On obtient facilement de la dernière inégalité (cf. [3], p. 19, lemme 1 [5]))

$$\|x(t)\| \leqslant M\|c_0\| \exp[N\int_0^t g(\tau)\,d\tau] \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0. \tag{10}$$

L'inégalité (10) met en évidence que $x(t)$ est bornée, car il a été supposé que l'intégrale $\int_0^\infty g(t)\,dt$ converge (cf. (2)).

II. Admettons les hypothèses (5), (2), (8) et considérons la transformation

$$x = Y(t)z. \tag{11}$$

On vérifie facilement que la nouvelle variable $z$ satisfait à l'équation $z' = Y^{-1}f(t, Yz)$ qui, en vertu de l'hypothèse (8), se réduit à

$$z' = f(t, z). \tag{12}$$

Le théorème de Weyl pouvant être appliqué au système (12) $(A=0)$, on conclut, que chaque solution $z$ de ce système est bornée, donc, en vertu de (11) et de (5), chaque solution $x(t)$ du système (3) a la même propriété.

### Travaux cités


[1] H. Weyl, *Comment on the preceding paper*, Amer. J. of Math. 68 (1946), p. 7-12.

[2] Р. Э. Виноград, *Об ограниченности решений правильных систем дифференциальных уравнений с малыми добавками*, Успехи математических наук 8.1 (1953), p. 115-120.

[3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1949.



INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES


[5]) Lemme 1, publié dans [3] concerne le cas $\|c_0\|\neq 0$. En appliquant un passage à la limite convenable, on voit facilement que l'inégalité (10) est aussi juste au cas $c_0 = 0$.

# Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre

par J. Szarski (Kraków)

Le but de la note présente est d'évaluer la différence entre deux solutions de certains problèmes aux limites relatifs au système d'équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = f_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_i}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots\right) \tag{0.1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

où le second membre de la $i$-ème équation ne dépend pas des dérivées des fonctions $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m$.

La méthode consiste à comparer le système (0.1) avec des équations différentielles ordinaires en faisant intervenir la théorie des inégalités différentielles ordinaires.

Dans le § 1 nous commençons par démontrer deux lemmes qui ne sont que des modifications convenables de deux théorèmes dûs à Ważewski [2], [3]. Dans le § 2 nous nous servons d'un système d'équations différentielles ordinaires et nous obtenons des évaluations qui permettent d'établir des critères d'unicité des solutions de certains problèmes aux limites. Par comparaison du système (0.1) avec une équation différentielle ordinaire nous obtenons dans le § 3 des critères plus généraux dont l'un (théorème 3.1) constitue une généralisation du critère de Giuliano [1].

**§ 1.** Lemme 1.1. *Soit $G$ un ensemble ouvert et borné dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$. Supposons que la fonction $\varphi(t, P)$, où $P = (x_1, \ldots, x_n)$, soit continue pour $P \in \bar{G}$ et $t$ appartenant à l'intervalle*

$$0 < t < T \qquad (T \leqslant \infty). \tag{1.1}$$

*Posons*

$$M(t) = \max_{P\in\bar{G}} \varphi(t, P).$$

*Dans ces hypothèses, pour chaque $t_0$ de l'intervalle* (1.1) *et pour chaque point $P_0 \epsilon \bar{G}$ tels que $[\partial\varphi/\partial t]_{(t_0,P_0)}$ existe et que*

$$M(t_0) = \varphi(t_0, P_0), \tag{1.2}$$

*on a*

$$\bar{D}_- M(t_0) \leqslant [\partial\varphi/\partial t]_{(t_0,P_0)}, \tag{1.3}$$

*où $\bar{D}_-$ désigne la dérivée supérieure gauche.*

Démonstration. Supposons qu'on ait (1.2) et que $[\partial\varphi/\partial t]_{(t_0,P_0)}$ existe. Il existe une suite $t_\nu$ de points de l'intervalle (1.1) telle que $t_\nu < t_0$, $t_\nu \to t_0$ et

$$\bar{D}_- M(t_0) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{M(t_\nu) - M(t_0)}{t_\nu - t_0} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{M(t_\nu) - \varphi(t_0, P_0)}{t_\nu - t_0}.$$

Du fait que $t_\nu < t_0$, il résulte, en vertu de la définition de $M(t)$, que

$$\bar{D}_- M(t_0) \leqslant \lim_{\nu\to\infty} \frac{\varphi(t_\nu, P_0) - \varphi(t_0, P_0)}{t_\nu - t_0} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{(t_0,P_0)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 1.2. *Supposons que les fonctions $\sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ soient continues et non-négatives dans l'ensemble*

$$0 \leqslant t < T, \qquad y_i \geqslant 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

