Travaux cités

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2, Warszawa 1953.

[2] — et W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska 4, Sectio A, Mathematica, Lublin 1950, p. 41-56.

[3] W. Janowski, *Le maximum d'argument des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska 4, Sectio A, Mathematica, Lublin 1950, p. 57-72.

[4] — *Le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées*, ce volume, p. 182-200

[5] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Annalen 89 (1932), p. 103-125.

[6] G. Pieck, *Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet*, Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Kl., Wien Abt. IIa (1917), p. 247-263.

[7] D. C. Spencer, *The coefficients of schlicht functions*, Duke Math. Journal 12 (1945), p. 107-125.

Le maximum des coefficients B_2 et B_3 des fonctions univalentes K-symétriques bornées

par W. Janowski (Łódź)

Considérons les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$\Phi(z)=z+B_2 z^{K+1}+B_3 z^{2K+1}+\ldots, \tag{1}$$

où K est un nombre entier et positif. Soit $M>1$ un nombre positif quelconque, Φ_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|\Phi(z)|<M$.

Nous démontrerons les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Pour les fonctions de la famille Φ_M nous avons l'inégalité*

$$|B_2|\leqslant 2K^{-1}(1-M^{-K}) \tag{2}$$

et cette limite est atteinte.

THÉORÈME 2. *Pour les fonctions de la famille Φ_M nous avons l'inégalité*

$$|B_3|\leqslant\begin{cases} K^{-1}(1-M^{-2K}) & \textit{pour} \quad M\leqslant \exp[2/(K+1)],\\ K^{-1}(2\lambda^2+1+M^{-2K}-4\lambda M^{-K}) & \textit{pour} \quad M\geqslant \exp[2/(K+1)],\end{cases} \tag{3}$$

où le nombre λ est la plus grande des deux racines de l'équation

$$\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-M^{-K}.$$

La limite (3) *est atteinte.*

Pour démontrer ces théorèmes considérons d'abord les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$\varphi(z)=b_1 z+b_2 z^{K+1}+b_3 z^{2K+1}+\ldots=b_1(z+B_2 z^{K+1}+\ldots), \tag{4}$$

où $b_1\geqslant T^{1/K}$, T est un nombre quelconque fixe de l'intervalle (0,1). Ces fonctions sont assujetties à la condition $|\varphi(z)|<1$.

Considérons la famille de toutes les fonctions de la forme (4). Nous l'appelons famille φ_T. On voit facilement que la recherche des limites précises de B_2 et B_3 de (1) dans la famille Φ_M est équivalente au problème analogue pour les coefficients B_2 et B_3 de (4). Soit ensuite

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = a_1(z + A_2 z^2 + \ldots) \tag{5}$$

une fonction holomorphe univalente dans $|z|<1$ telle que $a_1>0$ et

$$\varphi(z) = [f(z^K)]^{1/K}, \tag{6}$$

où la fonction $\varphi(z)$ est une fonction quelconque donnée de la famille φ_T. On voit qu'une fonction telle que (5) existe, est définie univoquement et appartient à la famille F_T de toutes les fonctions univalentes bornées dans $|z|<1$ de la forme (5). En comparant les coefficients des mêmes puissances de z dans la formule (6) on obtient aisément que

$$b_1 = a_1^{1/K}, \qquad b_2 = \left[\frac{A_2}{K}\right] a_1^{1/K}, \qquad b_3 = \left[\frac{1}{K} A_3 - \frac{1}{K^3}\binom{K}{2} A_2^2\right] a_1^{1/K}. \tag{7}$$

Il en résulte facilement que la recherche des limites précises pour les coefficients B_2 et B_3 de (4) dans la famille φ_T est équivalente au problème analogue pour les expressions entre paranthèses du nombre droit de (7) dans la famille F_T.

