Le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées

par W. Janowski (Łódź)

Dans ce travail nous obtenons certains résultats concernant le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées.

Ce travail appartient au cycle de travaux dont les résultats sont de la catégorie des théorèmes sur la déformation.

1. Considérons les fonctions holomorphes univalentes dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$F(z)=z+A_2z^2+\ldots \tag{1}$$

Soit $M>1$ un nombre positif quelconque, F_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|F(z)|<M$, et F_∞ — la famille de toutes les fonctions de la forme (1).

La valeur $1>r>0$ étant fixée, pour chaque $F(z)$ nous considérons

$$I\{F(r)\}. \tag{2}$$

Ainsi formée, l'expression (2) est une fonctionnelle définie dans la famille F_∞ et par conséquent dans F_M.

Théorème 1. *Pour les fonctions de la famille F_M on a l'inégalité*

$$I\{F(r)\}\leqslant \varrho_M\sin\varphi_M, \tag{3}$$

où ϱ_M $(0<\varrho_M<r)$ et φ_M $(\sin\varphi_M>0)$ présentent une solution des équations

$$\frac{[1+(\varrho/M)^2]\sin\varphi-2\varrho/M}{(2\varrho/M)\sin\varphi-[1+(\varrho/M)^2]}\log\left(\frac{1-\varrho/M}{1+\varrho/M}:\frac{1-r}{1+r}\right)+ \log M\frac{1-r^2}{r(M/\varrho-\varrho/M)}=0, \tag{4}$$

$$\varphi=\left[\log^2\left(\frac{1-\varrho/M}{1+\varrho/M}:\frac{1-r}{1+r}\right)-\log^2M\,\frac{1-r^2}{r(M/\varrho-\varrho/M)}\right]^{1/2},$$

telle que le produit $\varrho\sin\varphi$ est le plus grand.

La limite (3) *est atteinte.*

Théorème 2. *Pour les fonctions de la famille F_∞ on a l'inégalité*

$$I\{F(r)\}\leqslant\varrho_\infty\sin\varphi_\infty,$$

où ϱ_∞ et φ_∞ satisfont aux équations

$$\log\varrho_\infty=\log\big(r/(1-r^2)\big)+\sin\varphi_\infty\log\big((1+r)/(1-r)\big),$$
$$\varphi_\infty=\cos\varphi_\infty\log\big((1+r)/(1-r)\big) \tag{5}$$

et cette limite est atteinte.

Avant de procéder à la démonstration nous remarquons que nos théorèmes sont équivalentes à ceux qui établissent l'existence de la fonction extrémale par rapport à la fonctionnele (2) dans la famille F_M, resp. dans F_∞. La partie imaginaire de cette fonction est égale à $\varrho_M\sin\varphi_M$ resp. $\varrho_\infty\sin\varphi_\infty$, où ϱ_M et φ_M sont des racines des équations (4), resp. ϱ_∞ et φ_∞ — des équations (5).

Démonstration du théorème 1. Pour démontrer l'avant dérnier théorème considérons d'abord la famille F_T[1]) de toutes les fonctions univalentes bornées dans $|z|<1$ de la forme

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots=a_1(z+A_2z^2+\ldots),$$

où $a_1\geqslant T$, T étant un nombre quelconque fixe de l'intervalle (0,1). Ces fonctions sont assujetties à la condition $|f(z)|<1$ pour tout $|z|<1$. Considérons encore la fonctionnelle qui y est déterminée,

$$K(f)=I\{f(r)/a_1\}. \tag{6}$$

Nous constatons que la fonctionnelle (6) a dans chaque point f de la famille F_T une différentielle qui ne s'annule identiquement dans aucun point de F_T. En effet, en désignant par $\Delta f=\Delta f(z)=\Delta a_1z+\Delta a_2z^2+\ldots$ la fonction quelconque, telle que $f(z)+\Delta f(z)\epsilon F_T$, on a

$$\begin{aligned}K(f+\Delta f)&=I\{(f(r)+\Delta f(r))/(a_1+\Delta a_1)\}\\&=I\{f(r)/a_1\}+I\{\Delta f(r)/a_1\}-I\{f(r)\Delta a_1/a_1^2\}+\eta(\Delta f),\end{aligned} \tag{7}$$

où

$$L(h)=I\{h(r)/a_1\}-I\{f(r)a_{1h}/a_1^2\}\quad\text{pour chaque}\quad h\epsilon H \tag{8}$$

(voir [3], p. 43) est une fonctionnelle linéaire et

$$\eta(\Delta f)<\big([\Delta f(r)]^2+(\Delta a_1)^2\big)^{1/2}P\big(\Delta f(r),\Delta a_1\big), \tag{9}$$

où $P(\xi,\eta)\to0$ pour $\xi\to0$, $\eta\to0$. Comme

$$|\Delta f(r)|<\|\Delta f\|_n\quad\text{pour}\quad(1-1/n)^{-1}>r,\qquad|\Delta a_1|<(1-1/n)^{-1}\|f(z)\|_n \tag{10}$$

[1]) La famille introduit par M. Z. Charzyński, comparer [2], p. 5.

pour n assez grand, selon l'inégalité de Cauchy, on a de (9)-(10), en posant $\left(1+(1-1/n)^{-2}\right)^{1/2}P(\Delta f,\Delta a_1)=\varepsilon(\Delta f)$, que

$$\eta(\Delta f)<\|f(z)\|_n\varepsilon\left(\Delta f(z)\right), \tag{11}$$

ce qui prouve (vu (11 et (7)) que la fonctionnelle (6) est différenciable dans F_T et que la différentielle de (6) au point f est donnée par (8). En outre, il résulte de (8) que $L(h)$ ne s'annule pas identiquement dans aucun point de F_T.

On voit aisément que la différentielle (8), prise en un point quelconque de la famille F_T, s'étend sur la famille linéaire $\mathfrak{G}$ de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle $K(0,1)$, possédant des pôles dans l'ensemble E^* composé des points appartenant à ce cercle et différents de r. La frontière de l'ensemble E^* contient la circonférence $K^*(0,1)$, dont aucun point n'est un point d'accumulation des points essentiels (voir [2], p. 25) de l'ensemble complémentaire de E^*.

On peut donc appliquer à la fonctionnelle $K(f)$ les résultats de Z. Charzyński et W. Janowski (voir [3], p. 45) relatifs aux fonctions extrémales par rapport à la fonctionnelle $K(f)$ dans la famille F_T.

Il résulte de ces considérations qu'il existe des fonctions extrémales respectives et qu'elles satisfont à l'équation

$$[f^{*\prime}(z)/f^*(z)]\mathfrak{M}[f^*(z)]=z^{-2}\mathfrak{N}(z) \quad \text{pour} \quad z\in E^* \tag{12}$$

(voir [3], p. 53), où

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\omega)&\equiv D^*[\Psi(f^*(\zeta),\omega^{-1})]+\hat{D}^*[\Psi(\hat{f}^*(\zeta),\omega)]-2\mathfrak{P}^*,\\ \mathfrak{N}(z)&\equiv D^*[\Psi(\zeta,1/z)f^{*\prime}(\zeta)]+\hat{D}^*[\Psi(\zeta,z)\hat{f}^{*\prime}(\zeta)]-2\mathfrak{P}^*.\end{aligned} \tag{13}$$

ζ désigne la variable apparente de l'opération tandis que z joue dans (13) le rôle d'un paramètre.

$$\begin{aligned}\psi(\omega,\lambda)&\equiv\omega(1+\omega\lambda)/(1-\omega\lambda),\\ D^*(h)&=L^*(h)-iL^*(hi),\\ \hat{D}^*(\hat{h})&=L^*(h)+iL^*(hi)\end{aligned} \tag{14}$$

(voir [3], p. 43). $L^*(h)$ est la différentielle de la fonctionnelle (6) au point f^*.