*Supposons ensuite que la fonction $\sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ soit non-décroissante par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m$. Pour $\varepsilon_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ désignons par*

$$y_i = \omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

*l'intégrale supérieure* [1]) *du système d'équations différentielles ordinaires*

$$dy_i/dt = \sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m) \qquad (i=1,2,\ldots,m), \tag{1.4}$$

*issue du point $(0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ et supposons que cette intégrale existe dans l'intervalle*

$$0 \leqslant t < T. \tag{1.5}$$

*Soient $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ $m$ fonctions continues dans l'intervalle* (1.5) *telles que*

$$\varphi_i(0) \leqslant \varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots,m). \tag{1.6}$$

[1]) Quant à la définition et l'existence de l'intégrale supérieure voir p. ex. [3], p. 121-122.



*Supposons enfin que lorsque pour un indice $i_0$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant m)$ et pour $t_0$ de l'intervalle $0 < t < T$ on a*

$$\varphi_{i_0}(t_0) > \omega_{i_0}(t_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \tag{1.7}$$

*alors*

$$\bar{D}_- \varphi_{i_0}(t_0) \leqslant \sigma_{i_0}(t_0, \varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)). \tag{1.8}$$

*Nous avons dans ce cas*

$$\varphi_i(t) \leqslant \omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{1.9}$$

*dans l'intervalle* (1.5).

Démonstration. Considérons la suite de systèmes auxiliaires

$$dy_i/dt = \sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m) + 1/\nu \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{1.10}$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots$ et désignons par $y_i = y_{i\nu}(t)$ une intégrale du système (1.10) telle que

$$y_{i\nu}(0) = \varepsilon_i + 1/\nu. \tag{1.11}$$

Nous avons alors (cf. [3], p. 123) dans un intervalle $0 \leqslant t \leqslant h$ suffisamment petit les relations

$$\omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) < y_{i\nu}(t) < y_{i,\nu-1}(t), \tag{1.12}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} y_{i\nu}(t) = \omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m). \tag{1.13}$$

Il en résulte, en vertu d'un raisonnement classique, que pour $\delta > 0$ arbitraire il existe un indice $\nu(\delta)$ à partir duquel les intégrales $y_{i\nu}(t)$ existent dans l'intervalle

$$0 \leqslant t \leqslant T - \delta \tag{1.14}$$

et y remplissent les relations (1.12) et (1.13).

Fixons un indice arbitraire $\nu \geqslant \nu(\delta)$. D'après (1.6) et (1.11) nous avons

$$\varphi_i(0) < y_{i\nu}(0) \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

et, en vertu de la continuité, les inégalités

$$\varphi_i(t) < y_{i\nu}(t) \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{1.15}$$

sont remplies dans un voisinage à droite du point 0. Nous affirmons que les inégalités (1.15) sont remplies dans l'intervalle (1.14). En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un point $t_0$ $(0 < t_0 < T - \delta)$ et un indice $i_0$ tels que

$$\varphi_i(t) \leqslant y_{i\nu}(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \qquad (i=1,2,\ldots,m), \tag{1.16}$$

$$\varphi_{i_0}(t_0) = y_{i_0\nu}(t_0). \tag{1.17}$$

De (1.12) et (1.17) résulte (1.7) et par conséquent, selon les hypothèses, nous avons l'inégalité (1.8). Il s'ensuit, d'après (1.16) et (1.17) et en vertu de la monotonie de $\sigma_{i_0}$, que

$$(1.18)\quad \overline{D}_{-}\varphi_{i_0}(t_0) \leqslant \sigma_{i_0}\big(t_0, \varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)\big) \leqslant \sigma_{i_0}\big(t_0, y_{1\nu}(t_0), \ldots, y_{m\nu}(t_0)\big) < \sigma_{i_0}\big(t_0, y_{1\nu}(t_0), \ldots, y_{m\nu}(t_0)\big) + 1/\nu = dy_{i_0\nu}(t_0)/dt.$$

D'autre part, selon (1.16) et (1.17), nous avons $\overline{D}_{-}\varphi_{i_0}(t_0) \geqslant dy_{i_0\nu}(t_0)/dt$, ce qui est incompatible avec (1.18).

De (1.13) et (1.15) résulte (1.9) dans l'intervalle (1.14) et par conséquent, $\delta$ étant arbitraire, dans l'intervalle (1.5).

