

$+(1-t)R(\beta_n z_2)$. Hence the modulus $|\exp(-\beta_n z)|$ lies between the moduli $|\exp(-\beta_n z_1)|$, $|\exp(-\beta_n z_2)|$, and the (absolute) convergence of (1) follows from the absolute convergence of the two series

$$a_1 \exp(-\beta_1 z_1) + a_2 \exp(-\beta_2 z_1) + \dots$$

and

$$a_1 \exp(-\beta_1 z_2) + a_2 \exp(-\beta_2 z_2) + \dots$$

7. We can find an explicit formula for the boundary of D . If $z=x+iy$ series (1) can be written in the form

$$\gamma_1 \exp(-\beta_1 x) + \gamma_2 \exp(-\beta_2 x) + \dots,$$

where $\gamma_n = a_n \exp(-i\beta_n y)$. Since $\log |\gamma_n| = \log |a_n| + \beta_n'' y$ (β_n'' imaginary part of β_n), we find, by use of (4), the following equation for the boundary line of D :

$$x = \overline{\lim} \left(\frac{\log |a_n|}{\beta_n''} + \frac{\beta_n''}{\beta_n''} y \right).$$

From this formula it may also easily be deduced that D is a convex region containing the angular region (6).

8. By refining the argument of section 5, we can prove that series (1) converges uniformly in each closed and bounded set in the interior of D . In fact, if $|\theta| \leq \theta_0 < \pi/2 - \delta$, we have

$$\lim \arg \bar{\beta}_n > -\delta - \theta_0 > -\pi/2 \quad \text{and} \quad \overline{\lim} \arg \bar{\beta}_n < \delta + \theta_0 < \pi/2;$$

hence, for great values of n ,

$$R(\bar{\beta}_n) > |\beta_n| \cos(\arg \bar{\beta}_n) > |\beta_n| \varepsilon,$$

where $\varepsilon = [\cos(\delta + \theta_0)]/2$. Thus, for great values of n , the terms of (5) are less (in absolute value) than the terms of the series

$$M(\exp(-\varepsilon|\beta_1|\varrho) + \exp(-\varepsilon|\beta_2|\varrho) + \dots)$$

which converges for positive ϱ . This proves that (1) converges uniformly in any region

$$z = z_0 + \varrho \exp i\theta \quad (0 < \varrho_0 < \varrho, |\theta| < \theta_0).$$

The uniform convergence in arbitrary closed and bounded sets in the interior of D follows by the Borel-Lebesgue theorem.

This implies that the sum of (1) is an analytic function inside D .

Problème aux limites de Poincaré généralisé

par W. POGORZELSKI (Warszawa)

1. Introduction. Le problème aux limites de Poincaré ([3], Chapitre X) consiste dans la recherche d'une fonction $u(x, y)$, harmonique à l'intérieur d'un domaine D , limité par une courbe fermée L , qui sur cette courbe satisfait à une relation linéaire

$$(1) \quad du/dn + a(s)u + b(s)du/ds = f(s)$$

entre les valeurs limites de la dérivée suivant la normale du/dn , de la dérivée tangentielle du/ds , et de la fonction u elle-même; $a(s)$, $b(s)$, $f(s)$ sont les fonctions données de la longueur d'arc de la courbe L qui détermine la position du point sur la courbe L .

Le problème cité fut posé et résolu par Poincaré dans le cas particulier $a=0$ et sous la supposition que les fonctions données, $b(s)$, $f(s)$ et la ligne L , sont *analytiques*. L'auteur de ce travail [2] a résolu le problème pour le cas $a \neq 0$ mais sous la même supposition d'analyticité. Le problème a été résolu complètement, sous les suppositions plus générales que les fonctions $a(s)$, $b(s)$, $f(s)$ satisfont à la condition d'Hölder, par le mathématicien soviétique Hvedéldzé [1].

Dans ce travail nous nous proposons de résoudre le problème de la recherche d'une fonction harmonique $u(x, y)$ à l'intérieur du domaine D , qui en tout point (s) au bord L de ce domaine vérifie la relation généralisée suivante:

$$(2) \quad du/dn + a(s)u = \lambda F(s, u, du/ds),$$

où $F(s, u, v)$ est une fonction des trois variables, définie dans une certaine région et λ est un paramètre. On admet les suppositions suivantes:

I. La ligne fermée de Jordan L a la tangente *continue* en tout point et l'angle que fait cette tangente avec une direction fixe satisfait à la condition d'Hölder, c'est-à-dire qu'on a

$$(3) \quad |\delta_{ss_1}| \leq c_1 |s - s_1|^\gamma \quad (0 < \gamma \leq 1),$$

où δ_{ss_1} désigne l'angle que font les tangentes aux deux points arbitraires de la courbe L aux coordonnées curvilignes s et s_1 .

II. La fonction des trois variables réelles $F(s, u, v)$ est définie dans la région fermée

$$(4) \quad (s) \in L, \quad |u| \leq R_1, \quad |v| \leq R_2.$$

Elle vérifie la condition d'Hölder par rapport aux variables s, u et la condition de Lipschitz par rapport à la variable v , c'est-à-dire qu'on a

$$(5) \quad |F(s, u, v) - F(s_1, u_1, v_1)| \leq K[|s - s_1|^\alpha + |u - u_1|^\beta + |v - v_1|].$$