$$\mathfrak{P}^*=\min_{0\leqslant\nu<2\pi}\left\{D^*[\psi(f^*(\zeta),e^{-i\nu})]+\hat{D}^*[\psi(\hat{f}^*(\zeta),e^{i\nu})]\right\}/2.$$

D'après (14)

$$D^*(h)+\hat{D}^*(\hat{h})=2L^*(h). \tag{15}$$

Vu (15) et (8), les formules (13) prendront la forme:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\omega)&\equiv 2I\left\{\frac{\psi[f^*(r),1/\omega]}{a_1^*}-\frac{f^*(r)}{a_1^*}\right\}-2\mathfrak{P}^*\\ &=\frac{1}{a_1^*i}\left\{\psi[f^*(r),1/\omega]-\overline{\psi[f^*(r),1/\omega]}-\left(f^*(r)-\overline{f^*(r)}\right)\right\}-2\mathfrak{P}^*,\\ \mathfrak{N}(z)&\equiv 2I\left\{\frac{\psi(r,1/z)f^{*\prime}(r)}{a_1^*}-\frac{f^*(r)}{a_1^*}\right\}-2\mathfrak{P}^*\\ &=\frac{1}{a_1^*i}\left\{\psi(r,1/z)f^{*\prime}(r)-\overline{\psi(r,1/z)f^{*\prime}(r)}-\left(f^*(r)-\overline{f^*(r)}\right)\right\}-2\mathfrak{P}^*,\end{aligned} \tag{16}$$

d'où, en posant successivement dans (14) $\omega=f^*(r)$, $\lambda=1/\omega$ et $\omega=r$, $\lambda=1/z$, on a, d'après (16) et après des calculs faciles:

$$\mathfrak{M}(\omega)\equiv\frac{1}{a_1^*i}\left[\frac{\omega+f^*(r)}{\omega-f^*(r)}f^*(r)-\frac{1+\overline{f^*(r)}\omega}{1-\overline{f^*(r)}\omega}\overline{f^*(r)}-\left(f^*(r)-\overline{f^*(r)}\right)\right]-2\mathfrak{P}^*, \tag{17}$$

$$\mathfrak{N}(z)\equiv\frac{1}{a_1^*i}\left[rf^{*\prime}(r)\frac{z+r}{z-r}-r\overline{f^{*\prime}(r)}\frac{1+rz}{1-rz}-\left(f^*(r)-\overline{f^*(r)}\right)\right]-2\mathfrak{P}^*. \tag{18}$$

Posons maintenant pour abréger

$$f^*(z)=\omega,\qquad f^{*\prime}(z)=\omega', \tag{19}$$

et soit

$$\begin{gathered}f^*(r)=\varrho e^{i\varphi},\qquad \overline{f^*}(r)=\varrho e^{-i\varphi},\qquad f^{*\prime}(r)=\tau e^{i\vartheta},\qquad \overline{f^{*\prime}(r)}=\tau e^{-i\vartheta},\\ \mathfrak{P}^*=(ia-\varrho\sin\varphi)/a_1^{*\,2}).\end{gathered} \tag{20}$$

En multipliant les deux membres par a_1^*i et vu (17), (18), (19) et (20) l'équation (12) prendra alors la forme suivante:

$$\begin{aligned}&\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\varrho e^{i\varphi}\frac{\omega+\varrho e^{i\varphi}}{\omega-\varrho e^{i\varphi}}-\varrho e^{-i\varphi}\frac{1+\varrho e^{-i\varphi}\omega}{1-\varrho e^{-i\varphi}\omega}+2a\right)\\ &\qquad=\frac{1}{z^2}\left(r\tau e^{i\vartheta}\frac{z+r}{z-r}-r\tau e^{-i\vartheta}\frac{1+rz}{1-rz}+2a\right).\end{aligned} \tag{21}$$

L'équation que nous avons obtenue peut être écrite sous une forme plus simple en vertu de certaines propriétés des expressions (17) et (18) que nous allons examiner maintenant. $\mathfrak{M}(\omega)$ et $\mathfrak{N}(z)$, comme il a été dé-

---

[2]) $P^*\leqslant 0$; comparer [3], p. 48. De là $I\{a\}\geqslant 0$. Nous utiliserons cette remarque plus loin.

montré dans le travail cité (voir [3], p. 46), prennent sur la circonférence du cercle $|\omega|=1$ (respectivement $|z|=1$) des valeurs réelles non négatives. $\mathfrak{M}(\omega)=0$ ayant, comme cela résulte de la définition de $\mathfrak{P}^*$, une racine double sur la circonférence du cercle $|\omega|=1$, n'a pas d'autres racines, ni à l'intérieur du cercle $|\omega|=1$, ni sur sa circonférence, puisqu'elle n'a que deux racines. C'est ce qui résulte directement de la forme $\mathfrak{M}(\omega)$ (formule (17)).

$\mathfrak{N}(z)$ a deux racines. C'est ce qui résulte aussi directement de la forme de $\mathfrak{N}(z)$ (formule (18)).

$\mathfrak{N}(z)$ ne peut pas posséder de racine à l'intérieur du cercle $|z|<1$, car alors, en vertu de (12) et vu $f^{*\prime}(z)\neq 0$, $\mathfrak{M}(\omega)=0$ aurait une racine à l'intérieur du cercle $|\omega|<1$, ce qui serait contraire à ce que nous venons de démontrer. Cella posé, $\mathfrak{N}(z)=0$ n'a de racines que sur la circonférence du cercle $|z|=1$. Comme la fonction $\mathfrak{N}(z)$ n'est pas négative sur la circonférence $|z|=1$, $\mathfrak{N}(z)=0$ ne posséde qu'une seule racine double.

Il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer qu'il existe des nombres p_i, q_i $(i=1,2)$, différents de zéro et tels que les expressions contenues entre les parenthèses de l'équation (21) prennent respectivement les formes suivantes:

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\varrho e^{i\varphi}\frac{\omega+\varrho e^{i\varphi}}{\omega-\varrho e^{i\varphi}}-\varrho e^{-i\varphi}\frac{1+\varrho e^{-i\varphi}\omega}{1-\varrho e^{-i\varphi}\omega}+2a\equiv\frac{(p_1\omega-q_1)^2}{(\omega-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)},\\ &r\tau e^{i\vartheta}\frac{z+r}{z-r}-r\tau e^{-i\vartheta}\frac{1+rz}{1-rz}+2a\equiv\frac{(p_2z-q_2)^2}{(z-r)(1-rz)}.\end{aligned}$$

Par suite l'équation (21) prendra la forme

$$(23)\qquad \frac{\omega'^2}{\omega^2}\cdot\frac{(p_1\omega-q_1)^2}{(\omega-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{(p_2z-q_2)^2}{(z-r)(1-rz)}.$$

En posant dans l'équation (23)

$$(24)\qquad q_1/p_1=\omega_0,\qquad q_2/p_2=z_0$$

et en divisant les deux membres de l'équation (23) par p_1^2, puis en posant

$$(25)\qquad p_2^2/p_1^2=t$$

nous obtenons l'équation

$$(26)\qquad \frac{\omega'^2}{\omega^2}\cdot\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\omega-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)}=\frac{t}{z^2}\cdot\frac{(z-z_0)^2}{(z-r)(1-rz)}.$$

Posons maintenant

$$(27)\qquad \begin{aligned} &(\varrho e^{i\varphi})^{1/2}=\varrho^{1/2}e^{i\varphi/2},\qquad (e^{-2i\varphi})^{1/2}=e^{-i\varphi},\qquad (-\varrho e^{i\varphi})^{1/2}=i(\varrho e^{i\varphi})^{1/2},\\ &(-\varrho e^{-i\varphi})^{1/2}=i(\varrho e^{-i\varphi})^{1/2}=i\varrho^{1/2}e^{-i\varphi/2},\qquad (-r)^{1/2}=ir^{1/2}.\end{aligned}$$

De (26) on obtient

$$(28)\qquad \frac{\omega'}{\omega}\cdot\frac{\omega-\omega_0}{[(\omega-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)]^{1/2}}=\frac{t^{1/2}}{z}\cdot\frac{z-z_0}{[(z-r)(1-rz)]^{1/2}},$$

où l'on a pris les branches des radicaux $[(z-r)(1-rz)]^{1/2}$, $[(\omega-\varrho e^{i\varphi})\times\times(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)]^{1/2}$, qui sont égales (pour $z=0$ et $\omega=0$) à $ir^{1/2}$, resp. $i(\varrho e^{i\varphi})^{1/2}$.