Voici encore un lemme sur les inégalités différentielles dont nous aurons besoin dans la suite:

LEMME 1.3. *Soit $\sigma(t, y)$ une fonction continue et non-négative dans l'ensemble $0 < t < T$, $y \geqslant 0$, et supposons que pour chaque intervalle*

$$(1.19)\quad t_1 < t \leqslant t_0,$$

*où $0 \leqslant t_1 < t_0 < T$, l'unique intégrale $y(t)$ de l'équation*

$$(1.20)\quad dy/dt = \sigma(t, y),$$

*définie dans (1.19) et satisfaisant à la condition*

$$(1.21)\quad \lim_{t \to t_1} y(t) = 0$$

*soit identiquement nulle. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue et non-négative dans l'intervalle*

$$(1.22)\quad 0 \leqslant t < T$$

*telle que*

$$(1.23)\quad \varphi(0) = 0$$

*et supposons que lorsque pour un point $t$ $(0 < t < T)$ on a*

$$(1.24)\quad \varphi(t) > 0,$$

*alors*

$$(1.25)\quad \overline{D}_{-}\varphi(t) \leqslant \sigma\big(t, \varphi(t)\big).$$

*Dans ce cas nous avons $\varphi(t) \equiv 0$ dans l'intervalle (1.22)*[2]).

D é m o n s t r a t i o n. Admettons l'impossible, que pour un $t_0$ $(0 < t_0 < T)$ on ait $\varphi(t_0) > 0$. En vertu de (1.23) et de la continuité il existe un $t_1$ $(0 \leqslant t_1 < t_0)$ tel que

$$(1.26)\quad \varphi(t_1) = 0$$

[2]) Ce lemme n'est pas une conséquence du lemme 1.1, puisque la fonction $\sigma(t, y)$ n'est point supposée être continue pour $t = 0$.



et que l'inégalité (1.24) est remplie dans l'intervalle (1.19). On a donc, selon nos hypothèses, l'inégalité (1.25) dans l'intervalle (1.19). Mais alors, en désignant par $y(t)$ l'intégrale inférieure à gauche (cf. [3], p. 121-122) de l'équation (1.20) telle que

$$(1.27)\quad y(t_0) = \varphi(t_0) > 0,$$

nous avons (cf. [3], p. 139) $0 \leqslant y(t) \leqslant \varphi(t)$ dans l'intervalle (1.19). Il en résulte, selon (1.26), qu'on a (1.21), d'où en vertu de nos hypothèses, $y(t) \equiv 0$ dans l'intervalle (1.19), ce qui est incompatible avec (1.27).

**§ 2.** THÉORÈME 2.1. *Supposons que*

1⁰ *Les fonctions $f_i(t, P, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, $g_i(t, P, z_1, z_2, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, où $P = (x_1, \ldots, x_n)$, soient définies dans un ensemble $D$ dont la projection sur le plan $(t, x_1, \ldots, x_n)$ recouvre le produit topologique $R$ de l'intervalle*

$$(2.1)\quad 0 < t < T \qquad (T \leqslant \infty)$$

*et d'un ensemble ouvert et borné $G$ dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$.*

2⁰ *Lorsque les valeurs $\bar{r}_{jk}$ et $\bar{\bar{r}}_{jk}$ sont telles que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (\bar{r}_{jk} - \bar{\bar{r}}_{jk}) \lambda_j \lambda_k \leqslant 0 \quad \text{pour tout système} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

*alors*

$$f_i(t, P, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \bar{r}_{jk}, \ldots) - f_i(t, P, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \bar{\bar{r}}_{jk}, \ldots) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$g_i(t, P, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \bar{r}_{jk}, \ldots) - g_i(t, P, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \bar{\bar{r}}_{jk}, \ldots) \leqslant 0\ ^{3}),$$

3⁰ $$|f_i(t, P, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, r_{jk}, \ldots) - g_i(t, P, v_1, \ldots, v_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, r_{jk}, \ldots)| \leqslant \sigma_i(t, |u_1 - v_1|, \ldots, |u_m - v_m|)$$

*$(i = 1, 2, \ldots, m)$, où les fonctions $\sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ satisfont à toutes les hypothèses du lemme 1.2.*

[3]) L'hypothèse 2⁰ implique que les équations du système (0.1) (ainsi que celles du système avec les seconds membres égaux à $g_i$) sont du type parabolique normal.