III. La fonction $a(s)$, définie sur L , vérifie la condition d'Hölder

$$(6) \quad |a(s) - a(s_1)| \leq K'|s - s_1|^\alpha.$$

On admet que les exposants d'Hölder satisfont aux inégalités

$$(7) \quad \alpha < \beta \leq 1, \quad \alpha < \gamma \leq 1.$$

Nous cherchons la fonction demandée $u(M)$ sous la forme d'un potentiel logarithmique

$$(8) \quad u(M) = \int_L \log r_{Ms}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma$$

de la couche simple de densité réelle $\mu(\sigma)$. On a alors

$$(9) \quad \begin{aligned} (\partial u / \partial n)_s &= -\pi \mu(s) + \int_L \sin \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \\ (\partial u / \partial s)_s &= \int_L \cos \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

où $\varphi_{s\sigma}$ désigne l'angle que fait le vecteur $\vec{r}_{s\sigma}$, joignant les points (s) et (σ) sur L avec la direction positive de la tangente au point (s) . La fonction sous la première intégrale (9) a une faible singularité, si $r_{s\sigma} \rightarrow 0$ et la seconde — une forte singularité; par conséquent, la seconde intégrale a une valeur principale de Cauchy. En substituant les expressions (9) dans la relation limite (2), on arrive à une équation intégrale pour la fonction inconnue $\mu(s)$:

$$(10) \quad \begin{aligned} -\pi \mu(s) + \int_L \sin \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma + a(s) \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma \\ = \lambda F[s, \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \int_L \cos \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma]. \end{aligned}$$

C'est une équation intégrale non-linéaire à une forte singularité. La méthode classique des approximations successives est impuissante à résoudre l'équation (10). Nous la résolvons donc par l'application du théorème topologique de J. Schauder [4]:

Si dans un espace complet, linéaire et normé, une transformation continue fait correspondre à un ensemble S de points, convexe et fermé, son sous-ensemble compact, alors il existe dans l'ensemble S un point invariant de la transformation.

2. Études des intégrales auxiliaires. Avant d'appliquer le théorème de Schauder à l'équation intégrale (10), nous démontrerons les propriétés concernant les trois intégrales qui figurent dans l'équation (10). Nous étudierons d'abord l'intégrale la plus difficile,

$$(11) \quad \Phi(s) = \int_L \cos \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma,$$

dont la fonction sous-intégrale admet la forte singularité si $r_{s\sigma} \rightarrow 0$.

THÉORÈME 1. Si la fonction réelle $\mu(s)$, définie sur L , vérifie la condition d'Hölder,

$$(12) \quad |\mu(s) - \mu(s_1)| \leq \kappa |s - s_1|^\alpha,$$

où $0 < \alpha < \gamma \leq 1$, γ étant l'exposant d'Hölder concernant la propriété (3) de la courbe L , alors l'intégrale (11) vérifie aussi la condition d'Hölder sous la forme

$$(13) \quad |\Phi(s) - \Phi(s_1)| \leq (K_1 M_\mu + K_2 \kappa) |s - s_1|^\alpha$$

avec le même exposant $\alpha < 1$; les constantes positives K_1 et K_2 ne dépendent que de la forme géométrique de la courbe L , M_μ désigne la borne supérieure de la fonction $\mu(\sigma)$.

Pour démontrer le théorème, désignons par $\bar{\varphi}_{s\sigma}$ l'angle que fait la tangente au point (σ) avec le vecteur $\vec{r}_{s\sigma}$ et remarquons qu'on a

$$\int_L \cos \bar{\varphi}_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} d\sigma = \int_L [d(\log r_{s\sigma}^{-1}) / d\sigma] d\sigma = 0.$$

Nous pouvons donc écrire l'intégrale (11) sous la forme

$$(14) \quad \Phi(s) = \int_L [\cos \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) - \cos \bar{\varphi}_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(s)] d\sigma = I_1(s) + I_2(s),$$

où l'on a désigné

$$(15) \quad \begin{aligned} I_1(s) &= \int_L (\cos \varphi_{s\sigma} - \cos \bar{\varphi}_{s\sigma}) r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \\ I_2(s) &= \int_L \cos \bar{\varphi}_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} [\mu(\sigma) - \mu(s)] d\sigma. \end{aligned}$$

Les fonctions sous-intégrales ont ici une faible singularité. Nous démontrons que chacune des intégrales (15) vérifie la condition d'Hölder avec l'exposant $\alpha < 1$.

Soit donc un point arbitraire (s) de la courbe L et le point voisin (s_1) de cette courbe. On peut toujours supposer que la distance r_{ss_1} est suffisamment petite pour que le cercle Γ de rayon (Fig. 2) $r_{\Gamma} = 2r_{ss_1}$ contient à l'in-

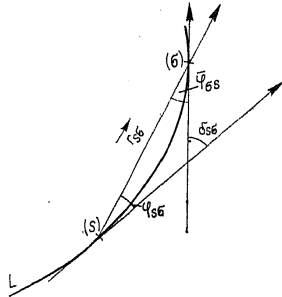


Fig. 1

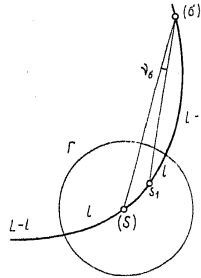


Fig. 2

térieur un seul arc l de la courbe L ; désignons par $L-l$ la partie extérieure de la courbe L . Décomposons l'intégrale $I_1(s)$ en deux parties

$$(16) \quad I_1(s) = I_1^I(s) + I_1^{L-l}(s),$$

étendues aux arcs l et $L-l$, et considérons d'abord la différence

$$(17) \quad I_1^I(s) - I_1^I(s_1) = \int_l [P(s, \sigma)r_{s\sigma}^{-1} - P(s_1, \sigma)r_{s_1\sigma}^{-1}] \mu(\sigma) d\sigma$$

en posant

$$(18) \quad P(s, \sigma) = \cos \varphi_{s\sigma} - \cos \bar{\varphi}_{s\sigma} = -2 \sin [(\varphi_{s\sigma} + \bar{\varphi}_{s\sigma})/2] \sin [(\varphi_{s\sigma} - \bar{\varphi}_{s\sigma})/2].$$