Ces branches existent respectivement dans le cercle $K(0,r)$ et dans le domaine $\omega[K(0,r)]$, où les expressions sous les signes des radicaux sont différentes de zéro. Puisque $\omega(0)=0$, il s'ensuit de (28) que

$$(29)\qquad t^{1/2}=(\omega_0/z_0)(r^{1/2}/\varrho^{1/2})e^{-i\varphi/2}.$$

En intégrant les deux membres de cette équation nous obtiendrons, après des calculs aisés et vu (29):

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\log\frac{\varrho e^{-i\varphi}\omega-1+[(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega-\varrho^2)]^{1/2}}{\varrho e^{-i\varphi}\omega-1-[(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega-\varrho^2)]^{1/2}}+\\ &\qquad+\omega_0e^{-i\varphi}\log\frac{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)+[\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi}-\omega)]^{1/2}}{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)-[\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi}-\omega)]^{1/2}}\\ &=\frac{\omega_0}{z_0}e^{-i\varphi}\Big[\log\frac{rz-1+[r(rz-1)(z-r)]^{1/2}}{rz-1-[r(rz-1)(z-r)]^{1/2}}+\\ &\qquad+z_0\log\frac{r(1-rz)+[r(1-rz)(r-z)]^{1/2}}{r(1-rz)-[r(1-rz)(r-z)]^{1/2}}\Big]+C\ ^{3)}\end{aligned}$$

où l'on a pris les branches logarithmiques qui, pour $\omega=f^*(r)$ et $z=r$ respectivement, ont des valeurs principales. Ces branches existent dans les domaines simplement connexes $K(0,r)$ et $\omega[K(0,r)]$. En tenant compte de ce que $\omega(z)\to f^*(r)$, lorsque $z\to r$, nous obtenons immédiatement de (30) que $C=0$.

---

[3]) $$\int\frac{(x-a)\,dx}{x[(x-b)(1-cx)]}=(-c)^{-1/2}\Big[\log\frac{cx-1+[(cx-1)(cx-bc)]^{1/2}}{cx-1-[(cx-1)(cx-bc)]^{1/2}}+\\ +a\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2}\log\frac{b(1-cx)+[b(1-cx)(b-x)]^{1/2}}{b(1-cx)-[b(1-cx)(b-x)]^{1/2}}\Big].$$

Notre but consiste à déterminer le produit $\varrho\sin\varphi$. Examinons dans ce but l'équation (30) dans l'entourage du point $z=0$. En développant les différentes expressions de (30) pour les z suffisamment petits, nous obtenons les égalités suivantes:

$$\omega = Tz + a_2 z^2 + \ldots = O_1(z)\,^{4}),$$

$$[(\varrho e^{-i\varphi}\omega - 1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega - \varrho^2)]^{1/2} = \varrho - 2^{-1}e^{-i\varphi}(1+\varrho^2)\omega + \ldots = \varrho + O_2(z),$$

$$[\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi} - \omega)]^{1/2} = \varrho e^{i\varphi} - 2^{-1}(1+\varrho^2)\omega + \ldots$$
$$= \varrho e^{i\varphi} - 2^{-1}T(1+\varrho^2)z + O_3(z^2),$$

(31)
$$\log\frac{\varrho e^{-i\varphi}\omega - 1 + [(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega-\varrho^2)]^{1/2}}{\varrho e^{-i\varphi}\omega - 1 - [(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega-\varrho^2)]^{1/2}}$$
$$= \log[(1-\varrho)(1+\varrho)^{-1}] + e^{-i\varphi}\omega + \ldots = \log[(1-\varrho)(1+\varrho)^{-1}] + O_4(z),$$
$$\log\frac{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega) + [\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi}-\omega)]^{1/2}}{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega) - [\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi}-\omega)]^{1/2}}$$
$$= \log 2\varrho e^{i\varphi} - \log[(1-\varrho^2)2^{-1}] - \log\omega - [(1+3\varrho^2)(4\varrho)^{-1}]e^{-i\varphi}\omega + \ldots$$
$$= \log 2\varrho e^{i\varphi} - \log[T(1-\varrho^2)2^{-1}] - \log z + O_5(z) + 2k_1\pi i$$
$$(k_1 = 0, \pm 1, \ldots).$$

D'une manière analogue:

(32)
$$\log\frac{rz-1+[r(rz-1)(z-r)]^{1/2}}{rz-1-[r(rz-1)(z-r)]^{1/2}} = \log[(1-r)(1+r)^{-1}] + O_6(z),$$
$$\log\frac{r(1-rz)+[r(1-rz)(r-z)]^{1/2}}{r(1-rz)-[r(1-rz)(r-z)]^{1/2}}$$
$$= \log 2r - \log[(1-r^2)2^{-1}] - \log z + O_7(z) + 2k_2\pi i \qquad (k_2 = 0, \pm 1, \ldots),$$

où $O_i(z^k)$ sont d'un rang non inférieur à 1 ($k=1,2;\ i=1,2,\ldots,7$). En substituant les expressions (31) et (32) dans (30), nous obtenons, en vertu de la définition de la fonction $O_i(z^k)$, l'équation:

(33)
$$\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)] + \omega_0 e^{-i\varphi}\{\log 2\varrho e^{i\varphi} -$$
$$- \log[T(1-\varrho^2)/2] - \log z + 2k_1\pi i\}$$
$$= (\omega_0/z_0)e^{-i\varphi}\{\log[(1-r)/(1+r)] +$$
$$+ z_0(\log 2r - \log[(1-r^2)/2] - \log z + 2k_2\pi i)\},$$

[4]) Le premiér coefficient du développement de la fonction extrémale est égal à T, comparer [3], p. 52.

d'où, après une réduction aisée et après avoir divisé les deux membres par $\omega_0 e^{-i\varphi}$, nous obtenons l'équation

(34)
$$(1/\omega_0)e^{i\varphi}\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)] + \log\varrho e^{i\varphi} - \log T(1-\varrho^2) + 2k\pi i$$
$$= (1/z_0)\log[(1-r)/(1+r)] + \log[r/(1-r^2)] \qquad (k = k_1 - k_2).$$

On obtient sans peine de l'équation (34) deux équations auxquelles satisfont ϱ et φ; en comparant respectivement les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (34) on obtient

(35)
$$R\{(1/\omega_0)e^{i\varphi}\}\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)] + \log[\varrho/T(1-\varrho^2)]$$
$$= R\{1/z_0\}\log[(1-r)/(1+r)] + \log[r/(1-r^2)],$$
$$I\{(1/\omega_0)e^{i\varphi}\}\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)] + \varphi + 2k\pi = I\{1/z_0\}\log[(1-r)/(1+r)].$$

Évaluons maintenant ω_0 et z_0. Reprenons dans ce but les identités (22).