La condition 2⁰ a lieu en particulier, lorsque $D$ est convexe par rapport aux variables $r_{jk}$, les fonctions $f_i$ et $g_i$ possèdent la différentielle totale par rapport aux variables $r_{jk}$ et

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k \partial f_i / \partial r_{jk} \geqslant 0, \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k \partial g_i / \partial r_{jk} \geqslant 0$$

dans $D$ et pour tout système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

4° *Les fonctions* $u_i(t,P)$ *et* $v_i(t,P)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ *sont continues dans* $\bar{R}$, *de classe* $C^1$ *dans* $R$ *et possèdent les dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables* $(x_1,\ldots,x_n)$ *continues dans* $R$.

5° *On a dans* $R$

$$\frac{\partial u_i}{dt}=f_i\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_i}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_i}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v_i}{dt}=g_i\left(t,P,v_1,\ldots,v_m,\frac{\partial v_i}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial v_i}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right). \tag{2.3}$$

6° $|u_i(0,P)-v_i(0,P)|\leqslant\varepsilon_i$ *pour* $P\epsilon G$.

7° $|u_i(t,P)-v_i(t,P)|\leqslant\varepsilon_i$ *pour* $0<t<T$, $P\epsilon FG$.

*Ceci supposé nous avons*

$$|u_i(t,P)-v_i(t,P)|\leqslant\omega_i(t,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) \qquad (i=1,2,\ldots,m)\text{ [4]} \tag{2.4}$$

*dans* $R$ *tout entier.*

**Démonstration.** Posons pour $0\leqslant t<T$

$$M_i(t)=\max_{P\epsilon\bar{G}}\big(u_i(t,P)-v_i(t,P)\big),$$

$$N_i(t)=\max_{P\epsilon\bar{G}}\big(v_i(t,P)-u_i(t,P)\big),$$

$$W_i(t)=\max_{P\epsilon\bar{G}}|u_i(t,P)-v_i(t,P)|.$$

Pour $t$ appartenant à l'intervalle (2.1) on a alors soit $W_i(t)=M_i(t)$ et $\bar{D}_-W_i(t)\leqslant\bar{D}_-M_i(t)$, soit $W_i(t)=N_i(t)$ et $\bar{D}_-W_i(t)\leqslant\bar{D}_-N_i(t)$. Les fonctions $W_i(t)$ sont évidemment continues et nous avons selon 6°

$$W_i(0)\leqslant\varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots,m). \tag{2.5}$$

En vertu du lemme 1.2, pour terminer la démonstration de notre théorème, il suffit de montrer que lorsque pour un indice $i_0$ et un point $t_0$ appartenant à l'intervalle (2.1) on a

$$W_{i_0}(t_0)>\omega_{i_0}(t_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m), \tag{2.6}$$

alors

$$\bar{D}_-W_{i_0}(t_0)\leqslant\sigma_{i_0}\big(t_0,W_1(t_0),\ldots,W_m(t_0)\big). \tag{2.7}$$

Supposons donc qu'on ait (2.6) et par exemple

$$W_{i_0}(t_0)=M_{i_0}(t_0) \quad \text{et} \quad \bar{D}_-W_{i_0}(t_0)\leqslant\bar{D}_-M_{i_0}(t_0). \tag{2.8}$$

[4]) Pour la définition de $\omega_i(t,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ voir le lemme 1.2.



En vertu de la continuité il existe un point $P_0\epsilon\bar{G}$ tel que

$$W_{i_0}(t_0)=M_{i_0}(t_0)=u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0). \tag{2.9}$$

Comme $\omega_{i_0}(0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)=\varepsilon_{i_0}$ et $\sigma_{i_0}\geqslant 0$, nous avons $\omega_{i_0}(t_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\geqslant\varepsilon_{i_0}$ et par conséquent, d'après (2.6),

$$W_{i_0}(t_0)>\varepsilon_{i_0}. \tag{2.10}$$

Il en résulte, en vertu de 7°, que $P_0$ *est un point intérieur de* $\bar{G}$ et par conséquent, selon 4°, la dérivée

$$[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial t]_{(t_0,P_0)}$$

existe. Nous avons donc, en vertu du lemme 1.1,

$$\bar{D}_-M_{i_0}(t_0)\leqslant[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial t]_{(t_0,P_0)},$$

d'où, selon (2.8),

$$\bar{D}_-W_{i_0}(t_0)\leqslant[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial t]_{(t_0,P_0)}. \tag{2.11}$$