Or nous avons (Fig. 1) $\delta_{s\sigma} = \varphi_{s\sigma} + \bar{\varphi}_{s\sigma}$, donc, d'après la supposition (3), la fonction (18) satisfait à l'inégalité de la forme

$$(19) \quad |P(s, \sigma)| \leq c_1 |s - \sigma|^\gamma$$

pour tout point $\sigma \in l$, où la constante positive c_1 ne dépend que de la courbe L . Remarquons ensuite qu'il existe un nombre positif χ ne dépendant que de la courbe L , et qu'on a les inégalités

$$(20) \quad 1 \leq |s - \sigma| r_{s\sigma}^{-1} \leq \chi$$

pour tout les deux points (s) et (σ) sur la courbe L . Nous avons donc

$$|I_1^I(s)| \leq \int_l |P(s, \sigma)| r_{s\sigma}^{-1} |\mu(\sigma)| d\sigma \leq c_1 \chi M_\mu \int_l |s - \sigma|^\gamma |s - \sigma|^{-1} d\sigma,$$

M_μ étant la borne supérieure de la fonction $|\mu(s)|$. L'inégalité analogue est vérifiée par l'intégrale $I_1^I(s_1)$. Nous en concluons, d'après la valeur

$r_{\Gamma} = 2r_{ss_1}$ du rayon du cercle Γ et l'inégalité (20), qu'il existe une constante positive ϵ , ne dépendant que de la forme de la courbe L , que les inégalités

$$(21) \quad |I_1^I(s)| \leq \epsilon M_\mu |s - s_1|^\gamma, \quad |I_1^I(s_1)| \leq \epsilon M_\mu |s - s_1|^\gamma$$

soient vraies en tout point (s) et (s_1) de la courbe L . Nous écrivons ensuite

$$(22) \quad \begin{aligned} I_1^{L-l}(s) - I_1^{L-l}(s_1) &= \int_{L-l} [P(s, \sigma)r_{s\sigma}^{-1} - P(s_1, \sigma)r_{s_1\sigma}^{-1}] \mu(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{L-l} [P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma)] r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma + \int_{L-l} P(s_1, \sigma) (r_{s\sigma}^{-1} - r_{s_1\sigma}^{-1}) \mu(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

et remarquons que

$$P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma) = (\cos \varphi_{s\sigma} - \cos \varphi_{s_1\sigma}) - (\cos \bar{\varphi}_{s\sigma} - \cos \bar{\varphi}_{s_1\sigma});$$

donc $|P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma)| \leq |\varphi_{s\sigma} - \varphi_{s_1\sigma}| + |\bar{\varphi}_{s\sigma} - \bar{\varphi}_{s_1\sigma}|$. Or $\varphi_{s\sigma} + \nu_\sigma = \varphi_{s_1\sigma} + \delta_{ss_1}$, ν_σ étant un angle que fait le vecteur $\vec{r}_{s\sigma}$ avec le vecteur $\vec{r}_{s_1\sigma}$ égal en valeur absolue à $|\bar{\varphi}_{s\sigma} - \bar{\varphi}_{s_1\sigma}|$. Nous avons donc

$$(22^I) \quad |\varphi_{s\sigma} - \varphi_{s_1\sigma}| \leq |\delta_{ss_1}| + |\nu_\sigma|,$$

$$(22^{II}) \quad |P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma)| \leq 2|\bar{\varphi}_{s\sigma} - \bar{\varphi}_{s_1\sigma}| + |\delta_{ss_1}|$$

si $\sigma \in L-l$. Fixons maintenant le point σ et traitons l'angle $\bar{\varphi}_{s\sigma}$ comme fonction de la variable s , alors, d'après les formules de la géométrie infinitésimale, cette fonction aura une dérivée en tout point $s \neq \sigma$ qui s'exprime par la formule

$$(22^{III}) \quad d\bar{\varphi}_{s\sigma}/ds = \pm \sin \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1}.$$

Cette formule fait connaître l'ordre de grandeur de cette dérivée, si $|s - \sigma| \rightarrow 0$. En appliquant le théorème des accroissements, nous avons

$$(22^{IV}) \quad |\bar{\varphi}_{s\sigma} - \bar{\varphi}_{s_1\sigma}| = |\sin \varphi_{s'\sigma} r_{s'\sigma}^{-1}| |s - s_1|,$$

σ étant sur $L-l$ et (s') étant un point sur l'arc (ss_1). D'après le même théorème, il existe sur l'arc ($s'\sigma$) un point où la tangente est parallèle au vecteur $\vec{s'\sigma}$, donc, remarque faite des inégalités (3) et (20), nous aurons la limitation suivante de la dérivée (22^{III})

$$|d\bar{\varphi}_{s\sigma}/ds|_{s'} = |\sin \varphi_{s'\sigma} r_{s'\sigma}^{-1}| \leq c_1 \chi |s' - \sigma|^{\gamma-1},$$

quelque petit que soit la différence $s' - \sigma \neq 0$. Mais si le point σ est situé sur l'arc $L-l$, alors la longueur $|s' - \sigma|$ est toujours supérieure à la distance r_{ss_1} , donc $|s' - \sigma| \geq |s - s_1| \chi^{-1}$. Il en résulte la limitation suivante de la différence (22^{IV}):

$$(22^V) \quad |\bar{\varphi}_{s\sigma} - \bar{\varphi}_{s_1\sigma}| \leq c_1 \chi^{2-\gamma} |s - s_1|^\gamma \quad (\sigma \in L-l).$$