Remarquons enfin qu'on peut remplacer dans ce dernier problème les expressions entre parenthèses par les expressions suivantes

$$R\left\{\frac{A_2}{K}\right\} \text{ [1]}, \tag{8}$$

$$R\left\{\frac{1}{K} A_3 - \frac{1}{K^3}\binom{K}{2} R\{A_2^2\}\right\}. \tag{8'}$$

Faisons correspondre à chaque fonction $f(z)$ de la famille F_T le nombre

$$H_f = H(X_{2f}, X_{3f}, \ldots, X_{Nf}, Y_{2f}, Y_{3f}, \ldots, Y_{Nf}), \tag{9}$$

où l'on suppose que $a_{nf}/a_{1f} = X_{nf} + iY_{nf}$ [2]) et que

$$H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N), \qquad N \geqslant 2 \tag{9'}$$

soit une fonction quelconque réelle de $2N-2$ variables réelles, définie dans une région suffisamment grande et qui y admet les dérivées partielles du premier ordre continues, ne s'annulant nulle part simultanément.

M. Z. Charzyński a démontré (voir [1], p. 5) qu'il existe dans la famille F_T des fonctions extrémales $f^*(z)$, pour lesquelles la fonctionnelle (9) atteint la valeur la plus grande et que chacune des extrémales satisfait à l'équation

[1]) Pour cela il suffit de considérer, au lieu de $f(z)$ la fonction $e^{-i\vartheta} f(ze^{i\vartheta})$ en choisissant convenablement le nombre réel ϑ.

[2]) Nous désignerons aussi les n-ièmes coefficients a_n et A_n par a_{nf} $(n=1,2,\ldots)$, A_{nf} $(n=2,3,\ldots)$ respectivement.

$$[f^{*\prime}(z)/f^*(z)]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = z^{-2}\mathfrak{N}(z), \qquad 0<|z|<1, \tag{10}$$

où

$$\mathfrak{M}(\omega) = \Big[\sum_{p=2}^{N} D^*_{p-1}\omega^{-(p-1)} + \bar{D}^*_{p-1}\omega^{p-1}\Big] - 2\mathfrak{P}^*, \tag{11}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \Big[\sum_{p=1}^{N} \mathfrak{C}^*_{p-1} z^{-(p-1)} + \bar{\mathfrak{C}}^*_{p-1} z^{p-1}\Big] - 2\mathfrak{P}^*, \tag{12}$$

$$\left\{\begin{aligned}
& f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n, \\
& [f^*(z)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n \qquad (p=2,3,\ldots,N), \\
& A_n^* = a_n^*/a_1^* \qquad (n=2,3,\ldots,N), \\
& A_n^* = X_n^* + iY_n^* \qquad (n=2,3,\ldots,N), \\
& H_n^* = H'_{X_n}(X_2^*, X_3^*, \ldots, X_N^*, Y_2^*, Y_3^*, \ldots, Y_N^*) - \\
& \qquad\qquad - iH'_{Y_N}(X_2^*, \ldots, X_N^*, Y_2^*, \ldots, Y_N^*) \\
& \qquad\qquad\qquad (n=2,3,\ldots,N), \\
& D^*_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^* \qquad (p=2,3,\ldots,N), \\
& \mathfrak{C}_0^* = \sum_{n=2}^{N} (n-1) a_n^* H_n^*, \\
& \mathfrak{C}^*_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} (n-p+1) a^*_{n-p+1} H_n^* \qquad (p=2,3,\ldots,N), \\
& \mathfrak{P}^* = \min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} R\Big\{\sum_{p=2}^{N} D^*_{p-1}\exp[ix(p-1)]\Big\}.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Il démontra aussi que les fonctions $\mathfrak{M}(\omega)$ et $\mathfrak{N}(z)$ ne prennent sur les circonférences $|\omega|=1$ et $|z|=1$ respectivement que des valeurs réelles, non négatives et que chacune d'elles y admet une racine double au moins. Enfin il démontra que le coefficient $a_1^* = T$.

On voit que notre problème concernant les expressions (8) et (8') se réduit à la recherche des coefficients des fonctions extrémales $f^*(z)$ correspondant aux fonctionnelles (9'), définies respectivement par les fonctions

$$H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N) = K^{-1} X_2, \tag{14}$$

$$H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N) = K^{-1} X_3 - K^{-3}\binom{K}{2} X_2^2. \tag{15}$$

D'une façon plus précise, si l'on trouve une fonction extrémale $f^*(x)$ de la forme

$$f^*(z) = a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots = a_1^*(z + A_2^* z^2 + \ldots) \tag{16}$$

pour laquelle la fonctionnelle définie par (14) ou (15) atteint la valeur la plus grande, on peut obtenir la limite précise des expressions (8) et (8′) resp. des coefficients dans (1) en remplaçant dans les formules (8) et (8′) les variables A_2 et A_3 par les coefficients A_2^* et A_3^* de la fonction extrémale $f^*(z)$ et en posant $T = M^{-K}$.