Comme $P_0$ est un point intérieur de $G$, on a, en vertu de (2.9) et de la définition de $M_{i_0}(t)$,

$$[\partial u_{i_0}/\partial x_k]_{(t_0,P_0)}=[\partial v_{i_0}/\partial x_k]_{(t_0,P_0)} \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{2.12}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2(u_{i_0}-v_{i_0})}{\partial x_j\partial x_k}\lambda_j\lambda_k\right]_{(t_0,P_0)}\leqslant 0 \quad \text{pour tout système} \quad (\lambda_1,\ldots,\lambda_n). \tag{2.13}$$

En vertu de (2.2), (2.3) et (2.11) nous avons ensuite

$$\bar{D}_-W_{i_0}(t_0)\leqslant f_{i_0}\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)_{(t_0,P_0)}-$$
$$-g_{i_0}\left(t,P,v_1,\ldots,v_m,\frac{\partial v_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial v_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)_{(t_0,P_0)},$$

d'où, d'après (2.12),

$$\begin{aligned}\bar{D}_-W_{i_0}(t_0)\leqslant\Bigg[&f_{i_0}\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)-\\&-f_{i_0}\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)\Bigg]_{(t_0,P_0)}+\\&+\Bigg[f_{i_0}\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)-\\&-g_{i_0}\left(t,P,v_1,\ldots,v_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)\Bigg]_{(t_0,P_0)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

D'autre part, selon $2^0$ et (2.13), nous avons

$$\left[f_{i_0}\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)-\right.$$
$$\left.-f_{i_0}\left(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\right)\right]_{(t_0,P_0)}\leqslant 0. \tag{2.15}$$

De $3^0$, (2.14) et (2.15) il suit que

$$\overline{D}_-W_{i_0}(t_0)\leqslant\sigma_{i_0}(t,|u_1-v_1|,\ldots,|u_m-v_m|)_{(t_0,P_0)},$$

d'où, en vertu de (2.9), de la définition de $W_i(t)$ et de la monotonie de $\sigma_{i_0}$, nous obtenons (2.7). Il en résulte, selon le lemme 1.2, que

$$W_i(t)\leqslant\omega_i(t,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\qquad(i=1,2,\ldots,m)$$

dans l'intervalle $0\leqslant t<T$, d'où l'on déduit (2.4).

THÉORÈME 2.2. *Retenons les hypothèses* $1^0$, $2^0$ *et* $3^0$ *du théorème* 2.1 *en admettant que*

a) $f_i\equiv g_i$;

b) *l'unique intègrale du système* (1.4), *issue de l'origine, est identiquement nulle, c'est-à-dire*

$$\omega_i(t,0,\ldots,0)\equiv 0\qquad(i=1,2,\ldots,m). \tag{2.16}$$

*Dans ces hypothèses le problème mixte*

$$\begin{aligned} &z_i(0,P)=\varphi_i(P)\quad \textit{pour}\quad P\in\overline{G},\\ &z_i(t,P)=\psi_i(t,P)\quad \textit{pour}\quad 0<t<T\quad \textit{et}\quad P\in FG\end{aligned} \tag{2.17}$$

*relatif au système d'équations* (0.1) *admet dans* $R$ *au plus une solution continue dans* $\overline{R}$ *et possédant toutes les dérivées figurant dans* (0.1), *continues dans* $R$. *Cette solution (lorsqu'elle existe) dépend d'une façon continue des valeurs initiales* $\varphi_i(P)$ *et des valeurs aux limites* $\psi_i(t,P)$.

D'après (2.16) le théorème 2.2 est une conséquence immédiate du théorème 2.1, puisque dans l'hypothèse b) on a

$$\lim\omega_i(t,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\equiv\omega_i(t,0,\ldots,0)\equiv 0,\quad\text{lorsque}\quad(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\to(0,\ldots,0).$$

THÉORÈME 2.3. *Conservons les hypothèses* $1^0$-$6^0$ *du théorème* 2.1 *en admettant que*

$7^0$a *L'ensemble* $FG$ *possède en chaque point* $P$ *le plan tangent, et la normale au point* $P$ *contient un segment ouvert* $(P,Q)$ *situé à l'intérieur de* $G$.



$7^0$b $|\partial[u_i(t,P)-v_i(t,P)]/\partial n-h_i(t,P)[u_i(t,P)-v_i(t,P)]|\leqslant\varepsilon_iH_i$ *pour* $0<t<T$, $P\in FG$, *où*

$$h_i(t,P)\geqslant H_i=\text{const}>0 \tag{2.18}$$

*et* $\partial/\partial n$ *désigne la dérivée par rapport aux variables* $(x_1,\ldots,x_n)$ *suivant la normale intérieure à* $FG$.