Nous en concluons que la différence (22^{II}) satisfait à l'inégalité

$$(23) \quad |P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma)| \leq c_2 |s - s_1|^\gamma \quad \text{pour } \sigma \in L - l,$$

c_2 étant une constante positive ne dépendant que de la courbe L . Nous aurons donc

$$\left| \int_{L-l} [P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma)] r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma \right| \leq \chi c_2 |s - s_1|^\gamma M_\mu \int_{L-l} |s - \sigma|^{-1} d\sigma.$$

Or l'intégrale à droite augmente comme $|\log r_r|$ si $|s - s_1| \rightarrow 0$, par conséquent la première intégrale dans la somme (22) vérifie la condition d'Hölder avec un exposant positif $\gamma - \varepsilon$, arbitrairement inférieur à γ , et nous avons

$$(24) \quad \left| \int_{L-l} [P(s, \sigma) - P(s_1, \sigma)] r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma \right| \leq c_3 M_\mu |s - s_1|^{\gamma - \varepsilon},$$

où la constante positive c_3 ne dépend que de la courbe L et de ε . Pour étudier la seconde composante de la somme (22), remarquons que l'on a

$$(25) \quad |r_{s\sigma} - r_{s_1\sigma}| \leq r_{s_1\sigma} \leq |s - s_1|, \quad 1/2 \leq r_{s_1\sigma}/r_{s\sigma} \leq 3/2 \quad (\sigma \in L - l).$$

Par conséquent nous aurons, d'après les inégalités (19) et (20),

$$\begin{aligned} \left| \int_{L-l} P(s_1, \sigma) (r_{s\sigma}^{-1} - r_{s_1\sigma}^{-1}) \mu(\sigma) d\sigma \right| &\leq M_\mu c_1 \int_{L-l} |s_1 - \sigma|^\gamma |s - s_1| r_{s\sigma}^{-1} r_{s_1\sigma}^{-1} d\sigma \\ &\leq 2(3/2)^\gamma c_1 \chi^2 M_\mu |s - s_1| \int_{L-l} |s - \sigma|^{\gamma-2} d\sigma. \end{aligned}$$

L'intégrale obtenue est comparable à $|s - s_1|^{\gamma-1}$ si $s_1 \rightarrow s$, donc

$$(26) \quad \left| \int_{L-l} P(s_1, \sigma) (r_{s\sigma}^{-1} - r_{s_1\sigma}^{-1}) \mu(\sigma) d\sigma \right| \leq c_4 M_\mu |s - s_1|^\gamma.$$

En somme, d'après les inégalités (21), (24), (26), l'intégrale $I_1(s)$, donnée par la formule (15), vérifie la condition d'Hölder avec un exposant $\gamma - \varepsilon$ arbitrairement inférieur à γ et l'on a

$$(27) \quad |I_1(s) - I_1(s_1)| \leq C_1 M_\mu |s - s_1|^{\gamma - \varepsilon}.$$

La constante positive C_1 ne dépend que de la courbe L et de ε . Étudions maintenant la seconde des intégrales (15). Nous la décomposons de même en deux parties

$$I_2(s) = I_2^l(s) + I_2^{L-l}(s),$$

étendues aux arcs l et $L-l$. Pour la première partie, nous aurons, d'après les inégalités (12) et (20),

$$|I_2^l(s)| = \left| \int_l \cos \varphi_{os} r_{s\sigma}^{-1} [\mu(\sigma) - \mu(s)] d\sigma \right| \leq \chi \int_l \kappa |s - \sigma|^{a-1} d\sigma$$

et l'inégalité analogue pour l'intégrale $I_2^l(s_1)$. Par conséquent, nous avons les inégalités

$$(28) \quad |I_2^l(s)| \leq c' \kappa |s - s_1|^a, \quad |I_2^l(s_1)| \leq c' \kappa |s - s_1|^a,$$

où la constante positive c' ne dépend que de la courbe L .

Pour étudier l'intégrale I_2^{L-l} , nous écrivons

$$\begin{aligned} (29) \quad I_2^{L-l}(s) - I_2^{L-l}(s_1) &= \int_{L-l} \cos \varphi_{os} r_{s\sigma}^{-1} [\mu(\sigma) - \mu(s)] d\sigma - \\ &\quad - \int_{L-l} \cos \varphi_{os_1} r_{s_1\sigma}^{-1} [\mu(\sigma) - \mu(s_1)] d\sigma \\ &= \int_{L-l} [\cos \varphi_{os} - \cos \varphi_{os_1}] r_{s_1\sigma}^{-1} [\mu(\sigma) - \mu(s_1)] d\sigma + \\ &\quad + \int_{L-l} (r_{s\sigma}^{-1} - r_{s_1\sigma}^{-1}) \cos \varphi_{os} [\mu(\sigma) - \mu(s_1)] d\sigma \end{aligned}$$

en nous appuyant sur la propriété

$$\int_{L-l} \cos \varphi_{os} r_{s\sigma}^{-1} d\sigma = \int_{L-l} [d \log r_{s\sigma}^{-1}] / d\sigma = 0.$$

En appliquant maintenant les inégalités (12), (22^V), (20) et (25) à l'expression (29), nous aurons

$$\begin{aligned} |I_2^{L-l}(s) - I_2^{L-l}(s_1)| &\leq c_1 |s - s_1|^\gamma \chi^{2-\gamma} \kappa \int_{L-l} |s - s_1|^a r_{s_1\sigma}^{-1} d\sigma + \\ &\quad + 2^{1-a} 3^a \chi^{a+2} \kappa |s - s_1| \int_{L-l} |s - \sigma|^{a-2} d\sigma. \end{aligned}$$

La première intégrale obtenue à droite reste bornée si $|s - s_1| \rightarrow 0$ et la seconde a la partie principale: $\text{const} \cdot |s - s_1|^{a-1}$, nous en concluons, d'après les inégalités (28), que l'intégrale $I_2(s)$ satisfait à l'inégalité d'Hölder avec un exposant a sous la forme

$$(30) \quad |I_2(s) - I_2(s_1)| \leq C_2 \kappa |s - s_1|^a,$$

où la constante positive C_2 ne dépend que de la courbe L . En réunissant les résultats (27), (30) et remarquant qu'on a supposé $a < \gamma \leq 1$, nous concluons que l'intégrale (11) satisfait à la condition d'Hölder avec l'exposant a de la forme suivante

$$(31) \quad |\Phi(s) - \Phi(s_1)| \leq (K_1 M_\mu + K_2 \kappa) |s - s_1|^a,$$

les constantes positives K_1 et K_2 ne dépendant que de la forme de la courbe L , c. q. f. d.

Nous signalons encore que, d'après les expressions (14) et (15), la fonction $\Phi(s)$ elle-même satisfait à l'inégalité

$$(32) \quad |\Phi(s)| \leq c'_1 M_\mu \int_l |s - \sigma|^\gamma r_{s\sigma}^{-1} d\sigma + \kappa \int_l |s - \sigma|^{a-1} r_{s\sigma}^{-1} d\sigma \leq k_1 M_\mu + k_2 \kappa,$$

où k_1 et k_2 sont les constantes positives fixées ne dépendant que de la courbe L .

THÉORÈME 2. *Si la fonction réelle $\mu(s)$, définie sur la ligne L , est continue, alors les intégrales suivantes de fonctions à faible singularité*

$$(33) \quad J_1(s) = \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \quad J_2(s) = \int_L \sin \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma$$

sont des fonctions déterminées sur la ligne L qui satisfont à la condition d'Hölder, la première avec un exposant arbitrairement inférieur à l'unité et la seconde avec un exposant arbitrairement inférieur à l'exposant γ , concernant la propriété (3) de la tangente.

Pour démontrer le théorème, nous suivons la même méthode que précédemment. Nous considérons donc deux points suffisamment voisins, (s) et (s_1) , de la courbe L , le cercle Γ de centre s et nous décomposons les intégrales (33) en deux parties étendues aux arcs l et $L-l$. Étudions d'abord l'intégrale

$$J_1(s) = J_1^l(s) + J_1^{L-l}(s).$$

Nous avons

$$(34) \quad |J_1^l(s) - J_1^l(s_1)| \leq M_\mu \int_l |\log(r_{s_1\sigma} r_{s\sigma}^{-1})| d\sigma.$$

En utilisant la transformation homothétique de l'arc l , du point s comme centre, qui amène le cercle Γ au cercle de rayon unité, on voit que la différence (34) vérifie l'inégalité

$$(34') \quad |J_1^l(s) - J_1^l(s_1)| \leq \text{const} \cdot M_\mu |s - s_1|.$$

Pour la seconde partie, nous avons de même

$$(35) \quad |J_1^{L-l}(s) - J_1^{L-l}(s_1)| \leq M_\mu \int_{L-l} |\log(r_{s_1\sigma} r_{s\sigma}^{-1})| d\sigma.$$

Or pour les points (σ) sur $L-l$ on a les inégalités $1/2 \leq r_{s_1\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \leq 3/2$, il existe donc une constante q telle que tous les points (σ) sur l'arc $L-l$ vérifient l'inégalité $|\log(r_{s_1\sigma} r_{s\sigma}^{-1})| \leq q |r_{s_1\sigma} r_{s\sigma}^{-1} - 1|$ et nous aurons, d'après (20),

$$\begin{aligned} |J_1^{L-l}(s) - J_1^{L-l}(s_1)| &\leq M_\mu q \int_{L-l} |r_{s_1\sigma} - r_{s\sigma}| r_{s\sigma}^{-1} d\sigma \\ &\leq M_\mu q \chi |s - s_1| \int_{L-l} |s - \sigma|^{-1} d\sigma. \end{aligned}$$

L'intégrale obtenue augmente comme $|\log|s - s_1||$, si le rayon $r_r = 2r_{s_1}$ du cercle Γ tend vers zéro. Nous en concluons finalement, d'après l'inégalité (34'), que l'intégrale $J_1(s) = J_1^l(s) + J_1^{L-l}(s)$ vérifie la condition d'Hölder de la forme

$$(36) \quad |J_1(s) - J_1(s_1)| \leq M_\mu q_1 |s - s_1|^{1-\varepsilon}$$

avec un exposant $1-\varepsilon$ arbitrairement inférieur à l'unité; q_1 est une constante positive qui ne dépend que de la courbe L et du nombre ε choisi.

Il reste à étudier la seconde des intégrales (33). Nous la décomposons de même:

$$J_2(s) = J_2^l(s) + J_2^{L-l}(s)$$

et nous voyons, d'après l'inégalité (3) et le théorème de la moyenne, qu'on a $|\varphi_{s\sigma}| \leq c_1 |s - \sigma|^\gamma$, donc

$$(37) \quad |J_2^l(s)| \leq c_1 M_\mu \int_l |s - \sigma|^\gamma r_{s\sigma}^{-1} d\sigma \leq c_1 \chi M_\mu \int_l |s - \sigma|^{\gamma-1} d\sigma,$$

$$|J_2^l(s_1)| \leq c_1 \chi M_\mu \int_l |s_1 - \sigma|^{\gamma-1} d\sigma.$$

Ces intégrales admettent par conséquent la limite supérieure $\text{const} \times M_\mu |s - s_1|^\gamma$. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} |J_2^{L-l}(s) - J_2^{L-l}(s_1)| &\leq \int_{L-l} |\sin \varphi_{s\sigma} - \sin \varphi_{s_1\sigma}| r_{s\sigma}^{-1} |\mu(\sigma)| d\sigma + \\ &\quad + \int_{L-l} |\sin \varphi_{s_1\sigma}| |r_{s_1\sigma}^{-1} - r_{s\sigma}^{-1}| |\mu(\sigma)| d\sigma, \end{aligned}$$

mais, d'après les inégalités (22^I) et (22^V), on a

$$|\sin \varphi_{s\sigma} - \sin \varphi_{s_1\sigma}| \leq c_1' |s - s_1|^\gamma,$$

donc, en appliquant de même les inégalités (20) et (25), nous aurons

$$(38) \quad |J_2^{L-l}(s) - J_2^{L-l}(s_1)| \leq c_1' |s - s_1|^\gamma M_\mu \chi \int_{L-l} |s - \sigma|^{\gamma-1} d\sigma + \\ + M_\mu |s - s_1| c_1 \chi^2 2^{1-\gamma} \int_{L-l} |s - \sigma|^{\gamma-2} d\sigma.$$

La première intégrale obtenue à droite est comparable à $|\log|s - s_1||$ et la seconde à $|s - s_1|^{\gamma-1}$. Nous en concluons, en réunissant les résultats (37), et (38), que l'intégrale $J_2(s)$ vérifie la condition d'Hölder de la forme

$$(39) \quad |J_2(s) - J_2(s_1)| \leq M_\mu q_2 |s - s_1|^{\gamma-\varepsilon}$$

avec un exposant $\gamma-\varepsilon$ arbitrairement inférieur à γ c. q. f. d., q_2 est une constante positive ne dépendant que de la courbe L et du nombre ε choisi. En outre, il est facile de montrer que les intégrales (33) admettent les limites supérieures suivantes

$$(40) \quad |J_1(s)| \leq M_\mu q_1, \quad |J_2(s)| \leq M_\mu q_2,$$

q_1 et q_2 étant des constantes positives ne dépendant que de la courbe L .

3. Solution du problème. Pour résoudre l'équation intégrale (10), considérons un espace fonctionnel E composé de toutes les fonctions

continues réelles $\mu(s)$, déterminées sur la courbe L . Nous définirons la distance des deux points $\mu_1(s)$ et $\mu_2(s)$ de cet espace par la borne supérieure suivante:

$$(41) \quad \delta(\mu_1, \mu_2) = \sup |\mu_1(s) - \mu_2(s)|.$$

En outre, on définit la somme des deux points et le produit du point par un nombre réel d'une façon évidente. L'espace E sera donc *complet*, *normé* et *linéaire*. Considérons maintenant dans l'espace E un ensemble borné $S(\varrho, \varkappa)$ de tous les points $\mu(s)$ qui vérifient à la fois l'inégalité

$$(42) \quad |\mu(s)| \leq \varrho$$

et la condition d'Hölder

$$(43) \quad |\mu(s) - \mu(s_1)| \leq \varkappa |s - s_1|^a$$

avec un exposant $a < 1$ admis dans la propriété (5). Les constantes positives ϱ, \varkappa sont fixées suffisamment petites pour qu'on ait à la fois

$$(44) \quad \varrho q'_1 \leq R_1, \quad k_1 \varrho + k_2 \varkappa \leq R_2.$$

Alors, d'après les propriétés démontrées (32), (40), toute fonction d'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ satisfera aux inégalités

$$(45) \quad \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma \leq R_1, \quad \int_L \cos \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma \leq R_2.$$

L'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ est évidemment *fermé*, puisque la fonction limite d'une suite uniformément convergente des fonctions, vérifiant les conditions (42) et (43), vérifie aussi ces conditions. L'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ est en outre *convexe*; en effet, si $\mu_1(s)$ et $\mu_2(s)$ sont deux fonctions vérifiant les inégalités (42) et (43), alors la fonction $(1-\nu)\mu_1(s) + \nu\mu_2(s)$ vérifie aussi ces conditions, si le nombre réel ν varie dans l'intervalle $(0,1)$. Cela veut dire que tous les points du segment rectiligne dans l'espace fonctionnel E , joignant les deux points $\mu_1(s)$ et $\mu_2(s)$ de l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$, appartiennent aussi à cet ensemble. Remarque faite de l'équation intégrale proposée (10), transformons maintenant l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ en faisant correspondre à tout point $\mu(s)$ de cet ensemble un point $\psi(s)$, déterminé par la relation fonctionnelle

$$(46) \quad -\pi\psi(s) + \int_L \sin \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \psi(\sigma) d\sigma + a(s) \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma = \lambda F \left[s, \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \int_L \cos \varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma \right].$$

Pour la fonction $\mu(s)$ donnée, l'équation (46) a la forme d'une équation de Fredholm à faible singularité avec la fonction inconnue $\psi(s)$. Si nous supposons que l'équation intégrale homogène, obtenue en égalant à zéro le membre à droite dans l'équation (46), n'a qu'une solution $\psi=0$, alors

à chaque point $\mu(s)$ de l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ correspond un point $\psi(s)$ d'espace E , déterminée par la formule connue de Fredholm. Cette circonstance a lieu par exemple dans le cas où la fonction donnée $a(s)$, non identiquement nulle, n'est pas positive: $a(s) \leq 0$; fait bien connu dans la théorie du potentiel.

