nous définirons une surface auxiliaire S_n sur laquelle est située le peigne en question. L'équation de S_n aura la forme $y = g_n(x, y)$.

Pour (x, y) vérifiant les inégalités $y_{i-1,n}(x) \leqslant y \leqslant y_{in}(x)$, on pose

$$g_n(x,y) = z_{i-1,n}(x) + \big(y - y_{i-1,n}(x)\big)\big(z_{in}(x) - z_{i-1,n}(x)\big)/\big(y_{in}(x) - y_{i-1,n}(x)\big).$$

En s'appuyant sur le Théorème 2 on peut démontrer que, dans un voisinage de la courbe (7.2), la suite des fonctions $g_n(x,y)$ tend vers l'intégrale de l'équation (7.1), passant par la courbe (7.2).

La démonstration est pénible surtout pour cette raison qu'il faut démontrer qu'il existe un $h > 0$, tel que les différences $y_{in}(x) - y_{i-1,n}(x)$, intervenant dans le dénominateur, soient différentes de zéro dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant h$ [5]).

On peut démontrer que les courbes C_i tendent vers les caractéristiques de la surface intégrale de l'équation (7.1) lorsque $n \to \infty$.

Les quatre équations (7.3_{0n}) et (7.3_{1n}) peuvent être considérées indépendamment des autres car elles englobent quatre fonctions inconnues. Elles suffisent pour déterminer les courbes C_0 et C_1. Ces courbes tendent vers une même caractéristique de la surface intégrale de (7.1) passant par la courbe (7.2). On peut de plus démontrer que le rapport

$$\big(z_{1n}(x) - z_{0n}(x)\big)/\big(y_{1n}(x) - y_{0n}(x)\big)$$

tend vers la dérivée partielle $\partial z(x,y)/\partial y$ de la surface intégrale.

Et ainsi, en se servant de ces quatre équations, on peut obtenir une définition des caractéristiques indépendamment des surfaces intégrales de l'équation (7.1).

C'est en partant de cette définition que j'ai été conduit à l'idée d'approcher les surfaces intégrales de l'équation (7.1) par les surfaces brisées. Un article ultérieur sera consacré au développement plus détailleux des idées qui viennent d'être esquissées tout-à-l'heure.

[5]) S. Łojasiewicz [2] a eu l'excellente idée de remplacer le système (7.3) par un autre système d'équations différentielles ordinaires, dont les intégrales (jouant le rôle des courbes C_i) se projettent sur le plan (x,y) comme segments parallèles à l'axe x et forment un peigne à dents plats. Dans la construction de celui-ci la difficulté mentionnée relative à la différence $y_{in} - y_{i-1,n}$ se trouve totalement éliminée.

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen II*, Acta Mathematica 58 (1932), p. 57.

[2] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas hyperbolique de deux variables*, à paraître dans Annales Polonici Mathematici 3.

[3] T. Ważewski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Rendiconti dei Lincei 18 (1933), p. 372.

[4] — *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Annali di Matematica pura ed applicata 15 (1936-7), p. 155.

[5] — *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes*, Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937), p. 97.

[6] — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 112.

[7] — *O pewnych nierównościach różniczkowych cząstkowych w zakresie funkcji posiadających różniczkę aproksymatywną*, VIII Zjazd Matematyków Polskich (1953), Komunikaty Zjazdowe, litographié, p. 43.