*Dans ce cas les inégalités* (2.4) *ont lieu dans* $R$ *tout entier.*

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.1. Il faut seulement montrer que cette fois (2.6), (2.9) et l'hypothèse $7^0$b (au lieu de $7^0$) impliquent que $P_0$ est un point intérieur de $G$.

Admettant l'impossible, que $P_0\in FG$, on a d'après $7^0$b,

$$h_{i_0}(t_0,P_0)[u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0)]\leqslant\varepsilon_{i_0}H_{i_0}+[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial n]_{(t_0,P_0)}. \tag{2.19}$$

D'autre part, en vertu de (2.9) et de la définition de $M_{i_0}(t)$, nous avons

$$[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial n]_{(t_0,P_0)}\leqslant 0,$$

d'où, selon (2.19),

$$h_{i_0}(t_0,P_0)[u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0)]\leqslant\varepsilon_{i_0}H_{i_0}.$$

Tenant compte de (2.18), on en obtient

$$u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0)\leqslant\varepsilon_{i_0}$$

ce qui est incompatible avec (2.9) et (2.10).

THÉORÈME 2.4. *Dans les hypothèses du théorème* 2.2, *en admettant l'hypothèse* $7^0$a *et* (2.18) *du théorème* 2.3, *le problème mixte*

$$\begin{aligned} &z_i(0,P)=\varphi_i(P)\quad \textit{pour}\quad P\in\overline{G},\\ &\partial z_i(t,P)/\partial n-h_i(t,P)z_i(t,P)=\psi_i(t,P)\quad \textit{pour}\quad 0<t<T,\quad P\in FG\end{aligned} \tag{2.20}$$

*relatif au système d'équations* (0.1) *admet dans* $R$ *au plus une solution continue dans* $\overline{R}$ *et possédant toutes les dérivées figurant dans* (0.1), *continues dans* $R$. *Cette solution (lorsqu'elle existe) dépend d'une façon continue des valeurs initiales* $\varphi_i(P)$ *et des valeurs aux limites* $\psi_i(t,P)$.

Ceci est une conséquence immédiate du théorème 2.3.

THÉORÈME 2.5. *Conservons les hypothèses* $1^0$, $2^0$, $3^0$ *et* $6^0$ *du théorème* 2.1 *ainsi que l'hypothèse* $7^0$a *du théorème* 2.3 *et supposons que*

$4^{0'}$ *Les fonctions* $u_i$ *et* $v_i$ *sont de classe* $C^1$ *et possèdent les dérivées du second ordre par rapport aux variables* $(x_1,\ldots,x_n)$ *continues pour* $0<t<T$ *et* $P\in\overline{G}$.

$5^{0'}$ *Les équations* (2.2) *et* (2.3) *sont remplies pour* $0<t<T$ *et* $P\in\overline{G}$.

$7^0\mathrm{b}'$ $\partial[u_i(t,P)-v_i(t,P)]/\partial n - h_i(t,P)[u_i(t,P)-v_i(t,P)] = 0$ *pour* $0<t<T$ *et* $P\in FG$, *où*

(2.21) $$h_i(t,P)\geqslant 0.$$

*Dans ce cas les inégalités* (2.4) *sont remplies dans* $R$ *tout entier.*

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.1. Il faut seulement montrer que cette fois (2.6), (2.9) et les hypothèses $4^{0'}$, $5^{0'}$, $7^0$a et $7^0\mathrm{b}'$ (au lieu de $4^0$, $5^0$ et $7^0$) impliquent les relations (2.12) et (2.13). Pour s'en convaincre il suffit de considérer le cas où $P_0$ appartient à $FG$, puisque dans le cas contraire les relations (2.12) et (2.13) sont évidentes. Or, lorsque $P_0$ appartient à $FG$, nous avons selon (2.9) et $7^0\mathrm{b}'$

$$\partial[u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0)]/\partial n\geqslant 0.$$

Il en résulte — du fait que

(2.22) $$u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0) = M_{i_0}(t_0) = \max_{P\in\bar{G}}[u_{i_0}(t_0,P)-v_{i_0}(t_0,P)],$$

que

(2.23) $$\partial[u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0)]/\partial n = 0.$$