Il résulte de (22) en tenant compte de (24), et après des calculs faciles, que

(36)
$$p_1^2(\omega-\omega_0)^2 \equiv -2\{(a+\varrho\cos\varphi)\varrho e^{-i\varphi}\omega^2 -$$
$$- [(i-\varrho^2)\varrho i\sin\varphi + a(1+\varrho^2)]\omega + (a-\varrho\cos\varphi)\varrho e^{i\varphi}\},$$

(37)
$$p_2^2(z-z_0)^2 \equiv -2\{(a+\tau r\cos\vartheta)rz^2 -$$
$$- [(1-r^2)\tau ri\sin\vartheta + a(1+r^2)]z + (a-\tau r\cos\vartheta)r\}.$$

En comparant les coefficients de ω dans les deux membres de l'identité (36) on a

(38)
$$\omega_0 = [(1-\varrho^2)\varrho i\sin\varphi + a(1+\varrho^2)][2(a+\varrho\cos\varphi)\varrho]^{-1}e^{i\varphi}.$$

On determine a, en profitant du fait que le membre droit de (36) est un carré (car le membre gauche est un carré). On a ainsi

$$[(1-\varrho^2)\varrho i\sin\varphi + a(1+\varrho^2)]^2 = 4(a^2 - \varrho^2\cos^2\varphi)\varrho^2,$$

c'est-à-dire

(39)
$$(1-\varrho^2)^2 a^2 + 2a\varrho(1-\varrho^4)i\sin\varphi + 4\varrho^4 - \varrho^2(1+\varrho^2)^2\sin^2\varphi = 0.$$

En désignant par a_1 et a_2 les racines de l'équation (39), on a

$$a_{12} = [\varrho i/(1-\varrho^2)][-(1+\varrho^2)\sin\varphi \pm 2\varrho].$$

Il résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{P}^*$, de a et de (21) que

$$-2a = \min_{0\leqslant\nu<2\pi}[\varrho e^{i\varphi}(e^{i\nu}+\varrho e^{i\varphi})(e^{i\nu}-\varrho e^{i\varphi})^{-1} -$$
$$- \varrho e^{-i\varphi}(1+\varrho e^{-i\varphi}e^{i\nu})(1-\varrho e^{-i\varphi}e^{i\nu})^{-1}].$$

Il faut donc prendre celle des racines a_1 et a_2 qui est la plus grande, c'est-à-dire

(40) $$a = [\varrho i/(1-\varrho^2)][-(1+\varrho^2)\sin\varphi + 2\varrho].$$

Posons pour chaque x et y,

(41) $$A(x,y) \equiv (1+x^2)\sin y - 2x, \qquad B(x,y) \equiv (1-x^2)\cos y,$$
$$C(x,y) \equiv 1 + x^2 - 2x\sin y.$$

D'après (40) et (41) on a que $a = \varrho i(\varrho^2-1)^{-1}A(\varrho,\varphi)$. En substituant a dans (38) nous obtenons

(42) $$\omega_0 = -e^{i\varphi}C(\varrho,\varphi)[A(\varrho,\varphi) + iB(\varrho,\varphi)]^{-1}.$$

Pour évaluer z_0 on remarque d'abord, qu'en vertu de (36) et (37),

$$p_1^2 = -2(a+\varrho\cos\varphi)\varrho e^{-i\varphi} \quad \text{et} \quad p_2^2 = -2(a+\tau r\cos\vartheta)r,$$

d'où, vu (25),

(43) $$t = r(a+\tau r\cos\vartheta)[\varrho(a+\varrho\cos\varphi)]^{-1}e^{i\varphi}.$$

Pour définir t, considérons la fonction extrémale $f^*(z)$ et la fonction

(44) $$f_\delta^*(z) = e^{-i\delta}f^*(ze^{i\delta}) \qquad (f_\delta^*(z) \in F_T),$$

où δ est un paramètre qui admet des valeurs quelconques dans le voisinage de zéro.

Considérons en outre la fonction de la variable δ:

$$\chi(\delta) = I\{f_\delta^*(r)/a_1^*\} = I\{e^{-i\delta}f^*(re^{i\delta})/a_1^*\}.$$

La fonction $\chi(\delta)$ atteint, en vertu de (44), son maximum au point $\delta = 0$. Par conséquent

(45) $$\left(\frac{d}{d\delta} I\left\{\frac{e^{-i\delta}f^*(re^{i\delta})}{a_1^*}\right\}\right)_{\delta=0} = 0.$$

Après des calculs aisés on a

$$\frac{d}{d\delta} I\left\{\frac{e^{-i\delta}f^*(re^{i\delta})}{a_1^*}\right\} = I\left\{\frac{d}{d\delta}\frac{e^{-i\delta}f^*(re^{i\delta})}{a_1^*}\right\} = I\left\{i\,\frac{rf^{*\prime}(re^{i\delta}) - e^{-i\delta}f^*(re^{i\delta})}{a_1^*}\right\},$$

d'où, vu (45) et en tenant compte de la définition (20), on obtient

(46) $$r\tau\cos\vartheta - \varrho\cos\varphi = 0.$$

En déterminant $r\tau\cos\vartheta$ de (46) et en le substituant dans (43), nous obtenons (après avoir divisé par $a+\varrho\cos\varphi$),

(47) $$t = r\varrho^{-1}e^{i\varphi}.$$

On obtient donc de (28), en vertu de (47),

(48) $$z_0 = \omega_0 e^{-i\delta}.$$

Reprenons maintenant les équations (33) et (34). Nous obtenons à partir de (48), en tenant compte de (41) et (42) et après un calcul facile,

(49) $$\frac{1}{z_0} = \frac{1}{\omega_0}e^{i\varphi} = -\frac{A(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)} - i\frac{B(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}.$$

Par conséquent les équations (35) prendront, selon (49), les formes suivantes:

$$-\frac{A(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho} + \log\frac{\varrho}{T(1-\varrho^2)} = -\frac{A(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}\log\frac{1-r}{1+r} + \log\frac{r}{1-r^2},$$
$$-\frac{B(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho} + \varphi + 2k\pi = -\frac{B(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}\log\frac{1-r}{1+r},$$

d'où, après des calculs aisés on déduit les équations:

(50) $$\begin{gathered}\frac{A(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}\log\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho} : \frac{1-r}{1+r}\right) - \log\frac{\varrho(1-r^2)}{Tr(1-\varrho^2)} = 0,\\ \varphi + 2k\pi = \frac{B(\varrho,\varphi)}{C(\varrho,\varphi)}\log\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho} : \frac{1-r}{1+r}\right).\end{gathered}$$

Remplacons maintenant le système d'équations (50) par un autre système d'équations équivalentes à (50). Posons maintenant pour abréger:

$$U(\varrho,r) \equiv \log\{[(1-\varrho)/(1+\varrho)] : [(1-r)/(1+r)]\},$$
$$V(\varrho,r) \equiv \log[\varrho(1-r^2)/Tr(1-\varrho^2)].$$

Les équations (50) prendront alors la forme:

(51) $$[A(\varrho,\varphi)/C(\varrho,\varphi)]\,U(\varrho,r) = V(\varrho,r),$$

(52) $$[B(\varrho,\varphi)/C(\varrho,\varphi)]\,U(\varrho,r) = \varphi + 2k\pi.$$

De là, vu l'identité évidente $A^2(x,y) + B^2(x,y) \equiv C^2(x,y)$ on a $U^2(\varrho,r) = V^2(\varrho,r) + (\varphi+2k\pi)^2$, d'où, supposant $\varphi > 0$, on obtient

(53) $$\varphi = [U^2(\varrho,r) - V^2(\varrho,r)]^{1/2} + 2k\pi.$$

En substituant φ de (53) dans (51) nous avons avec l'équation (53) un système d'équations équivalentes au système (50) sous condition que $\varphi > 0$, ce qui, d'après (52) et vu les inégalités évidentes $C(\varrho,\varphi) > 0$, $U(\varrho,r) > 0$ (car $\varrho < r$) fait que $B(\varrho,\varphi) > 0$ et finalement $\cos\varphi > 0$.