Nous démontrérons maintenant les théorèmes 1 et 2:

Démonstration du théorème 1. Supposons que la fonction (9′) ait la forme $H(X_2, \ldots, Y_N) = K^{-1}X_2$, $N = 2$. Comme le maximum de (8) correspond dans ce cas au maximum de la partie réelle du second coefficient de (5) dans la famille F_T, on trouve, selon des résultats bien connus, que le second coefficient A_2^* de la fonction extrémale $f^*(z)$ satisfait à l'égalité $R\{A_2^*\} = 2(1-T)$ (voir [2], p. 4) et on en déduit facilement que $|B_2| \leqslant 2K^{-1}(1 - M^{-K})$ pour chaque fonction de la famille Φ_M.

Le théorème 1 est ainsi démontré.

Démonstration du théorème 2. Pour obtenir la limite précise (3) prenons, au lieu de (15), la fonction suivante

$$H(X_2, X_3, \ldots, Y_N) = K^{-1}X_3 - K^{-3}\binom{K}{2}X_2^2 + Y_2^2, \qquad N = 3\,^{3}). \tag{17}$$

On remarque bien que si $f^*(z)$ est une fonction extrémale pour laquelle la fonctionnelle (9) est définie par (17) et si $f^*(z)$ atteint la valeur maximum, et si, de plus, les coefficients A_2^* et A_3^* de $f^*(z)$ sont réels, alors, pour la même fonction $f^*(z)$, la fonctionnelle (8′) définie par (15) atteindra son maximum. Prenons une telle extrémale $f^*(z)$ qui corresponde à la fonctionnelle définie par (17). On trouve facilement que les expressions (11) et (12) possèdent dans ce cas la forme:

$$\mathfrak{M}(\omega) = D_2^*\omega^{-2} + D_1^*\omega^{-1} - 2\mathfrak{P}^* + \overline{D}_1^*\omega + \overline{D}_2^*\omega^2, \tag{18}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \mathfrak{C}_2^* z^{-2} + \mathfrak{C}_1^* z^{-1} + \mathfrak{C}_0^* + \overline{\mathfrak{C}}_0^* - 2\mathfrak{P}^* + \overline{\mathfrak{C}}_1^* z + \overline{\mathfrak{C}}_2^* z^2 \tag{19}$$

où

$$D_1^* = \overline{D}_1^* = 2(K+1)K^{-2}a_1^* R\{a_2^*\}, \qquad D_2^* = \overline{D}_2^* = 2a_1^{*3}K^{-1},$$

$$\mathfrak{C}_0^* + \overline{\mathfrak{C}}_0^* = 4\left[[R\{a_3^*\}K^{-1} + I\{a_2^*\}^2 a_1^{*-1} - \binom{K}{2}K^{-3}R\{a_2^*\}^2 a_1^{*-1}\right], \tag{20}$$

$$\mathfrak{C}_1^* = 2(K+1)K^{-2}R\{a_2^*\}, \qquad \mathfrak{C}_2^* = 2a_1^* K^{-1}.$$

³) Comparer la méthode suivie pour le choix de l'expression analogue à (15) dans [2], p. 147.

L'équation (10) prendra la forme:

$$[f^{*\prime}(z)]^2[f^*(z)]^{-4}\{\overline{D}_2^*[f^*(z)]^4 + \overline{D}_1^*[f^*(z)]^3 - 2\mathfrak{P}^*[f^*(z)]^2 + D_1^* f^*(z) + D_2^*\}$$
$$= z^{-4}[\overline{\mathfrak{C}}_2^* z^4 + \overline{\mathfrak{C}}_1^* z^3 + (\mathfrak{C}_0^* + \overline{\mathfrak{C}}_0^* - 2\mathfrak{P}^*)z^2 + \mathfrak{C}_1^* z + \mathfrak{C}_2^*]. \tag{21}$$