D'autre part, de (2.22) il suit que les dérivées de la différence

$$u_{i_0}(t_0,P)-v_{i_0}(t_0,P),$$

suivant les directions tangentes à $FG$ au point $P_0$, sont toutes nulles. Cette propriété et la relation (2.23) impliquent (2.12). Quant à la relation (2.13) remarquons d'abord que, selon l'hypothèse $7^0$a, chaque droite passant par $P_0$, qui n'est pas tangente à $FG$, contient un segment $(P_0,Q)$ situé dans $G$. Il en résulte, d'après (2.22) et $4^{0'}$, que l'inégalité (2.13) est remplie pour chaque système $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ correspondant à une direction qui n'est pas parallèle au plan tangent à $FG$ et, par conséquent, en vertu de la continuité, la relation (2.13) a lieu pour tout système $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

THÉORÈME 2.6. *Dans les hypothèses du théorème 2.2, en admettant l'hypothèse* $7^0$a *du théorème* 2.3 *et l'inégalité* (2.21), *le problème mixte* (2.20) *relatif au système* (0.1) *admet au plus une solution continue dans* $\bar{R}$ *et possédant toutes les dérivées figurant dans* (0.1), *continues et satisfaisant à* (0.1) *pour* $0<t<T$ *et* $P\in\bar{G}$. *Cette solution (lorsqu'elle existe) dépend d'une façon continue des valeurs initiales* $\varphi_i(P)$.

Cesi est une conséquence immédiate du théorème 2.5.

**§ 3.** L'hypothèse $3^0$ des critères d'unicité formulés dans les théorèmes 2.2, 2.4 et 2.6 peut être remplacée par une hypothèse moins restrictive. Voici trois théorèmes sur ce sujet:



THÉORÈME 3.1. *Supposons que les seconds membres du système* (0.1) *satisfassent aux hypothèses* $1^0$ *et* $2^0$ *du théorème* 2.1 *et que*

$3^{0'}$ $$|f_i(t,P,u_1,\ldots,u_m,p_1,\ldots,p_n,\ldots,r_{jk},\ldots)- f_i(t,P,v_1,\ldots,v_m,p_1,\ldots,p_n,\ldots,r_{jk},\ldots)|\leqslant\sigma(t,\max_j|u_j-v_j|),$$

*où la fonction* $\sigma(t,y)$ *satisfait à toutes les hypothèses du lemme* 1.3.

*Dans ce cas le problème mixte* (2.17) *relatif au système d'équations* (0.1) *admet dans* $R$ *au plus une solution continue dans* $\bar{R}$ *et possédant toutes les dérivées figurant dans* (0.1) *continues dans* $R$.

Démonstration. Soient $u_i(t,P)$ et $v_i(t,P)$ deux solutions du problème (2.17). Nous avons donc

(3.1) $$u_i(0,P)-v_i(0,P)=0 \quad \text{pour} \quad P\in\bar{G},$$

(3.2) $$u_i(t,P)-v_i(t,P)=0 \quad \text{pour} \quad 0<t<T \quad \text{et} \quad P\in FG.$$

Posons pour $0\leqslant t<T$

$$W(t)=\max_i\{\max_{P\in\bar{G}}|u_i(t,P)-v_i(t,P)|\}.$$

Pour chaque $t_0$ $(0<t_0<T)$ il existe un indice $i_0$ et un point $P_0\in\bar{G}$ tels que soit

(3.3) $$W(t_0)=M_{i_0}(t_0)=u_{i_0}(t_0,P_0)-v_{i_0}(t_0,P_0) \quad \text{et} \quad \bar{D}_-W(t_0)\leqslant\bar{D}_-M_{i_0}(t_0).$$

soit

(3.4) $$W(t_0)=N_{i_0}(t_0)=v_{i_0}(t_0,P_0)-u_{i_0}(t_0,P_0) \quad \text{et} \quad \bar{D}_-W(t_0)\leqslant\bar{D}_-N_{i_0}(t_0).$$

La fonction $W(t)$ est évidemment continue et l'on a, selon (3.1)

(3.5) $$W(0)=0.$$

Nous allons montrer que lorsque pour un $t_0$ $(0<t_0<T)$ on a

(3.6) $$W(t_0)>0,$$

alors

(3.7) $$\bar{D}_-W(t_0)\leqslant\sigma(t_0,W(t_0)).$$

En effet supposons qu'on ait (3.6) et par exemple (3.3). Selon (3.2) le point $P_0$ est alors un point intérieur de $G$ et par conséquent la dérivée

$$[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial t]_{(t_0,P_0)}$$

existe. En vertu du lemme 1.1 nous avons donc

$$\bar{D}_-M_{i_0}(t_0)\leqslant[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial t]_{(t_0,P_0)},$$

d'où, selon (3.3),

(3.8) $$\bar{D}_-W(t_0)\leqslant[\partial(u_{i_0}-v_{i_0})/\partial t]_{(t_0,P_0)}.$$