Pour chercher ϱ il faut alors résoudre l'équation

$$(54)\qquad [A(\varrho,[U^2(\varrho,r)-V^2(\varrho,r)]^{1/2})/C(\varrho,[U^2(\varrho,r)-V^2(\varrho,r)]^{1/2})]\times \times U(\varrho,r)-V(\varrho,r)=0.$$

Ainsi nous avons démontré la première partie de la démonstration du théorème 1 pour la famille F_T.

Passons maintenant à la deuxième partie de cette démonstration. Nous démontrons que pour chaque solution ϱ,φ des équations (53) et (54), satisfaisant aux conditions: $0<\varrho<r$, $\sin[U^2(\varrho,r)-V^2(\varrho,r)]^{1/2}>0$ il existe une fonction univalente $f^*(z)$ dans $|z|<1$ de la famille F_T telle que $f^*(r)=\varrho e^{i\varphi}$ ou bien $I\{f^*(r)/a_1^*\}=\varrho\sin\varphi/a_1^*$.

En choisissant celle pour laquelle le produit $\varrho\sin\varphi$ est le plus grand, nous démontrons la thèse 1 pour les fonctions de la famille F_T.

Supposons donc que ϱ,φ présentent une solution des équations (53) et (54) telle que $0<\varrho<r$, $\sin[U^2(\varrho,r)-V^2(\varrho,r)]^{1/2}>0$ et formons pour ces valeurs les expressions correspondantes (41), (42) et (48).

Considérons la fonction analytique H qui corresponde à l'integral [5])

(55)

$$\int[\mathfrak{M}(\omega)]^{1/2}\omega^{-1}d\omega=\varkappa\left[\bar{z}_0^{1/2}\log\frac{\varrho e^{-i\varphi}\omega-1+[(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega-\varrho^2)]^{1/2}}{\varrho e^{-i\varphi}\omega-1-[(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)(\varrho e^{-i\varphi}\omega-\varrho^2)]^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+z_0^{1/2}\log\frac{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)+[\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi}-\omega)]^{1/2}}{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)-[\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)(\varrho e^{i\varphi}-\omega)]^{1/2}}\right]$$

où $\varkappa=[2\varrho^2C/T(1-\varrho^2)]^{1/2}$ et où

$$\mathfrak{M}(\omega)=-\varkappa^2(\omega-\omega_0)^2(\omega-\varrho e^{i\varphi})^{-1}(1-\varrho e^{-i\varphi}\omega)^{-1}\bar{z}_0e^{-i\varphi}.$$

Nous remarquons que pour chaque élément $\{\hat{\omega},\hat{M}_1(\omega)\}$ de H tout autre élément $\{\hat{\omega},\hat{M}_2(\omega)\}$ du même centre s'exprime par la formule [6])

$$\hat{M}_2(\omega)=\varepsilon\hat{M}_1(\omega)+2k\pi i(\bar{z}_2^{1/2}+z_0^{1/2})+2l\pi iz_0^{1/2},$$

où $\varepsilon=\pm1$ et k,l sont des nombres entièrs. Nous remarquons encore que pour chaque élément $\{\omega^\cdot,M^\cdot(\omega)\}$ de H du centre $\omega^\cdot$ situé sur $K^*(0,1)$ l'expression $R\{M^\cdot(\omega)\}$ est constante pour $|\omega|=1$, par suite de la définition de H et la propriété concernant la fonction $\mathfrak{M}(\omega)$ sur $K^*(0,1)$ (comparer [3], p. 46). Prenons un élément analytique de H du centre ω_0, $\{\omega_0,M_0(\omega)\}$ tel que $R\{M_0(\omega_0)\}=0$.

[5]) On prend ici évidemment les mêmes branches des racines $(\varrho e^{-i\varphi}\omega-1)^{1/2}$ et $[\varrho(e^{-i\varphi}\omega-\varrho)]^{1/2}$ dans le numérateur et le dénominateur.

[6]) Cela résulte immédiatement de (55).

Il est facile de voir qu'il existe dans l'entourage du point ω_0 une courbe regulière K de l'équation

$$(56)\qquad \omega=\omega(s)\qquad (0\leqslant s\leqslant s^*)$$

et une chaîne d'éléments analytiques,

$$(57)\qquad \{\omega(s),M(\omega,s)\},$$

de la fonction H le long de cette courbe tels que

$$|\omega(s)|<1,\qquad \omega(0)=\omega_0,\qquad |\omega'(s)|=1,$$
$$(58)\qquad R\{M[\omega(s),s]\}=0\qquad (0\leqslant s\leqslant s^*),$$
$$M'\omega[\omega(s),s]\neq0,\qquad |M'\omega[\omega(s),s]|<\infty\quad\text{et}\quad M(\omega,0)=M_0(\omega)$$

au voisinage de ω_0. En effet, prenons comme K la courbe de l'équation (56), vérifiant les conditions (58), passant dans un entourage suffisamment petit du point ω_0, issue du point ω_0 et telle que $R\{M_0[\omega(s)]\}=0$ $(0\leqslant s\leqslant s^*)$ Évidemment, vu la condition $M'(\omega_0)=0$, une telle courbe existe. En posant en outre $M(\omega,s)=M_0(\omega)$, nous obtenons la chaîne démandée.

On voit facilement qu'il existe le plus grand intervalle $(0,s^*)$ de (56) dans lequel existe la courbe K, vérifiant les conditions (58). Pour simplifier la désignation nous admettons dans la suite les notations K, (56) et (58) comme notations correspondantes à la courbe la plus longue présentée ci-dessus. Remarquons qu'il existe toujours la limite suivante:

$$(59)\qquad \lim_{s\to s^*}\omega(s)=\omega^*\quad\text{où}\quad \omega^*=0\quad\text{ou}\quad \omega^*=\varrho e^{i\varphi},$$

ce qui est évident pour s^* fini; il suffit alors de le démontrer pour s^* infini. En effet, supposant dans ce cas le contraire nous voyons qu'il existe une suite $\{s_n\}$ qui tend vers l'infini et telle que $\omega(s_n)\to\hat{\omega}$, où $\hat{\omega}\neq0$ et $\hat{\omega}\neq\varrho e^{i\varphi}$.

Désignons par $\hat{M}(\omega)$ la fonction d'un élément quelconque de la fonction H du centre $\hat{\omega}$. Alors, en posant $M_n(\omega)=M(\omega,s_n)$ nous obtenons, pour n suffisamment grand, que

$$M_n(\omega)=\varepsilon_n\hat{M}(\omega)+2\pi k_ni(\bar{z}_0^{1/2}+z_0^{1/2})+2\pi l_niz_0^{1/2},$$

où $\varepsilon_n=\pm1$, k_n et l_n sont des nombres entiers donc, vu la rélation évidente $R\{M_n[\omega(s_n)]\}=0$, que $\varepsilon_nR\{\hat{M}[\omega(s_n)]\}+l_nI\{z_0^{1/2}\}=0$ De là, vu $I\{z_0\}\neq0$ [7]), on a $l_n=l=\text{const}$ pour n suffisamment grand. Dans la suite

[7]) En effet, supposant le contraire on aurait, vu (49), $B(\varrho,\varphi)=0$, et par conséquent, vu (41), $\varphi=\pi/2$, ce qui est impossible d'après (50).

on peut supposer, en choisissant éventuellement la suite partielle de $\{s_n\}$, que $\varepsilon_n=\varepsilon=\text{const}$ pour n suffisamment grand, d'où

$$R\{M_n(\omega)\}=\varepsilon R\{M(\omega)\}+2\pi l I\{z_0^{1/2}\} \tag{60}$$

pour tout n suffisamment grand.