Nous remarquons ensuite que les coefficients de l'équation (21) sont réels, d'où il résulte aisément que tous les coefficients de la fonction $f^*(z)$ sont réels et que par conséquent,

$$I\{a_2^*\} = 0, \qquad I\{a_3^*\} = 0, \qquad R\{a_2^*\} = a_2^*, \qquad R\{a_3^*\} = a_3^*.$$

Remarquons en outre qu'on peut supposer ici que (comparer [2], p. 149) $a_2^* \geqslant 0$, $a_3^* \geqslant 0$ et $\mathfrak{P}^* \leqslant 0$. Considérons maintenant la fonction $\mathfrak{N}(z)$. Elle a, d'après (19), la forme

$$\mathfrak{N}(z) = 2\left\{\frac{a_1^*}{Kz^2} + \frac{a_2^*(K+1)}{K^2 z} + 2\left[\frac{a_3^*}{K} - \frac{a_2^{*2}}{K^3 a_1^*}\binom{K}{2}\right] - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{P}^* + \frac{a_2^*(K+1)z}{K^2} + \frac{a_1^* z^2}{K}\right\}. \tag{22}$$

On sait que cette fonction a une racine double ε de module égal à un, d'où l'on peut représenter $\mathfrak{N}(z)$ sous la forme

$$\mathfrak{N}(z) = 2a_1^* K^{-1} z^{-2}(z^2 - 2\varepsilon z + \varepsilon^2)(z^2 - 2mz + \bar{\varepsilon}^2). \tag{23}$$

On démontre ensuite, comme dans le travail cité, que la fonction $z^2 - 2mz + \bar{\varepsilon}^2$ a une racine z_0, pour laquelle $|z_0| = 1$. Il en résulte que $z_0 = \bar{\varepsilon}$. Posons

$$\varepsilon = e^{i\vartheta}. \tag{24}$$

D'après (24) on peut écrire

$$\mathfrak{N}(z) = 2a_1^* K^{-1} z^{-2}(z^2 - 2z\cos\vartheta + 1)^2. \tag{25}$$

En comparant les coefficients dans les formules (22) et (25) on obtient

$$a_2^* = -4K(K+1)^{-1}a_1^*\cos\vartheta.$$

En posant, pour abréger, $-\cos\vartheta = \lambda$, on a

$$a_2^* = 4K(K+1)^{-1}a_1^*\lambda. \tag{26}$$

Revenons maintenant au nombre $\mathfrak{P}^*$. On trouve, comme dans le travail cité ([2], p. 151) que l'on a

$$\mathfrak{P}^* = K^{-1}(-4a_1^*\lambda^2 - 2a_1^{*3}) \quad \text{pour} \quad \lambda \leqslant a_1^*, \tag{27}$$

$$\mathfrak{P}^* = K^{-1}(-8a_1^{*2}\lambda + 2a_1^{*3}) \quad \text{pour} \quad \lambda \geqslant a_1^*. \tag{28}$$

icm©

Considérons l'égalité (27). Dans ce cas, en mettant la valeur de $\mathfrak{P}^*$ de (27) dans (18), on obtient, selon (20) et (26), après un calcul aisé, que pour $\omega=f^*(z)$,

$$\mathfrak{M}[f^*(z)] = 2a_1^{*3}K^{-1}[f^*(z)]^{-2}\{[f^*(z)]^2+2\lambda a_1^{*-1}f^*(z)+1\}^2$$

et que par conséquent l'équation (10) admet (après la division des deux membres par $2a_1^*K^{-1}$), en tenant compte de (25) et (26), la forme suivante:

$$a_1^{*2}[f^{*\prime}(z)]^2\{1+2\lambda a_1^{*-1}[f^*(z)]^{-1}+[f^*(z)]^{-2}\}^2=(1+2\lambda z^{-1}+z^{-2})^2,$$

d'où

$$f^{*\prime}(z)\{1+2\lambda a_1^{*-1}[f^*(z)]^{-1}+[f^*(z)]^{-2}\} = a_1^{*-1}(1+2\lambda z^{-1}+z^{-2}). \tag{29}$$

On a pris les branches indiquées des racines, car les coefficients de z^{-2} de deux côtés de (29) doivent être égaux. Comme l'équation (29) possède la même forme que l'équation (35) du travail cité (voir [2], p. 151) on déduit finalement de l'équation (29), en appliquant un raisonnement tout à fait analogue, que $2\lambda\log a_1^*+A_2^*=0$ d'où, d'après (26),

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, &&\text{si}\quad a_1^*\neq\exp[-2K/(K+1)],\\ 0\leqslant\lambda&\leqslant a_1^*, &&\text{si}\quad a_1^*=\exp[-2K/(K+1)] \end{aligned} \tag{30}$$

(comparer [2], p. 152).