D'autre part les relations (2.12) et (2.13) ont lieu, comme $P_0$ est un point intérieur de $G$ et la différence

$$u_{i_0}(t_0,P)-v_{i_0}(t_0,P)$$

atteint sa valeur maximum en $P_0$. Comme $u_i(t,P)$ et $v_i(t,P)$ satisfont au système (0.1), nous avons, d'après (3.8),

$$\bar{D}_-W(t_0)\leqslant f_{i_0}\Big(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\Big)_{(t_0,P_0)}-$$
$$-f_{i_0}\Big(t,P,v_1,\ldots,v_m,\frac{\partial v_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial v_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\Big)_{(t_0,P_0)},$$

d'où, selon (2.12)

$$\bar{D}_-W(t_0)\leqslant\Big[f_{i_0}\Big(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\Big)-$$
$$-f_{i_0}\Big(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\Big)\Big]_{(t_0,P_0)}+$$
$$+\Big[f_{i_0}\Big(t,P,u_1,\ldots,u_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\Big)-$$
$$-f_{i_0}\Big(t,P,v_1,\ldots,v_m,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^2 v_{i_0}}{\partial x_j\partial x_k},\ldots\Big)\Big]_{(t_0,P_0)}. \tag{3.9}$$

Mais, en vertu de $2^0$ (théorème 2.1) et (2.13), nous avons (2.15), d'où l'on déduit, d'après $3^{0'}$ et (3.9),

$$\bar{D}_-W(t_0)\leqslant\sigma\big(t_0,\max_i|u_i(t_0,P_0)-v_i(t_0,P_0)|\big)$$

ce qui nous donne l'inégalité (3.7). En vertu du lemme 1.3 nous avons donc $W(t)=0$ dans l'intervalle $0\leqslant t<T$, d'où

$$u_i(t,P)-v_i(t,P)=0$$

dans $R$, — ce qu'il fallait démontrer.

Exemple. L'hypothèse $3^{0'}$, du théorème 3.1 est moins restrictive que l'hypothèse $3^{0'}$ du théorème 2.1, car la fonction $\sigma(t,y)$ n'est point supposée être continue pour $t=0$. Nous le montrerons sur l'exemple suivant. Posons

$$f_i=\ln t\sum_{i=1}^m z_i+\Phi_i(t,P,p_1,\ldots,p_n,\ldots,r_{jk},\ldots).$$

On peut alors appliquer le critère du théorème 3.1, car l'hypothèse $3^{0'}$ est satisfaite par la fonction

$$\sigma(t,y)=my|\ln t|.$$



Cependant le critère du théorème 2.2 n'est pas applicable. Ceci tient à ce que dans le théorème 2.2 les fonctions $\sigma_i(t,y_1,\ldots,y_m)$ sont supposées être continues pour $t=0$.

Pour terminer nous formulerons les théorèmes 3.2 et 3.3 en nous dispensant de la démonstration qui est analogue à celle du théorème 3.1.

Théorème 3.2. *Dans les hypothèses du théorème 3.1, en admettant l'hypothèse $7^0$a du théorème 2.3 et l'inégalité (2.18), le problème mixte (2.20) relatif au système (0.1) admet dans $R$ au plus une solution continue dans $\bar{R}$ et possédant toutes les dérivées figurant dans (0.1), continues dans $R$.*

Théorème 3.3. *Dans les hypothèses du théorème 3.1, en admettant l'hypothèse $7^0$a du théorème 2.3 et l'inégalité (2.21), le problème mixte (2.20) relatif au système (0.1) admet au plus une solution continue dans $\bar{R}$ et possédant toutes les dérivées figurant dans (0.1) continues et satisfaisant à (0.1) pour $0<t<T$ et $P\in\bar{G}$.*

## Travaux cités


[1] L. Giuliano, *Sull'unicità della soluzione per una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali, paraboliche, non lineari*, Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali 12, marzo 1952, p. 260-265.

[2] T. Ważewski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali 18, novembre 1933, p. 373-376.

[3] — *Sur les systèmes des équations et des inégalités différentielles aux seconds membres monotones et leurs applications*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 23, 1950, p. 112-166.



INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES