D'autre part $I\{\Phi_\varkappa(r)\}\to I\{F(r)\}$ si $\varkappa\to 1$, donc finalement on obtient de (78) et (80) évaluation de la partie imaginaire de la fonction $F(z)$ dans F_∞ de la forme $I\{F(r)\}\leqslant S(r,\infty)$ [12]).

Pour démontrer que la limite $S(r,\infty)$ est atteinte considérons maintenant la suite de fonctions extrémales $F_n^*(z)$ par rapport à l'opération $K(F)$ dans la famille F_{M_n}, où M_n est une suite convergente vers l'infini. On peut admettre, vu que la famille F_∞ est normale, par le choix d'une suite partielle, que la suite $F_n^*(z)$ est convergente vers une certaine fonction limite $F_0(z)$. On a alors

$$\lim I\{F_n^*(r)\} = I\{F_0(r)\},$$

et comme $I\{F_n^*(r)\}=S(r,M_n)$ on a $I\{F_0(r)\}=S(r,\infty)$, ce qui démontre finalement le théorème 2.

Travaux cités

[1] L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vol. I et II, New York 1945.

[2] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2 (1953), p. 3-57.

[3] Z. Charzyński, W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska 4, Sectio A, Mathematica (1950), p. 41-56.

[4] H. Grunsky, *Neue Abschätzungen zur Konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche*, Math. Sem. Univ. Berlin 1 (1932).

[12]) Les résultats obtenus pour les fonctions non bornées coïncident avec ceux que H. Grunsky a obtenu par d'autres procédés; voir [4].

Sur les fonctions univalentes K-symétriques

par W. Janowski (Łódź)

Considérons les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$\Phi(z) = z + B_2 z^{K+1} + B_3 z^{2K+1} + \dots, \tag{1}$$

où K est un nombre entier et positif. Soit $M>1$ un nombre positif quelconque, Φ_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|\Phi(z)|<M$ et Φ_∞ — la famille de toutes les fonctions de la forme (1).

Les valeurs z ou bien $1>r>0$ étant fixées, on peut s'occuper des expressions suivantes

(2) $|\Phi(z)|$, (4) $R\{\Phi(r)\}$,

(3) $\arg(\Phi(z)/z)$[1]), (5) $I\{\Phi(r)\}$

au sens de trouver leurs limites supérieures dans les familles Φ_M et Φ_∞.

On voit bien que pour les expressions (2)-(4) on obtient ces limites immédiatement, en profitant des résultats connus pour les fonctions 1-symétriques (voir [2] et [4]).

Pour les fonctions de la famille Φ_M et respectivement pour les fonctions de la famille Φ_∞ on a des inégalités

$$|\Phi(z)|\leqslant R_M, \qquad \Phi(z)\in\Phi_M, \tag{6}$$

où R_M $(0<R_M<|z|)$ satisfait à l'équation $R_M^K/[1-(R_M/M)^K]^2 = |z|^K/(1-|z|^K)^2$;

$$|\Phi(z)|\leqslant R_\infty, \qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty \tag{7}$$

où $R_\infty = |z|/(1-|z|^K)^{2/K}$;

$$\arg(\Phi(z)/z)\leqslant \Omega_M, \qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty \tag{8}$$

où Ω_M et R_M $(0<R_M<|z|)$ satisfont aux équations

[1]) On prend la branche de l'argument qui est égale à 0, pour $z=0$.

$$\Omega_M=\frac{1}{K}\cdot\frac{1-(R_M/M)^{2K}}{1+(R_M/M)^{2K}}\log\left[\frac{1-(R_M/M)^K}{1+(R_M/M)^K}:\frac{1-|z|^K}{1+|z|^K}\right],$$

$$\frac{2(R_M/M)^K}{1+(R_M/M)^{2K}}\log\left[\frac{1-(R_M/M)^K}{1+R_M/M)^K}:\frac{1-|z|^K}{1+|z|^K}\right]+\log M^K\frac{1-|z|^{2K}}{|z|^K[(M/R_M)^K-(R_M/M)^K]}=0;$$

(9) $$\arg(\Phi(z)/z)\leqslant\Omega_\infty,\qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty,$$

où $\Omega_\infty=K^{-1}\log[(1+|z|^K)/(1-|z|^K)]$;

(10) $$R\{\Phi(r)\}\leqslant R_M,\qquad \Phi(z)\in\Phi_M,$$

où R_M $(0<R_M<r)$ *satisfait à l'équation* $R_M^K[1-(R_M/M)^K]^{-2}=r^K(1-r^K)^{-2}$;

(11) $$R\{\Phi(r)\}\leqslant R_\infty,\qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty$$

où $R_\infty=r(1-r^K)^{-2/K}$; *et ces limites sont atteintes.*

À cause de cela nous nous bornons à la déduction des limites précises pour l'expression (5).

Les théorèmes fondamentaux. *Pour les fonctions de la famille* Φ_M *et respectivement pour les fonctions de la famille* Φ_∞ *on a des inégalités*

(I) $$I\{\Phi(r)\}\leqslant R_M\sin\Omega_M,\qquad \Phi(z)\in\Phi_M$$

où R_M $(0<R_M<r)$ *et* Ω_M $(\sin\Omega_M>0)$ *présentent une solution des équations aux inconnues* R *et* Ω

(12) $$\frac{[1+(R/M)^{2K}]\sin\Omega-2(R/M)^K}{2(R/M)^K\sin\Omega-[1+(R/M)^{2K}]}\log\left[\frac{1-(R/M)^K}{1+(R/M)^K}:\frac{1-r^K}{1+r^K}\right]+$$
$$+\log M^K\frac{1-r^{2K}}{r^K[(M/R)^K-(R/M)^K]}=0,$$

(13) $$\Omega_M=\frac{1}{K}\left\{\log^2\left[\frac{1-(R/M)^K}{1+(R/M)^K}:\frac{1-r^K}{1+r^K}\right]-\right.$$
$$\left.-\log^2 M^K\frac{1-r^{2K}}{r^K[(M/R)^K-(R/M)^K]}\right\}^{1/2}+2\pi\frac{l}{K}$$

l étant un nombre entier entre 0 et $K-1$. Ce nombre l et la solution R_M, Ω_M doivent être choisis encore d'une telle façon que le produit $R\sin\Omega$ soit le plus grand.

(II) $$I\{\Phi(r)\}\leqslant R_\infty\sin\Omega_\infty,\qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty$$

où R_∞ *et* Ω_∞ *satisfont aux équations*

(14) $$\log R_\infty=K^{-1}\{\log[r^K/(1-r^{2K})]+\sin\Omega_\infty\log[(1+r^K)/(1-r^K)]\},$$

(15) $$\Omega_\infty=K^{-1}\cos\Omega_\infty\log[(1+r^K)/(1-r^K)]+2\pi lK^{-1}$$

et ces limites sont atteintes.

Démonstration des théorèmes fondamentaux. Avant de procéder à la démonstration de ces théorèmes il y a lieu de remarquer que nos théorèmes sont équivalents à ceux qui établissent l'existence des fonctions extrémales par rapport à la fonctionnelle (5) dans la famille Φ_M resp. dans Φ_∞ dont la partie imaginaire est égale à $R_M\sin\Omega_M$ ou resp. $R_\infty\sin\Omega_\infty$, données par les formules (12)-(13) resp. (14)-(15).

Pour démontrer ces théorèmes considérons d'abord les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

(16) $$\varphi(z)=b_1z+b_2z^{K+1}+b_3z^{2K+1}+\ldots=b_1(z+B_2z^{K+1}+\ldots)$$

où $b_1\geqslant T^{1/K}$, T — un nombre quelconque fixe de l'intervalle (0,1) et assujetties à la condition $|\varphi(z)|<1$.