Désignons par $\hat{K}$ l'arc simple de l'équation $\omega=\hat{\omega}(t)$ où t change dans l'intervalle suffisamment petit et dans lequel

$$|\hat{\omega}'(t)|=1 \quad \text{et} \quad \varepsilon R\{\hat{M}[\omega(t)]\}+2\pi l I\{z_0^{1/2}\}=0\,.$$

Un tel arc existe, vu les inégalités $\hat{\omega}\neq\varrho e^{i\varphi}$, $\hat{\omega}\neq 0$. Du fait que selon (60) les équations

$$R\{M_n(\omega)\}=0, \qquad \varepsilon R\{M(\omega)\}+2\pi l I\{z_0^{1/2}\}=0 \tag{61}$$

sont équivalentes dans un voisinage de $\hat{\omega}$ pour n suffisamment grand, il faut que $\omega(s_n)=\hat{\omega}(t_n)$ pour n suffisamment grand, où t_n désigne un certain point de l'intervalle $\langle-\hat{t},\hat{t}\rangle$. Donc, vu l'équivalence de (61) et $|\omega'(s)|=1$ et $|\hat{\omega}'(t)|=1$, nous obtenons l'identité $\omega(s)=\hat{\omega}(s-s_n+t_n)$ dans un voisinage de s_n. Par conséquent nous avons, en prolongeant, l'identité pour tout $s<s_n$ ou $s>s_n$ si $t_n>0$ ou $t_n<0$. Mais cela est impossible, car l'expression $s-s_n+t_n$ doit être située dans l'intervalle $\langle-\hat{t},\hat{t}\rangle$, c'est-à-dire l'expression $s-s_n$ doit être située dans $\langle-2\hat{t},2\hat{t}\rangle$ pour chaque n, ce qui est impossible. Alors finalement il doit être (59).

Nous distinguons les cas:

a) $\omega^*\epsilon K^*(0,1)$ et $\omega^*\neq\omega_0$,

dans lequel nous pouvons évidemment considérer la chaîne (57) dans tout l'intervalle fermé $\langle 0,s^*\rangle$ [8]). Ensuite nous voyons que, pour s proche de s^*, il faut que

$$R\{M[\omega(s),s]\}=R\{M[\omega(s),s^*]\}=0 \quad \text{et} \quad |\omega(s)|<1$$

et encore $R\{M(\omega,s^*)\}=0$ pour $|\omega|=1$. Par conséquent il faudrait que $M'_\omega[\omega^*(s^*),s^*]=0$, ce qui n'a pas lieu. Notre cas est donc impossible.

b) $\omega^*=\omega_0$.

En ce cas, posant $M^*(\omega)=M(\omega,s^*)$ on voit que

$$M^*(\omega)=\varepsilon^* M_0(\omega)+2\pi k^* i(\bar{z}_0^{1/2}+z_0^{1/2})+2\pi l^* i z_0^{1/2} \tag{62}$$

où ε^*, k^*, l^* sont des nombres analogues à ceux de (60). D'où, pour $\omega=\omega_0$, vu les égalités évidentes $R\{M_0(\omega_0)\}=0$ et $R\{M^*(\omega_0)\}=0$ et la condition $I\{z_0\}\neq 0$, nous obtenons que

$$l^*=0. \tag{63}$$

[8]) C'est possible d'après la rélation (59); la convention pour $s^*=\infty$ est évidente.

En outre de (62) on a d'après (63) $R\{M^*(\omega)\}=\varepsilon^* R\{M_0(\omega)\}$ dans un voisinage de ω_0 et en particulier pour s suffisamment proche de zéro

$$R\{M^*[\omega(s^*-s)]\}=\varepsilon^* R\{M_0[\omega(s^*-s)]\}$$

et finalement $R\{M_0[\omega(s^*-s)]\}=0$. D'où l'on déduit facilement que $\omega(s^*-s)=\omega(s)$ pour s petits et par conséquent pour chaque s. Mais ceci est impossible, car au point $s=s^*/2$ on aurait $\omega'(s)=0$, ce qui est contraire à la condition (58). Donc, le cas b) est aussi impossible.

c) $\omega^*\epsilon K(0,1)$ et $\omega^*\neq\varrho e^{i\varphi}$, $\quad \omega^*\neq 0$.

Ce cas est impossible, car dans le cas contraire on pourrait selon la condition évidente $M^{*\prime}(\omega^*)\neq 0$ prolonger la courbe K sur l'intervalle plus vaste du paramètre s, le nombre s^* étant dans notre cas fini d'après (63).

d) $\omega^*=\varrho e^{i\varphi}$.

Nous démontrons premièrement qu'il existe un element de H $\{\omega^\cdot, M^\cdot(\omega)\}$ du centre arbitrairement proche du point zéro tel que $R\{M^\cdot(\omega^\cdot)\}=0$. Ceci résulte très facilement du développement de l'integrale (55) dans le voisinage de zéro. Il est facile de deduire qu'il existe pour un tel élément une courbe $K^\cdot$ tout à fait analogue à celle de (56):

$$\omega=\omega^\cdot(s) \qquad (s_0^\cdot\leqslant s\leqslant s^{\cdot *})$$

et une chaîne d'éléments analytiques de H, $\{\omega^\cdot(s), M^\cdot(\omega^\cdot,s)\}$, le long de cette courbe tels que

$$|\omega^\cdot(s)|<1, \qquad \omega^\cdot(0)=\omega^\cdot, \qquad |\omega^{\cdot\prime}(s)|=1,$$

$$R\{M^\cdot[\omega^\cdot(s),s]\}=0 \qquad (s_0^\cdot\leqslant s\leqslant s^{\cdot *}),$$

$$M'_\omega[\omega^\cdot(s),s]\neq 0, \qquad |M'_\omega[\omega^\cdot(s),s]|<\infty \qquad \text{et} \qquad M^\cdot(\omega,0)=M^\cdot(\omega)$$

au voisinage de $\omega^\cdot$.

Nous remarquons ici qu'il existe dans notre cas les limites

$$\lim_{s\to s_0^\cdot}\omega^\cdot(s)=\omega_0^\cdot, \qquad \lim_{s\to s^{\cdot *}}\omega^\cdot(s)=\omega^{\cdot *} \tag{64}$$

analogues à celles de (59).

Ensuite nous démontrons que les limites (64) ne sont pas égales à zéro simultanément. Dans ce but nous supposons le contraire. Désignons par G l'ensemble $K(0,1)-K$ et considérons dans cet ensemble la fonction analytique, définie dans un voisinage de $\omega^\cdot$ par

$$U(\omega)=M^\cdot(\omega)-\varepsilon z_0^{1/2}\log\omega, \tag{65}$$

où $\varepsilon=\pm 1$ et où $\log\omega$ est une branche de logarithme qui sera définie plus loin. On voit bien de (55) et (30) que ε peut être choisi d'une façon telle que fonction (65) soit univoque et holomorphe dans G. Posons

$$\omega^{\cdot}(s)=p(s)\exp[i\Omega(s)]$$

et supposons que la branche de logarithme précédente soit choisie de façon que $\log\omega^{\cdot}(s)=\log p(s)+i\Omega(s)$ pour s suffisamment petit. Dans ce cas nous aurons évidemment selon (65), pour tout s,

$$M^{\cdot}[\omega^{\cdot}(s)]=U[\omega(s)]+\varepsilon z_0^{1/2}[\log p(s)+i\Omega(s)].$$

En particulier nous obtenons pour s proche de $s_0^{\cdot}$ et $s^{\cdot *}$, en posant

$$U(\omega)=P+iQ+O(\omega)^{9)} \quad \text{et} \quad \varepsilon z_0^{1/2}=\alpha+i\beta$$

que $$R(s)=R\{M^{\cdot}[\omega^{\cdot}(s)]\}=P+\alpha\log p(s)-\beta\Omega(s)+O_1(\omega)$$

et $$I(s)=I\{M^{\cdot}[\omega^{\cdot}(s)]\}=Q+\alpha\Omega+\beta\log p(s)+O_2(\omega)$$

et alors, selon $R\{M^{\cdot}[\omega^{\cdot}(s)]\}=0$, nous obtenons

$$I(s)=(\alpha^2+\beta^2)\beta^{-1}\log p(s)+\alpha\beta^{-1}P+Q+O_3(\omega)^{10)}.$$

Il en résulte immédiatement que $I(s)$ tend simultanément vers $+\infty$ (ou $-\infty$) pour $s\to s_0^{\cdot}$ et $s\to s^{\cdot *}$, mais cela est impossible, car la fonction $I(s)$ doit évidemment être monotone[11]).

Nous démontrons enfin que les courbes $K^{\cdot}$ et K n'ont pas de points communs. Admettant le contraire, désignons par $\hat{s}$ le plus petit nombre de l'intervalle $\langle s_0, s^{\cdot *}\rangle$ pour lequel $\omega^{\cdot}(\hat{s})\in K$.

On a trois cas:

α) $\omega^{\cdot}(\hat{s})=\omega(s)$, où $0<s<s^*$.

Ce cas est impossible, car il existerait les valeurs $s<\hat{s}$ pour lesquelles $\omega^{\cdot}(s)$ appartient à K.

β) $\omega^{\cdot}(\hat{s})=\omega_0$.

Dans ce cas on a $R\{M^{\cdot}[\omega,\hat{s}]\}=\varepsilon R\{M(\omega,0)\}$, et, par conséquent,

$$R\{M^{\cdot}[\omega^{\cdot}(s),\hat{s}]\}=0, \qquad R\{M[\omega^{\cdot}(s),0]\}=0,$$

pour s suffisamment proche de $\hat{s}$ et évidemment $R\{M[\omega(s),0]\}=0$, pour s suffisamment proche de zéro, ce qui est impossible.

---

[9]) $P+iO$ désigne le terme constant du développement de $U(\omega)$ dans un voisinage de 0, $O(\omega)$ — la somme d'autres termes d'un rang $\geqslant 1$.

[10]) $O_1(\omega)$, $O_2(\omega)$, $O_3(\omega)$ d'un rang $\geqslant 1$.

[11]) On en obtient facilement en dérivant la fonction $I(s)$ et en profitant de la condition $R(s)=0$ et des équations de Cauchy-Riemann.

γ) $\omega^{\cdot}(\hat{s})=\varrho e^{i\varphi}$.

Prenons en ce cas une branche de logarithme définie dans l'entourage du point 1 et y admettant la valeur zéro. Nous voyons facilement qu'on a pour tout s

$$M(\omega,s)=M^*(\omega)+2k\pi i\bar{z}_0^{1/2}+2k\pi iz_0^{1/2}, \qquad k=0,\pm 1,\ldots$$

où $M^*(\omega)$ désigne l'intégral (55) dans laquelle les logarithmes se rattachent à la branche choisie ci-dessus. On voit que l'expression $M^{*2}(\omega)$ est univoque dans le voisinage de $\omega^*=\varrho e^{i\varphi}$, d'où il résulte immédiatement que

$$[M(\omega,s)-\omega 2k\pi i\bar{z}_0^{1/2}-2k\pi iz_0^{1/2}]^2=M^{*2}(\omega),$$

pour s suffisamment proche de s^*.

Analogiquement, nous obtenons que

$$[M^{\cdot}(\omega,s)-2k^{\cdot}\pi i\bar{z}_0^{1/2}-2k^{\cdot}\pi iz_0^{1/2}]^2=M^{\cdot *2}(\omega), \qquad k^{\cdot}=0,\pm 1,\ldots$$

En outre $1/M^{*2}(\omega)$ est une fonction holomorphe dans le voisinage de $\omega^*=\varrho e^{i\varphi}$, de la derivée différente de zéro.

Ensuite nous aurons, d'aprés $R\{M[\omega(s),s]\}=0$, $R\{M_{\cdot}[\omega^{\cdot}(s),s]\}=0$ que $M^{*2}[\omega(s)]<0$, $M^{\cdot *2}[\omega^{\cdot}(s)]<0$, d'où il résulte immédiatement que $\omega(s_0)=\omega^{\cdot}(t_0)$ pour certains $s_0<s^*$ et $t_0<\hat{s}$, ce qui est contraire à la définition de $\hat{s}$.

En résumant, les deux extrémités de la courbe $K^{\cdot}$ sont différentes de $\varrho e^{i\varphi}$ et de ω_0, un d'eux seulement peuvant être égal à zéro. D'autre part, il résulte de la définition de $K^{\cdot}$, pareillement comme dans le cas de K, que toutes les extrémités de cette courbe doivent être égales à zéro ou à ω_0 ou à $\varrho e^{i\varphi}$, ce qui prouve que le cas consideré est impossible.

Finalement il ne reste donc que le cas

e) $\omega^*=0$,

c'est-à-dire que $\lim\limits_{s\to s^*}\omega(s)=0$.

Après avoir introduit l'arc K nous revenons à la démonstration de l'existence de la fonction $f^*(z)$, annoncée à la page 192.

Prenons un arc partiel C quelconque de la courbe K issue du point ω_0 et désignons par $\omega=\omega(z)$ la fonction univalente qui transforme le cercle $|z|<1$ en l'ensemble $G=K(0,1)-C$ de façon que $\omega(0)=0$. Supposons encore que l'arc C et la fonction $\omega(z)$ sont choisis de telle façon que $\omega'(0)=Te^{ia}$, où a est un nombre réel. Cela est tout à fait possible vu la condition $\lim\limits_{s\to s^*}\omega(s)=0$. On constate très facilement selon la définition de K et de C que l'expression

(66) $$\mathfrak{M}[\omega(z)]z^2\omega'^2(z)/\omega^2(z)$$

est une fonction régulière dans tout le cercle $|z|<1$ et y possède un seule pôle ζ, tel que $\omega(\zeta)=\varrho e^{i\varphi}$. En choisissant convenablement le nombre precédent α on peut admettre évidemment que ζ est un nombre réel et positif. De plus l'expression (66) étant, selon la définition de C et de K, encore réelle et non négative sur la circonférence $|z|=1$, nous voyons qu'elle doit s'exprimer par la formule

$$(67)\qquad \mathfrak{M}[\omega(z)]z^2\omega'^2(z)/\omega^2(z)=-\beta\bar{\Delta}(z-\Delta)^2(z-\zeta)^{-1}(1-\zeta z)^{-1},$$

où β est un nombre positif et $\Delta=e^{i\delta}$ (δ réel). De (67) on a

$$(68)\qquad \{\mathfrak{M}[\omega(z)]\}^{1/2}\omega'(z)/\omega(z)=(-\beta\bar{\Delta})^{1/2}(z-\Delta)z^{-1}(z-\varphi)^{-1}(1-\varphi z)^{-1}.$$

Puisque $\omega(0)=0$, il s'ensuit de (67) que

$$(69)\qquad \mathfrak{M}(0)=\beta\Delta\zeta^{-1}.$$

D'autre part

$$(70)\qquad \mathfrak{M}(0)=\varkappa^2 z_0\varrho^{-1}$$

où $\varkappa^2=2\varrho^2CT^{-1}(1-\varrho^2)$. En comparant (69) et (70) on obtient $\beta/\zeta=\varkappa^2/\varrho$, $\Delta=z_0$. En intégrant les deux membres de (68) et en développant ces intégrales pour z suffisamment petits, nous obtiendrons analogiquement comme à la page 188:

$$(71)\qquad \bar{z}_0\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)]+\log 2\varrho e^{i\varphi}-\log[Te^{i\alpha}(1-\varrho^2)/2]+2k_1\pi i$$
$$=\bar{z}_0\log[(1-\zeta)/(1+\zeta)]+\log 2\zeta-\log[(1-\zeta^2)/2]+2k_2\pi i,$$

où $k_i=0,\pm1,\pm2,\ldots$ $(i=1,2)$. D'autre part, les nombres ϱ,φ étant, d'après notre supposition de la page 187, des solutions des équations (53) et (54), on aura, d'après (33), (38) et (48);

$$(72)\qquad \bar{z}_0\log[(1-\varrho)/(1+\varrho)]+\log 2\varrho e^{i\varphi}-\log T[(1-\varrho^2)/2]+2k_1'\pi i$$
$$=\bar{z}_0\log[(1-r)/(1+r)]+\log 2r-\log[(1-r^2)/2]+2k_2'\pi i,$$

où $k_i'=0,\pm1,\pm2,\ldots$ $(i=1,2)$. En comparant les parties réelles des membres droits de (71) et (72) on obtient, en posant $z_0=e^{i\nu}$,

$$\cos\nu\log[(1-\zeta)/(1+\zeta)]+\log[4\zeta/(1-\zeta^2)]$$
$$=\cos\nu\log[(1-r)/(1+r)]+\log[4r/(1-r^2)],$$

d'où

$$(73)\qquad \zeta=r.$$

En substituant r au lieu de ζ dans (71) nous obtenons en nous servant de (72), que $e^{i\alpha}=1$. En résumant, nous voyons que $\omega(z)$ a la forme

$$(74)\qquad \omega(z)=Tz+\ldots$$

Elle appartient donc à la famille F_T. Puisque nous avons encore, selon (73), que $\omega(\zeta)=\varrho e^{i\varphi}$, donc la fonction (74) satisfait à la condition décrite à la page 192. Le seconde partie du théorème est donc démontrée pour la famille F_T.

Considérons maintenant la famille F_M et la famille des fonctions de la forme

$$(75)\qquad f(z)=F(z)/M_F,\quad \text{où}\quad M_F=\sup_{|z|<1}|F(z)|\leqslant M.$$

Les fonctions (75) appartiennent à la famille F_T, où

$$(76)\qquad T=M^{-1}.$$

Désignons comme auparavant par $f^*(z)$ la fonction extrémale par rapport à l'opération $K(f)=I\{f(r)/a_1\}$ dans la famille F_T. Il existe alors dans la famille F_M la fonction extrémale $F^*(z)$ par rapport à l'opération $K(F)=I\{F(r)\}$, et l'on peut admettre $F^*(z)=f^*(z)/T$. En posant $F^*(r)=$ $=\varrho_M e^{i\varphi_M}$, on aura selon (75)

$$(77)\qquad \varrho_M=\varrho M,\qquad \varphi_M=\varphi,$$

où ϱ et φ gardent leur significations antérieures. En substituant ϱ et φ, fournis par (77), et T fourni par (76) dans (53) et (54), nous obtenons les équations (4). C'est ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration du théorème 2. Dans ce but nous traiterons pour le moment M comme variable et passerons à la limite dans les équations (4), en faisant tendre M vers l'infini. Puisque ϱ_M est borné (voir [1], p. 89), on obtient de (4) que ϱ_M et φ_M ont des limites ϱ_∞ et φ_∞ satisfaisant aux équations

$$(78)\qquad \begin{aligned}\log\varrho_\infty&=\log[r/(1-r^2)]+\sin\varphi_\infty\log[(1+r)/(1-r)],\\ \varphi_\infty&=\cos\varphi_\infty\log[(1+r)/(1-r)].\end{aligned}$$

De même, en désignant par $S(r,M)$ le produit $\varrho_M\sin\varphi_M$, on a $S(r,M)\leqslant S(r,\infty)$, car $S(r,M)$ est la fonction monotonique de M.

Considérons maintenant la famille F_∞. Soit $F\in F_\infty$ une fonction quelconque de cette famille. Considérons la fonction auxiliaire

$$(79)\qquad \Phi_\varkappa(z)=\varkappa^{-1}F(\varkappa z)=z+A_2\varkappa z^2+\ldots,$$

définie dans le cercle $|z|<\varkappa<1$ et univalente. La fonction (79) est bornée, soit $\sup_{|z|<1}|\Phi_\varkappa(z)|=M_\varkappa$, $z=r$ étant fixé, on a évidemment

$$(80)\qquad I\{\Phi_\varkappa(r)\}\leqslant S(r,M_\varkappa)\leqslant S(r,\infty).$$

D'autre part $I\{\Phi_\varkappa(r)\}\to I\{F(r)\}$ si $\varkappa\to 1$, donc finalement on obtient de (78) et (80) évaluation de la partie imaginaire de la fonction $F(z)$ dans F_∞ de la forme $I\{F(r)\}\leqslant S(r,\infty)$ [12]).

Pour démontrer que la limite $S(r,\infty)$ est atteinte considérons maintenant la suite de fonctions extrémales $F_n^*(z)$ par rapport à l'opération $K(F)$ dans la famille F_{M_n}, où M_n est une suite convergente vers l'infini. On peut admettre, vu que la famille F_∞ est normale, par le choix d'une suite partielle, que la suite $F_n^*(z)$ est convergente vers une certaine fonction limite $F_0(z)$. On a alors

$$\lim I\{F_n^*(r)\} = I\{F_0(r)\},$$

et comme $I\{F_n^*(r)\}=S(r,M_n)$ on a $I\{F_0(r)\}=S(r,\infty)$, ce qui démontre finalement le théorème 2.

Travaux cités

[1] L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vol. I et II, New York 1945.

[2] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2 (1953), p. 3-57.

[3] Z. Charzyński, W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska 4, Sectio A, Mathematica (1950), p. 41-56.

[4] H. Grunsky, *Neue Abschätzungen zur Konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche*, Math. Sem. Univ. Berlin 1 (1932).

[12]) Les résultats obtenus pour les fonctions non bornées coïncident avec ceux que H. Grunsky a obtenu par d'autres procédés; voir [4].

Sur les fonctions univalentes K-symétriques

par W. Janowski (Łódź)

Considérons les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$\Phi(z) = z + B_2 z^{K+1} + B_3 z^{2K+1} + \ldots, \tag{1}$$

où K est un nombre entier et positif. Soit $M>1$ un nombre positif quelconque, Φ_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|\Phi(z)|<M$ et Φ_∞ — la famille de toutes les fonctions de la forme (1).

Les valeurs z ou bien $1>r>0$ étant fixées, on peut s'occuper des expressions suivantes

(2) $|\Phi(z)|$, (4) $R\{\Phi(r)\}$,

(3) $\arg(\Phi(z)/z)$ [1]), (5) $I\{\Phi(r)\}$

au sens de trouver leurs limites supérieures dans les familles Φ_M et Φ_∞.

On voit bien que pour les expressions (2)-(4) on obtient ces limites immédiatement, en profitant des résultats connus pour les fonctions 1-symétriques (voir [2] et [4]).

Pour les fonctions de la famille Φ_M et respectivement pour les fonctions de la famille Φ_∞ on a des inégalités

$$|\Phi(z)|\leqslant R_M, \qquad \Phi(z)\in\Phi_M, \tag{6}$$

où R_M $(0<R_M<|z|)$ *satisfait à l'équation* $R_M^K/[1-(R_M/M)^K]^2 = |z|^K/(1-|z|^K)^2$;

$$|\Phi(z)|\leqslant R_\infty, \qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty \tag{7}$$

où $R_\infty = |z|/(1-|z|^K)^{2/K}$;

$$\arg(\Phi(z)/z)\leqslant \Omega_M, \qquad \Phi(z)\in\Phi_\infty \tag{8}$$

où Ω_M *et* R_M $(0<R_M<|z|)$ *satisfont aux équations*

[1]) On prend la branche de l'argument qui est égale à 0, pour $z=0$.