Considérons maintenant les conséquences de l'égalité (28). Supposons que dans (28), $\lambda>a_1^*$. De (18), on trouve, en tenant compte de (20),

$$\mathfrak{M}(\omega)=2a_1^{*3}K^{-1}\omega^{-2}(\omega^4+4\lambda a_1^{*-1}\omega^3-\mathfrak{P}^*a_1^{*-1}\omega^2+4\lambda a_1^{*-1}\omega+1). \tag{31}$$

En mettant la valeur de $\mathfrak{P}^*$ de (28) dans (31) on obtient

$$\mathfrak{M}(\omega)=2a_1^{*3}K^{-1}\omega^{-2}[\omega^4+4\lambda a_1^{*-1}\omega^3+(8\lambda a_1^{*-1}-2)\omega^2+4\lambda a_1^{*-1}\omega+1]. \tag{32}$$

Comme l'expression (32) est analogue à celle de (44) du travail cité ([2], p. 152) on obtient une équation en $f^{*\prime}(z)$ identique à l'équation (48) du travail cité ([2], p. 153) et par conséquent on trouve finalement que

$$(1+A_2^*a_1^{*-1})+(1-2\lambda a_1^{*-1})+2\lambda a_1^{*-1}\log\lambda=0$$

d'où, selon (26),

$$\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-a_1^*. \tag{33}$$

On voit bien que, pour $\lambda=a_1^*$, on a (cf. [2], p. 154) $a_1^*=\exp[-2K/(K+1)]$.

En comparant les coefficients dans les formules (22) et (25) on obtient

$$\mathfrak{P}^*=2a_1^*K^{-1}[A_3^*-(K-1)K^{-1}A_2^*-2\lambda^2-1]. \tag{34}$$

Comparant (27) et (34), (28) et (34), tout en tenant compte de (30), (33) et de l'égalité evidente $a_1^*=T$, on obtient finalement ce qui suit:

1° Pour $\lambda<T$, on a $\lambda=0$, lorsque $T\neq\exp[-2K/(K+1)]$ et $0\leqslant\lambda<T$, lorsque $T=\exp[-2K/(K+1)]$. En même temps

$$A_2^*=4K(K+1)^{-1}\lambda, \tag{35}$$

$$A_3^*=\binom{K}{2}\left(\frac{4}{K+1}\right)^2\lambda^2+1-T^2. \tag{36}$$

2° Pour $\lambda=T$, il doit être $T=\exp[-2K/(K+1)]$ et en même temps

$$A_2^*=4K(K+1)^{-1}\lambda,\qquad A_3^*=\binom{K}{2}\left(\frac{4}{K+1}\right)^2\lambda^2+1-T^2.$$

3° Pour $\lambda<T$, on a $\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-T$, si

$$T<\exp[-2K/(K+1)]$$

et en même temps

$$A_2^*=4K(K+1)^{-1}\lambda,\qquad A_3^*=\binom{K}{2}4^2(K+1)^{-2}\lambda^2+2\lambda^2+1-4T\lambda+T^2.$$

Remarquons, comme nous l'avons fait dans le travail cité ([2], p. 155), que ce cas n'est possible que pour $T<\exp[-2K/(K+1)]$. On démontre, de même que dans ledit travail, que λ est la plus grande de deux racines de l'équation $\lambda\log\lambda+(K-1)/(K+1)=-T$.