Considérons la famille de toutes les fonctions de la forme (16). Nous l'appelons la famille φ_T. On voit facilement que la recherche des limites précises de l'expression (5) de (1) dans la famille Φ_M est tout à fait équivalente au problème analogue pour l'expression $I\{\varphi(r)/b_1\}$ dans la famille φ_M, en posant $T=M^{-K}$. Soit ensuite

(17) $$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots=a_1(z+A_2z^2+\ldots)$$

la fonction holomorphe univalente dans le cercle $|z|<1$ telle que $a_1>0$ et

(18) $$\varphi(z)=[f(z^K)]^{1/K},$$

où la fonction $\varphi(z)$ est une fonction quelconque donnée de la famille φ_T. On voit qu'une telle fonction (17) existe, est définie univoquement et appartient à la famille F_T de toutes les fonctions univalentes bornées dans $|z|<1$ de la forme (17) où $a_1\geqslant T$. Considérons la fonctionnelle

(19) $$K(f)=I\{[f(r^K)/a_1]^{1/K}\},$$

déterminée dans la famille F_T. On voit bien que pour la fonction (18) on a $I\{\varphi(r)/b_1\}=K(f)$. Il en résulte facilement que la recherche des limites précides pour (5) de (16) est équivalente au problème analogue pour l'expression (19) dans la famille F_T.

Il suffit donc de prouver l'existence et de déduire l'équation des fonctions extrémales $f^*=f^*(z)$ de la famille F_T pour lesquelles la fonctionnelle (19) atteint son maximum, d'où, en vertu de certaines propriétés de cette équation nous obtiendrons, tous les calculs faits, certaines rélations qui conduisent à déterminer la fonctionnelle (19) pour $f=f^*$. Enfin, en retournant de F_T, par φ_T à Φ_M nous obtiendrons aisément le théorème (I), et ensuite, en passant à la limite, le théorème (II).

Nous démontrerons maintenant le théorème (I). Dans ce but considérons la fonctionnelle (19). Nous constatons sans peine que la fonctionnelle (19) possède dans chaque point f de la famille F_T la différentielle (voir [1], p. 43)

$$(20)\qquad L(h) = K^{-1} I\{[f(r^K)/a_1]^{1/K}[h(r^K)/f(r^K) - \Delta a_{1h}/a_1]\}, \quad h = h(z) \in H.$$

On voit aisément (comparer [3], p. 183) qu'on peut appliquer à la fonctionnelle (19) les résultats de Z. Charzyński et W. Janowski (voir [1], p. 45) relatifs aux fonctions extrémales par rapport à la fonctionnelle (19) dans la famille F_T.

Il résulte de ces considérations qu'il existe des fonctions extrémales respectives et qu'elles satisfont à l'équation:

$$(21)\qquad [f^{*\prime}(z)/f^*(z)]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = z^{-2}\mathfrak{N}(z) \quad \text{pour} \quad z \in E^*,$$

où

$$(22)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}(\omega) &\equiv D^*[\Psi[f^*(\zeta), \omega^{-1}]] + \hat{D}^*[\Psi[\hat{f}^*(\zeta), \omega]] - 2\mathfrak{P}^*, \\ \mathfrak{N}(z) &\equiv D^*[\Psi(\zeta, z^{-1}) f^{*\prime}(\zeta)] + \hat{D}^*[\Psi(\zeta, z)\hat{f}^{*\prime}(\zeta)] - 2\mathfrak{P}^*. \end{aligned}$$

ζ désigne la variable apparente de l'opération, tandis que z joue dans (22) le rôle d'un paramètre

$$(23)\qquad \begin{gathered} \Psi(\omega, \lambda) \equiv \omega(1+\omega\lambda)(1-\omega\lambda)^{-1}, \\ D^*(h) = L^*(h) - iL^*(hi), \qquad \hat{D}^*(\hat{h}) = L^*(h) + iL^*(hi), \end{gathered}$$

$L^*(h)$ — la différentielle de la fonctionnelle (19) au point f^*

$$\mathfrak{P}^* = \min_{0 \leqslant \psi < 2\pi} \{D^*(\Psi[f^*(\zeta), e^{-i\psi}]) + \hat{D}^*(\Psi[\hat{f}^*(\zeta), e^{i\psi}])\}/2.$$

D'aprés (23)

$$(24)\qquad D^*(h) + \hat{D}^*(\hat{h}) = 2L^*(h).$$

Selon (24) et (20) les formules (22) prendront la forme:

$$(25)\qquad \mathfrak{M}(\omega) = \frac{2}{K} I\left\{\left(\frac{f^*(r^K)}{a_1^*}\right)^{1/K}\left[\frac{\omega + f^*(r^K)}{\omega - f^*(r^K)} - 1\right]\right\} - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$(26)\qquad \mathfrak{N}(z) = \frac{2}{K} I\left\{\left(\frac{f^*(r^K)}{a_1^*}\right)^{1/K}\left[\frac{z+r^K}{z-r^K}\cdot\frac{f^{*\prime}(r^K)}{f^*(r^K)}\, r^K - 1\right]\right\} - 2\mathfrak{P}^*;$$

et par conséquent

$$\mathfrak{M}(\omega) = \frac{1}{iK}\left[\left(\frac{f^*(r^K)}{a_1^*}\right)^{1/K}\left(\frac{\omega + f^*(r^K)}{\omega - f^*(r^K)} - 1\right) - \left(\frac{\bar{f}^*(r^K)}{a_1^*}\right)^{1/K}\left(\frac{1+\omega\bar{f}^*(r^K)}{1-\omega\bar{f}^*(r^K)} - 1\right)\right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{1}{iK}\left[\left(\frac{f^*(r^K)}{a_1^*}\right)^{1/K}\left(\frac{z+r^K}{z-r^K}\cdot\frac{f^{*\prime}(r^K)}{f^*(r^K)}\, r^K - 1\right) - \left(\frac{\bar{f}^*(r^K)}{a_1^*}\right)^{1/K}\left(\frac{1+r^K z}{1-r^K z}\cdot\frac{\bar{f}^{*\prime}(r^K)}{\bar{f}^*(r^K)}\, r^K - 1\right)\right] - 2\mathfrak{P}^*.$$

Posons pour abréger $f^*(z) = \omega$, $f^{*\prime}(z) = \omega'$, et soit

$$f^*(r^K) = \varrho e^{i\varphi}, \qquad \bar{f}^*(r^K) = \varrho e^{-i\varphi}, \qquad f^{*\prime}(r^K) = \tau e^{i\vartheta}, \qquad \bar{f}^{*\prime}(r^K) = \tau e^{-i\vartheta}.$$

L'équation (21) prendra alors (après avoir multiplié les deux membres par $iK\sqrt[K]{a_1^*}$) la forme suivante:

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\varrho^{1/K} e^{i\varphi/K}\frac{\omega + \varrho e^{i\varphi}}{\omega - \varrho e^{i\varphi}} - \varrho^{1/K} e^{-i\varphi/K}\frac{1+\omega\varrho e^{-i\varphi}}{1-\omega\varrho e^{-i\varphi}} + 2a\right) \\ &= z^{-2}\left(\varrho^{1/K} e^{i\varphi/K}\frac{z+r^K}{z-r^K}\cdot\frac{\tau}{\varrho}\, e^{i(\vartheta-\varphi)} - \varrho^{1/K} e^{-i\varphi/K}\frac{1+r^K z}{1-r^K z}\cdot\frac{\tau}{\varrho}\, e^{-i(\vartheta-\varphi)}\, r^K + 2a\right), \end{aligned}$$

où on a posé $\mathfrak{P}^* = K^{-1} a_1^{*-1/K}[ia - \varrho^{1/K}\sin(\varphi/K)]$. Ensuite, comme il existe des nombres p_i, q_i $(i = 1, 2)$ différents de zéro, tels que les expressions entre les parenthèses quadratiques de (27) soient identiques à

$$(28)\qquad (p_1\omega - q_1)^2(\omega - \varrho e^{i\varphi})^{-1}(1 - \varrho e^{-i\varphi}\omega)^{-1}$$

et resp. à

$$(29)\qquad (p_2 z - q_2)^2 (z - r^K)^{-1}(1 - z r^K)^{-1},$$

on obtient que l'équation (27) prend la forme

$$(30)\qquad \frac{\omega'^2}{\omega^2}\cdot\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\omega-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)} = \frac{t}{z^2}\cdot\frac{(z-z_0)^2}{(z-r^K)(1-zr^K)},$$

où l'on a posé $\omega_0 = q_1 p_1^{-1}$, $z_0 = q_2 p_2^{-1}$, $t = p_2^2 p_1^{-2}$. On obtient de (30)

$$(31)\qquad \frac{\omega'}{\omega}\cdot\frac{\omega-\omega_0}{[(\omega-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)]^{1/2}} = \frac{t^{1/2}}{z}\cdot\frac{z-z_0}{[(z-r^K)(1-zr^K)]^{1/2}},$$

où l'on a pris les branches des radicaux analogiquement comme dans le travail cité ([2], p. 64). Puisque $\omega(0)=0$, on obtient sans peine que $t^{1/2}=\omega_0 z_0^{-1}(r^K/\varrho)^{1/2}e^{-i\varphi/2}$. En intégrant les deux membres de l'équation (31) on obtient, analogiquement comme dans le travail cité, une équation[2]) et en développant les différentes expressions de cette équation pour les r suffisamment petits nous arrivons à l'équation:

$$(32)\qquad \omega_0^{-1}e^{i\varphi}\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)]+\log\varrho e^{i\varphi}-\log T(1-\varrho^2)$$
$$=z_0^{-1}\log[(1-r^K)/(1+r^K)]+\log r^K-\log(1-r^{2K})+2l\pi i$$

où $l=0,\pm1,\ldots$ En comparant respectivement les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (32) on obtient

$$(32')\qquad R\{\omega_0^{-1}e^{i\varphi}\}\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)]+\log[\varrho/T(1-\varrho^2)]$$
$$=R\{z_0^{-1}\}\log[(1-r^K)/(1+r^K)]+\log[r^K/(1-r^{2K})],$$
$$I\{\omega_0^{-1}e^{i\varphi}\}\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)]+\varphi=I\{z_0^{-1}\}\log[(1-r^K)/(1+r^K)]+2l\pi.$$

Évaluons ensuite ω_0 et z_0. Considérons dans ce but les identités qui résultent de (27), (28) et (29). On a

$$(33)\qquad p_1^2(\omega-\omega_0)^2\equiv-2\varrho e^{-i\varphi}[a+\varrho^{1/K}\cos(\varphi/K)]\omega^2+$$
$$+2[(1-\varrho^2)\varrho^{1/K}i\sin(\varphi/K)+a(1+\varrho^2)]\omega+2\varrho e^{i\varphi}[\varrho^{1/K}\cos(\varphi/K)-a],$$

$$(34)\qquad p_2^2(z-z_0)^2\equiv-2r^K[a+\varrho^{1/K}(\tau/\varrho)r^K\cos(\varphi/K+\vartheta-\varphi)]z^2+$$
$$+2[(1-r^{2K})\varrho^{1/K}(\tau/\varrho)r^Ki\sin(\varphi/K+\vartheta-\varphi)+a(1+r^{2K})]z+$$
$$+2r^K[\varrho^{1/K}(\tau/\varrho)r^K\cos(\varphi/K+\vartheta-\varphi)-a].$$

En comparant les coefffcients de ω dans les deux membres de l'identité (33) on a

$$(35)\qquad \omega_0=\frac{(1-\varrho^2)\varrho^{1/K}i\sin(\varphi/K)+a(1+\varrho^2)}{2[a+\varrho^{1/K}\cos(\varphi/K)]\varrho}e^{i\varphi}.$$

Comme le discriminant du membre droit de (33) est égal à zéro on obtient

$$[(1-\varrho^2)\varrho^{1/K}i\sin(\varphi/K)+a(1+\varrho^2)]^2=4\varrho^2[a^2-\varrho^{2/K}\cos^2(\varphi/K)],$$

c'est-à-dire

$$(36)\quad (1-\varrho^2)^2a^2+2\varrho^{1/K}i\sin(\varphi/K)\cdot(1-\varrho^4)a+\varrho^{2/K}[4\varrho^2-(1+\varrho^2)^2\sin^2(\varrho/K)]=0.$$

En désignant par a_1 et a_2 les racines de l'équation (36), on a

$$a_{12}=\varrho^{1/K}i(1-\varrho^2)^{-1}[-(1+\varrho^2)\sin(\varphi/K)\pm2\varrho].$$

[2]) Comparer [2], p. 64 — il faut remplacer dans l'équation (37) du travail cité r par r^K pour obtenir l'équation démandée.

Comme

$$-2a=\min_{0\leqslant v<2\pi}\left(\varrho^{1/K}e^{i\varphi/K}\frac{e^{iv}+\varrho e^{i\varphi}}{e^{iv}-\varrho e^{i\varphi}}-\varrho^{1/K}e^{-i\varphi/K}\frac{1+e^{iv}\varrho e^{-i\varphi}}{1-e^{iv}\varrho e^{-i\varphi}}\right),$$

ce qui résulte immédiatement des définitions de $\mathfrak{P}^*, a$ et de l'équation (27); il faut prendre alors celle des racines a_1 et a_2 qui est plus grande, c'est-à-dire

$$(37)\qquad a=\varrho^{1/K}i(1-\varrho^2)^{-1}[-(1+\varrho^2)\sin(\varphi/K)+2\varrho].$$

Posons pour chaque x et y

$$(38)\qquad \begin{aligned} A(x,y)&\equiv(1+x^2)\sin y-2x,\\ B(x,y)&\equiv(1-x^2)\cos y,\\ C(x,y)&\equiv1+x^2-2x\sin y.\end{aligned}$$

On a vu dans (37) et (38) que $a=\varrho^{1/K}i(\varrho^2-1)^{-1}A(\varrho,\varphi/K)$. En substituant a dans (35), on obtient

$$(39)\qquad \omega_0=-e^{-i\varphi}\frac{A(\varrho,\varphi/K)-iB(\varrho,\varphi/K)}{C(\varrho,\varphi/K)}.$$

Pour évaluer z_0 reprenons l'équation (27). Comme $\omega(0)=0$, on en déduit facilement que

$$(40)\qquad \tau\varrho^{-1}r^K\cos(\varphi/K+\vartheta-\varphi)=\cos(\varphi/K).$$

D'un autre côté, vu (21), (33) et (34), on a

$$(41)\qquad t=r^K\varrho^{-1}\frac{a+\varrho^{1/K}(\tau/\varrho)r^K\cos[(\varphi/K)+\vartheta-\varphi]}{a+\varrho^{1/K}\cos(\varphi/K)}e^{i\varphi}.$$

En substituant $\tau\varrho^{-1}r^K\cos[(\varphi/K)+\vartheta-\varphi]$ de (40) à (41), on obtient

$$(42)\qquad t=r^K\varrho^{-1}e^{i\varphi}.$$

Il résulte donc de (23), en vertu de (42), que

$$(43)\qquad z_0=\omega_0e^{-i\varphi}.$$

Reprenons maintenant les équations (32′). Selon (38), (39) et (43) elles prendront la forme suivante

$$-\frac{A(\varrho,\varphi/K)}{C(\varrho,\varphi/K)}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho}+\log\frac{\varrho}{T(1-\varrho^2)}=-\frac{A(\varrho,\varphi/K)}{C(\varrho,\varphi/K)}\log\frac{1-r^K}{1+r^K}+\log\frac{r^K}{1-r^{2K}},$$

(44)

$$-\frac{B(\varrho,\varphi/K)}{C(\varrho,\varphi/K)}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho}+\varphi=-\frac{B(\varrho,\varphi/K)}{C(\varrho,\varphi/K)}\log\frac{1-r^K}{1+r^K}+2l\pi.$$

où $l=0,\pm 1,\ldots$[3]). Nous sommes arrivés au système d'équations analogues, à un système que j'ai obtenu dans un autre travail (voir [3], p. 191) en remplaçant en ce dernier le système r par r^K et φ par φ/K dans les expressions $A(\varrho,\varphi)$ et $C(\varrho,\varphi)$ qui s'y trouvent. Analogiquement, on peut, de même que dans le travail cité ci-dessus, remplacer le système d'équations (44) par le système suivant:

$$(45)\qquad \frac{A(\varrho,\varphi/K)}{C(\varrho,\varphi/K)}U(\varrho,r)-V(\varrho,r)=0,\qquad \varphi=\left[U^2(\varrho,r)-V^2(\varrho,r)\right]^{1/2}+2l\pi,$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$U(\varrho,r)=\log\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}:\frac{1-r^K}{1+r^K}\right),\qquad V(\varrho,r)=\log\frac{\varrho(1-r^{2K})}{Tr^K(1-\varrho^2)}.$$

De cette façon nous avons démontré, selon (45) et (38), la première partie du théorème (I) pour la famille F_T

En appliquant la méthode tout à fait analogue a celle dans le travail cité (comparer [3], p. 192-199), on obtient ce qui suit: pour chaque solution ϱ,φ des équations (45) pour chaque l satisfaisant aux conditions $0<\varrho<r$, $\sin\left[U^2(\varrho,r)-V^2(\varrho,r)\right]^{1/2}>0$, il existe une fonction univalente $f^*(z)$ dans $|z|<1$ de la famille F_T telle que $f^*(r^K)=\varrho e^{i\varphi}$, ou bien

$$I\left\{\left[f^*(r^K)/a_1\right]^{1/K}\right\}=\varrho^{1/K}\sin(\varphi/K)a^{-1/K}.$$

En choisissant celle pour laquelle le produit $\varrho^{1/K}\sin(\varphi/K)a_1^{-1/K}$ est le plus grand, nous démontrons la seconde partie de la thèse I pour les fonctions de la famille F_T. En passant de la famille F_T par φ_T à Φ_M, où $T=M^{-K}$, nous arrivons à la thèse demandée. Enfin, on démontre le théorème (II), comme dans le travail cité ci-dessus (voir [3], p. 199-200).

Travaux cités

[1] Z. Charzyński et W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 4, Lublin 1950, p. 41-56.

[2] W. Janowski, *Le maximum d'argument des fonctions univalentes bornées*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 4, Lublin 1950, p. 57-72.

[3] — *Le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées*, ce volume, p. 182-200.

[4] — *Sur le maximum du module des fonctions univalentes bornées*, Bul. Soc. Sci. et L. de Łódź, Cl. III, Vol. VIII, 6(1955).

[3]) On peut se borner évidemment aux valeurs $l=0,1,\ldots,K-1$.

On the geometrical significance of curvatures of higher orders for curves lying in n-dimensional spaces

by S. Gołąb (Kraków)

Burali-Forti is responsible for the following geometrical interpretation connected with the first and the second curvature of curves lying in the three-dimensional Euclidean space.

Let $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ denote, respectively, the first and the second curvature of a curve C at a regular point M. Fixing the point M_0 let us denote by M a neighbouring variable point on the curve C, by M' the projection of the point M on the tangent to C at the point M_0, and by M'' the projection of the point M on the plane exactly tangent at the point M_0.

Then we have the following formulas:

$$(1)\qquad \lim_{M\to M_0}(2\overline{M_0M'}/\overline{M_0M}^2)=\varkappa_1\ ^{1)},$$

$$(2)\qquad \lim_{M\to M_0}\left(3\overline{M_0M''}/(\overline{M_0M}\cdot\overline{M_0M'})\right)=|\varkappa_2|.$$

These formulas may also serve to define curvatures $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ at point M_0. In this way we obtain a fairly general definition of those notions, which, for instance, does not imply at all the rectifiability of the curve in the neighbourhood of point M_0.

The object of this note is to generalize formulas (1) and (2). Before formulating this generalization we shall introduce certain symbols.

We shall assume that a curve C lying in an n-dimensional Euclidean space satisfies the assumptions under which Frenet's equations are valid. Denoting by σ an arc of curve C we shall mark by commas the differentiation with respect to the arc. Further, let us denote by $\boldsymbol{t}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ the orthonormal system of vectors of Frenet's n-hedron, and by $\varkappa_j$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ the successive curvatures of curve C, it being assumed that

$$\varkappa_p>0\qquad (p=1,2,\ldots,n-2).$$

[1]) $\overline{AB}$ denotes the distance of points A and B.