Remarquons maintenant que la fonction de la variable s à droite dans la relation (46), étant le résultat de la substitution dans la fonction $F(s, u, v)$ des intégrales (11) et (33) à la place de u et v , satisfait à la condition d'Hölder avec l'exposant a . Cela résulte de la propriété admise (5) et des propriétés démontrées (13) et (36). En outre, la fonction $\psi(s)$ étant continue, les deux intégrales à gauche dans la relation (46) satisfont aussi à la condition d'Hölder avec les exposants $1-\varepsilon$ et $\gamma-\varepsilon$. Nous en concluons que la fonction $\psi(s)$, correspondant à la fonction $\mu(s)$ de l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ satisfait à la condition d'Hölder avec l'exposant a . Nous allons montrer que cette fonction $\psi(s)$ fera partie de l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$, si le module du paramètre λ est suffisamment petit. Remarquons donc que, d'après la formule connue de Fredholm, la fonction $\psi(s)$, correspondant à $\mu(s)$, admet la limitation suivante:

$$(48) \quad |\psi(s)| \leq |\lambda| M_F P$$

M_F étant la borne supérieure de la fonction $|F|$ et P est une constante positive ne dépendant que du noyau de l'équation (46), qui ne dépend donc que de la forme de la courbe L et de la fonction donnée $a(s)$. Cherchons le coefficient d'Hölder pour la fonction $\psi(s)$. D'après les inégalités (31) et (36), le coefficient d'Hölder pour la fonction composée λF à droite dans la relation (46) aura pour l'expression

$$|\lambda| K (1 + K_1 \varrho + K_2 \varkappa + \varrho q_1),$$

en choisissant $\beta(1-\varepsilon) = a$.

Les deux intégrales à gauche dans la relation (46) ont, d'après les inégalités (36), (39) et (48), les coefficients d'Hölder $|\lambda| M_F P q_2$ et $|\lambda| M_F P q_1$, en choisissant $\gamma-\varepsilon = a$, $1-\varepsilon' = a$. Nous en concluons que la fonction ψ dans la relation (46) satisfait à la condition d'Hölder de la forme

$$(49) \quad |\psi(s) - \psi(s_1)| \leq |\lambda| \pi^{-1} [M_F P q_2 + M_F M_a P q_1 + M_F P q'_1 K' + K(1 + K_1 \varrho + K_2 \varkappa + \varrho q_1)] |s - s_1|^a,$$

M_a étant la borne supérieure de la fonction $|a(s)|$.

La fonction transformée $\psi(s)$ fera donc partie de l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$, si le paramètre λ a le module suffisamment petit pour qu'on ait à la fois

$$(50) \quad |\lambda| M_F P \leq \varrho, \quad |\lambda| \pi^{-1} [M_F P q_2 + M_F M_a P q_1 + M_F P q'_1 K' + K(1 + K_1 \varrho + K_2 \varkappa + \varrho q_1)] \leq \varkappa.$$

Pour appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons maintenant que la transformation (46) est *continue* dans l'espace E . Soit donc une suite $\{\mu_n(s)\}$ des fonctions d'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$ qui tend *uniformément* vers la fonction $\mu^*(s)$ du même ensemble. Il est évident, d'après les limitations (40), que l'intégrale de fonction à faible singularité

$$(51) \quad \int_L \log r_{sa}^{-1} \mu_n(\sigma) d\sigma$$

tend uniformément vers l'intégrale analogue de la fonction limite

$$(51') \quad \int_L \log r_{sa}^{-1} \mu^*(\sigma) d\sigma.$$

Pour démontrer que la même propriété possède l'intégrale de la fonction à forte singularité

$$(52) \quad \Phi_n(s) = \int_L \cos \varphi_{sa} r_{sa}^{-1} \mu_n(\sigma) d\sigma$$

écrivons cette intégrale sous la forme (14) déjà utilisée et nous aurons

$$(52') \quad \Phi_n(s) = \int_L (\cos \varphi_{sa} - \cos \bar{\varphi}_{sa}) r_{sa}^{-1} \mu_n(\sigma) d\sigma + \int_L \cos \bar{\varphi}_{sa} r_{sa}^{-1} [\mu_n(\sigma) - \mu_n(s)] d\sigma.$$

La première intégrale concerne la fonction à faible singularité et tend uniformément vers l'intégrale analogue de la fonction limite $\mu^*(\sigma)$. Il reste à étudier la seconde intégrale que nous désignons par $Q_n(s)$. Nous démontrerons que la suite des intégrales $Q_n(s)$ tend uniformément vers l'intégrale

$$Q(s) = \int_L \cos \bar{\varphi}_{sa} r_{sa}^{-1} [\mu^*(\sigma) - \mu^*(s)] d\sigma.$$

Soit donc au voisinage du point (s) un arc l_ε (correspondant au nombre positif ε) assez petit pour qu'on ait

$$(53) \quad \left| \int_{L-l_\varepsilon} \cos \bar{\varphi}_{sa} r_{sa}^{-1} [\mu_n(\sigma) - \mu_n(s)] d\sigma \right| \leq \chi \varkappa \int_{L-l_\varepsilon} |\sigma - s|^{\mu-1} d\sigma \leq \varepsilon/2$$

pour toute la valeur n et pour s arbitraire. Cette inégalité est donc aussi satisfaite par la fonction limite μ^* . Le point s étant extérieur à l'arc d'intégration $L-l_\varepsilon$, nous pouvons maintenant faire correspondre au nombre ε un nombre N_ε assez grand pour qu'on ait

$$\left| \int_{L-l_\varepsilon} \cos \bar{\varphi}_{sa} r_{sa}^{-1} [\mu_n(\sigma) - \mu_n(s)] d\sigma - \int_{L-l_\varepsilon} \cos \bar{\varphi}_{sa} r_{sa}^{-1} [\mu^*(\sigma) - \mu^*(s)] d\sigma \right| \leq \varepsilon/2,$$

si $n > N_\varepsilon$ quelque soit (s) . Il en résulte que l'intégrale $Q_n(s)$ tend uniformément vers l'intégrale $Q(s)$; donc on a la convergence uniforme suivante:

$$(54) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(s) = \int_L \cos \varphi_{sa} r_{sa}^{-1} \mu^*(\sigma) d\sigma.$$

Nous en concluons, d'après la propriété (5) de la fonction $F(s, u, v)$ que le résultat de l'opération sur les fonctions $\mu_n(\sigma)$:

$$F[s, \int_L \log r_{sa}^{-1} \mu^*(\sigma) d\sigma, \int_L \cos \varphi_{sa} r_{sa}^{-1} \mu^*(\sigma) d\sigma]$$

tend uniformément vers le résultat de la même opération sur la fonction limite $\mu^*(\sigma)$.

Il en résulte, d'après la formule de Fredholm, que la suite des fonctions $\{\psi_n(s)\}$ correspondant aux fonctions $\mu_n(s)$ par la transformation (46), tend uniformément vers la fonction limite $\psi^*(s)$, correspondant à la fonction limite $\mu^*(s)$ par la transformation (46). Cela veut dire que la distance $\delta(\psi_n, \psi^*)$ tend vers zéro, si la distance $\delta(\mu_n, \mu^*)$ tend vers zéro et la transformation (46) est *continue*. Il reste à montrer que l'ensemble S' des points $\psi(s)$, transformés des points $\mu(s)$ de l'ensemble $S(\varrho, \varkappa)$, est *compact*. Or les fonctions $\psi(s)$ de l'ensemble S' , d'après leurs propriétés

$$|\psi(s)| \leq \varrho, \quad |\psi(s) - \psi(s_1)| \leq \varkappa |s - s_1|^\mu$$

sont *équicontinues* et *équibornées*, donc elles vérifient les conditions du théorème d'Arzela et l'ensemble S' est *compact*. Toutes les conditions d'application du théorème de Schauder étant satisfaites, nous en concluons existence dans l'ensemble S' du point $\mu_*(s)$ *invariant* relativement à la transformation (46), c'est-à-dire vérifiant l'équation intégrale proposée (10).

Le potentiel logarithmique $u(M) = \int_L \log r_{\sigma M}^{-1} \mu_*(\sigma) d\sigma$, dérivant de la fonction $\mu_*(\sigma)$ est la solution du problème généralisé de Poincaré proposé.

Nous considérations peuvent être étendues à la recherche d'une fonction harmonique, vérifiant la condition aux limites sous la forme plus générale

$$(55) \quad du/dn + a(s)u + b(s)du/ds = \lambda F(s, u, du/ds),$$

$b(s)$ étant une fonction définie sur L et vérifiant la condition d'Hölder avec l'exposant α . En cherchant la solution du problème sous la forme du potentiel logarithmique (4), on obtient pour la densité de la couche l'équation intégrale suivante:

$$(56) \quad -\pi\mu(s) + \int_L \sin \varphi_{sa} r_{sa}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma + a(s) \int_L \log r_{sa}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma + b(s) \int_L \cos \varphi_{sa} r_{sa}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma = \lambda F[s, \int_L \log r_{sa}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma, \int_L \cos \varphi_{sa} r_{sa}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma],$$

dont les parties linéaire et non-linéaire contiennent l'intégrale de la fonction singulière à une forte singularité. Nous supposons que l'équation singulière linéaire

$$(57) \quad -\pi\mu(s) + \int_L \sin\varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma + \\ + a(s) \int_L \log r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma + b(s) \int_L \cos\varphi_{s\sigma} r_{s\sigma}^{-1} \mu(\sigma) d\sigma = f(s)$$

bien étudiée, admet la solution *unique* μ pour toute la fonction $f(s)$ vérifiant la condition d'Hölder, ce qui a lieu si l'équation homogène correspondante n'a que la solution *nulle* et si l'*index* de l'équation (57) est égal à zéro. Sous cette hypothèse, les considérations qui suivront seront analogues aux précédentes et on conclura l'existence de la solution du problème (55), si la valeur absolue du paramètre λ est suffisamment petite.

Travaux cités

- [1] Б. Хведелидзе, *О краевой задаче Пуанкаре*, Доклады А.Н. СССР, 30 (1941), p. 195-198.
 [2] W. Pogorzelski, *Problème aux limites de Poincaré*, Annales de l'Académie des Sciences Techniques, Warszawa 1936.
 [3] H. Poincaré, *Mécanique céleste*, t. III, Paris 1910.
 [4] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
 INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

The problem of non-local existence for solutions of a linear partial differential equation of the first order

by A. PLIŚ (Kraków)*

E. Kamke has shown that the partial differential equation

$$(1) \quad \partial z / \partial x + Q(x, y) \partial z / \partial y = 0$$

with a coefficient $Q(x, y)$ of class C^1 in a certain (open) region D admits in every closed and bounded subset of D a solution of class C^1 , possessing a positive derivative with respect to y ²⁾. The problem of non-local existence of non-trivial³⁾ solutions of class C^1 has been solved in the negative by T. Ważewski, who furnishes an example of a differential equation of form (1) such that each of its solutions of class C^1 in the whole region D is a constant function⁴⁾. In this example the region D , constituting the domain of the function $Q(x, y)$, is simply connected, and $Q(x, y)$ is of high regularity in D .

In this paper we shall consider the problem of non-local existence of non-trivial solutions of equation (1), having a total differential (in the sense of Stolz) in region D . For the open simply connected region D we shall prove the existence of a solution having a total differential at every point of D and such that its derivative with respect to y is positive nearly everywhere in the set D (§ 1. Theorem 1). Consequently, such a solution

* The author thanks Professor T. Ważewski for his suggestions during the preparation of this paper.

¹⁾ A function continuous together with its derivatives of the first order is termed a function of class C^1 .

²⁾ An analogous theorem is also known for the equation

$$\partial z / \partial x + \sum_{i=1}^n Q_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \partial z / \partial y_i = 0$$

with a larger number of independent variables. The proof (in the case of two variables) is to be found in [1].

³⁾ By a non-trivial solution of the equation (1) we mean a solution which is not identically equal to a constant.

⁴⁾ See [6]. An example of such an equation defined over the whole plane is to be found in [5].