On démontre ensuite, analogiquement comme dans le susdit travail ([2], p. 155), que:

a. Il existe pour chaque $0<T<1$ et pour $\lambda=0$ une fonction univalente bornée

$$\omega=f^*(z)=a_1^*z+a_2^*z^2+a_3^*z^3+\ldots=a_1^*(z+A_2^*z^2+A_3^*z^3+\ldots)$$

telle que $a_1^*=T$, $A_2^*=0$, $A_3^*=1-T^2$. Cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle de la forme $\omega-\omega^{-1}=T^{-1}(z-z^{-1})$.

b. Il existe pour $T=\exp[-2K/(K+1)]$ et pour chaque $0\leqslant\lambda\leqslant T$ une fonction univalente bornée,

$$\omega=f^*(z)=a_1^*z+a_2^*z^3+a_3^*z^3+\ldots=a_1(z+A_2^*z^2+A_3^*z^3+\ldots),$$

telle que

$$a_1^*=T,\qquad A_2^*=4K(K+1)^{-1}\lambda,\qquad A_3^*=\binom{K}{2}4^2(K+1)^{-2}\lambda^2+1-T^2. \tag{37}$$

Cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$\omega\exp\left\{\frac{\omega-\omega^{-1}}{2\lambda}\exp[-2K/(K+1)]\right\}-z\exp\left(\frac{z-z^{-1}}{2\lambda}\right)=0.$$

c. Il existe pour chaque $T<\exp[-2K/(K+1)]$ et pour λ satisfaisant à l'équation $\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-T$ une fonction univalente bornée,

$$\omega=f^*(z)=a_1^*z+a_2^*z^2+a_3^*z^3+\ldots=a_1^*(z+A_2^*z^2+A_3^*z^3+\ldots),$$

telle que

$$a_1^*=T,\qquad A_2^*=4K(K+1)^{-1}\lambda,$$

(37)

$$A_3^*=\binom{K}{2}4^2(K+1)^{-2}\lambda^2+2\lambda^2+1-4T\lambda+T^2.$$

Cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$(n+1)^{-1}[K(\omega)(\omega^{1/2}-\omega^{-1/2})-(\omega+\omega^{-1})+n+1]\times$$
$$\times\exp[K(\omega)T(\omega^{1/2}-\omega^{-1/2})/2\lambda]-z\exp[(z-z^{-1})/2\lambda]=0$$

où $K(\omega)\equiv(\omega+\omega^{-1}-2n)^{1/2}$, $n=-2\lambda/T+1$.

En introduisant maintenant les valeurs (35) et (36), resp. (35) et (37) dans la formule (15), au lieu de X_2 et X_3, nous obtenons, en tenant compte d'une remarque faite au début de ce travail, p. 163, que l'une des expressions $K^{-1}(1-T^2)$ ou $K^{-1}(2\lambda^2+1+T^2-4\lambda T)$, où λ est une racine de l'équation

$$\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-T,$$

représente la limite précise démandée dans (3) pour $T=M^{-K}$. Enfin, en comparant les expressions dans l'intervalle $0<T<1$, on trouve facilement, comme dans le travail cité, que

$$|B_3|\leqslant\begin{cases}K^{-1}(1-M^{-2K}) & \text{pour}\quad M\leqslant\exp[2/(K+1)],\\ K^{-1}(2\lambda^2+1+M^{-2K}-4\lambda M^{-K}) & \text{pour}\quad M\geqslant\exp[2/(K+1)],\end{cases}$$

où le nombre λ satisfait à l'équation $\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-M^{-K}$. En considérant dans Φ_M les fonctions extrémales $\Phi^*(z)$ pour lesquelles le troisième coefficient est positif de module plus grand, nous tirons de a.-c. les conclusions suivantes:

1⁰ Pour $T>\exp[-2K/(K+1)]$ il existe exactement une fonction extrémale, définie par la formule

(38)
$$\Phi^*(z)=[f^*(z^K)/T]^{1/K},$$

où $f^*(z)$ est définie dans a.

2⁰ Pour $T=\exp[-2K/(K+1)]$ il existe une classe infinie de fonctions extrémales définie par la formule (38), où $f^*(z)$ est définie dans b.

3⁰ Pour $T<\exp[-2K/(K+1)]$ il existe exactement une fonction extrémale définie par la formule (38), où $f^*(z)$ est définie dans c. pour $T=M^{-K}$.

On démontre de même que dans le travail [2], p. 159, que pour la famille Φ_∞ de toutes les fonctions de la forme (1) on a $|B_3|\leqslant K^{-1}(2\lambda^2+1)$, où $\lambda=\exp[(1-K)/(1+K)]$.

References

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne II, 1953.

[2] W. Janowski, *Le maximum des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées*, ce volume, p. 145-160.