Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA 1955

Nakład 1400 egz. + 159 egz. Podpisano do druku 15. XII. 1955 r.
Ark. wyd. 11,75, druk. 11. Druk ukończono w styczniu 1956 r.
Papier druk. sat. kl. III, 90 g, 70×100 Zamówienie nr 763/55
Cena zł 23,50

Wrocławska Drukarnia Naukowa – Wrocław, ul. Świerczewskiego 19.

Le maximum des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées

par W. JANOWSKI (Łódź)

Cette note appartient à un cycle (cf. [3] et [4]) de travaux concernant les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées. Les resultats obtenus dans ces travaux s'appuyent sur les équations différentielles obtenues par Z. Charzyński [1] et ensuite généralisées par lui et par moi-même [2] et concernant les cas dans lesquels l'intégration de ces équations ne conduit qu'aux intégrales abéliennes.

Considérons les fonctions holomorphes univalentes dans le cercle $|z|<1$ (c'est-à-dire des fonctions qui ne prennent qu'une fois chacune de leurs valeurs dans ce cercle) de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

Soit $M>1$ un nombre positif quelconque, F_M – la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1), assujetties à la condition $|F(z)|<M$.

Nous démontrons les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Pour les fonctions de la famille F_M on a l'inégalité*

$$|A_2| \leqslant 2(1-M^{-1}) \;{}^{1})$$

et cette limite est atteinte.

THÉORÈME 2. *Pour les fonctions de la même famille on a l'inégalité*

$$|A_3| \leqslant \begin{cases} 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda M^{-1} + M^{-2} & \textit{pour} \quad M \geqslant e, \\ 1 - M^{-2} & \textit{pour} \quad M \leqslant e, \end{cases} \tag{2}$$

où le nombre λ est cette de deux racines de l'équation $\lambda \log \lambda = -M^{-1}$ [2]) qui est la plus grande. La limite (2) est atteinte.

Pour démontrer ces théorèmes, considérons d'abord la famille F_T de toutes les fonctions univalentes bornées dans $|z|<1$ de la forme

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots = a_1(z + A_2 z^2 + \dots),$$

[1]) Ce résultat a été obtenu d'une manière différente – cf. [6] et [5].
[2]) Ce résultat a été obtenu d'une manière différente – cf. [7].

où $a_1 \geqslant T$, T — un nombre quelconque fixe de l'intervalle $(0,1)$. Ces fonctions sont assujetties à la condition $|f(z)|<1$ pour tout $|z|<1$ [3]).

Faisons correspondre à chaque fonction $f(z)$ de la famille F_T le nombre suivant:

$$H_f = H(X_{2f}, X_{3f}, \ldots, X_{Nf}, Y_{2f}, Y_{3f}, \ldots, Y_{Nf}), \tag{3}$$

où l'on suppose que $a_{nf}/a_{1f} = X_{nf} + iY_{nf}$ $(n=2,3,\ldots)$ et que

$$H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N), \qquad N \geqslant 2, \tag{4}$$

soit une fonction quelconque réelle de $2N-2$ variables réelles, définie dans une région suffisamment grande, et qui y admet des dérivées partielles du premier ordre continues, ne s'annulant nulle part simultanément.

M. Z. Charzyński a démontré dans le travail cité ci-dessus qu'il existe dans la famille F_T des fonctions extrémales $f^*(z)$, pour lesquelles la fonctionnelle (3) atteint la valeur la plus grande et chacune de ces extrémales satisfait à l'équation

$$[f^{*\prime}(z)/f^*(z)]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = z^{-2}\mathfrak{N}(z), \qquad 0<|z|<1, \tag{5}$$

où

$$\mathfrak{M}(\omega) = \Big[\sum_{p=2}^{N} D_{p-1}^* \omega^{-(p-1)} + \bar{D}_{p-1}^* \omega^{p-1}\Big] - 2\mathfrak{P}^*, \tag{6}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \Big[\sum_{p=1}^{N} \mathfrak{C}_{p-1}^* z^{-(p-1)} + \bar{\mathfrak{C}}_{p-1}^* z^{p-1}\Big] - 2\mathfrak{P}^*, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned}
& f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n, \qquad [f^*(z)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n \qquad (p=2,3,\ldots),\\
& A_n^* = a_n^*/a_1^* \quad (n=2,3,\ldots),\\
& A_n^* = X_n^* + iY_n^* \quad (n=2,3,\ldots,N),\\
& H_n^* = H'_{X_n}(X_2^*, X_3^*, \ldots, X_N^*, Y_2^*, Y_3^*, \ldots, Y_N^*) -\\
& \qquad - iH'_{Y_n}(X_2^*, \ldots, X_N^*, Y_2^*, \ldots, Y_N^*) \qquad (n=2,3,\ldots,N),\\
& D_{p-1}^* = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^* \qquad (p=2,\ldots,N),\\
& \mathfrak{C}_0^* = \sum_{n=2}^{N} (n-1) a_n^* H_n^*,\\
& \mathfrak{C}_{p-1}^* = 2\sum_{n=p}^{N} (n-p+1) a_{n-p+1}^* H_n^* \qquad (p=2,3,\ldots,N),\\
& \mathfrak{P}^* = \min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} R\Big\{\sum_{p=2}^{N} D_{p-1}^* \exp[ix(p-1)]\Big\}
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

[3]) Nous désignerons aussi les n-ièmes coefficients a_n et A_n par a_{nf} $(n=1,2,\ldots)$ et resp. A_{nf} $(n=2,3,\ldots)$.

et que les fonctions $\mathfrak{M}(\omega)$ et $\mathfrak{N}(z)$ ne prennent sur les circonférences $|\omega|=1$ resp. $|z|=1$ que des valeurs réelles non négatives, chacune d'elles y admettant une racine double au moins. Enfin M. Z. Charzyński a démontré que le coefficient $a_1^* = T$.

Nous allons démontrer maintenant les théorèmes 1 et 2.

Démonstration du théorème 1. Supposons, que la fonction (4) ait la forme

$$H(X_2, \ldots, Y_N) = X_2, \qquad N=2, \tag{9}$$

d'où en tenant compte de (8) et après des calculs faciles,

$$\begin{aligned} D_1^* = \bar{D}_1^* = 2a_1^{*2}, \qquad \mathfrak{C}_0 = a_2^*, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_0 = \bar{a}_2^*,\\ \mathfrak{C}_1^* = \bar{\mathfrak{C}}_1^* = 2a_1^*, \qquad \mathfrak{P}^* = -2a_1^{*2}. \end{aligned} \tag{10}$$

L'équation (5) prendra dans le cas de la fonction (9) la forme suivante

$$\begin{aligned}[][f^{*\prime}(z)/f^*(z)]^2 [D_1^*/f^*(z) + \bar{D}_1^* f^*(z) - 2\mathfrak{P}^*]\\ = z^{-2}(\mathfrak{C}_1^* z^{-1} + \bar{\mathfrak{C}}_1^* z + \mathfrak{C}_0^* + \bar{\mathfrak{C}}_0^* - 2\mathfrak{P}^*)\end{aligned} \tag{11}$$

et la formule (6), en tenant compte de (10), pour $\omega = f^*(z)$, prendra la forme

$$\mathfrak{M}[f^*(z)] = 2a_1^{*2}[f^*(z)]^{-1}[f^*(z)+1]^2. \tag{12}$$

Comme $\mathfrak{N}(z)$ admet une racine double z_0 de module égal à un (cf. [1]), on a $z_0 = -1$, car les coefficients $\mathfrak{C}_0^* + \bar{\mathfrak{C}}_0^*$, $\mathfrak{C}_1^*$ et $\mathfrak{P}^*$ sont réels et vu l'inégalité évidente $R\{a_2^*\} \geqslant 0$ (car il existe une fonction pour laquelle $R\{a_2\} = 0$). En substituant $\bar{\mathfrak{C}}_1^*$ de la formule (10) dans (11) on obtient aisément que

$$\mathfrak{N}(z) = 2a_1^* z^{-1}(z+1)^2. \tag{13}$$

L'équation (11) prendra alors (en divisant les deux membres par $2a_1^*$), selon (12) et (13), la forme suivante:

$$a_1^* f^{*\prime}(z)[f^*(z)]^{-3}[f^*(z)+1]^2 = z^{-3}(z+1)^2,$$

d'où $a_1^{*1/2} f^{*\prime}(z)\{[f^*(z)]^{-1/2} + [f^*(z)]^{-3/2}\} = z^{-1/2} + z^{-3/2}$. En intégrant les deux membres de cette équation nous obtiendrons

$$a_1^{*1/2}\{[f^*(z)]^{1/2} - [f^*(z)]^{-1/2}\} = z^{1/2} - z^{-1/2}.$$

Par conséquent $f^*(z)[f^*(z)-1]^{-2} = a_1^* z(z-1)^{-2}$. Posons maintenant, pour abréger

$$\varphi(z) \equiv z(1-z)^{-2}; \tag{14}$$

alors la fonction extrémale aura la forme

$$f^*(z) = \varphi^{-1}[a_1^*\varphi(z)]. \tag{15}$$

Après des calculs aisés on déduit de (15), selon l'égalité (14), $R\{a_2^*\}=a_2^*=2a_1^*(1-a_1^*)$. Comme $a_1^*=T$, on a

$$a_2^* = 2T(1-T). \tag{16}$$

Considérons maintenant la famille F_M et la famille des fonctions de la forme

$$f(z) = F(z)\, M_F^{-1}, \tag{17}$$

où $M_F = \sup\limits_{|z|<1} |F(z)| \leqslant M$. Les fonctions (17) appartiennent à la famille F_T, où

$$T = M^{-1}. \tag{18}$$

Désignons comme auparavant par $f^*(z)$ la fonction extrémale par rapport à la fonctionnelle $H_f = H(X_{2f}, \ldots, Y_{Nf}) = X_{2f}$. Il existe alors dans la famille F_M une fonction extrémale de la forme $F^*(z) = z + A_2^* z^2 + \ldots$ et l'on peut poser $F^*(z) = f^*(z)T^{-1}$, d'où $A_2^* = a_2^* T^{-1}$ et, vu les formules (16) et (18), $A_2^* = 2(1-M^{-1})$.

Le théorème 1 est ainsi démontré.

Démonstration du théorème 2. Supposons maintenant que $N=3$ et essayons de déterminer la fonction $H(X_2, X_3, Y_2, Y_3)$ de telle façon que les coefficients D_1^*, D_2^*, $\mathfrak{C}_1^*$ et $\mathfrak{C}_2^*$ dans l'équation (5) des fonctions extrémales $f^*(z)$ par rapport à la fonctionnelle $H_f = H(X_{2f}, X_{3f}, Y_{2f}, Y_{3f})$ soient réels. On peut obtenir cette fonction de la manière suivante. Pour $N=3$ les expressions (6) et (7) prendront la forme

$$\mathfrak{M}(\omega) = D_2^* \omega^{-2} + D_1^* \omega^{-1} - 2\mathfrak{P}^* + \bar{D}_1^* \omega + \bar{D}_2^* \omega^2, \tag{19}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \mathfrak{C}_2^* z^{-2} + \mathfrak{C}_1^* z^{-1} + \mathfrak{C}_0^* + \bar{\mathfrak{C}}_0^* - 2\mathfrak{P}^* + \bar{\mathfrak{C}}_1^* z + \bar{\mathfrak{C}}_2^* z^2. \tag{20}$$

On obtient de (8), dans le cas où $N=3$,

$$\mathfrak{C}_1^* = 2[a_1^* H_2^* + 2(X_2^* + iY_2^*)H_3^*], \qquad D_1^* = a_1^* \mathfrak{C}_1^*.$$

De là, pour que $I\{\mathfrak{C}_1^*\} = 0$, il faut que l'on ait

$$a_1^* H'_{Y_2}(X_2^*, X_3^*, Y_2^*, Y_3^*) + 2X_2^* H'_{Y_3}(X_2^*, X_3^* Y_2^*, Y_3^*) - \\ - 2Y_2^* H'_{X_3}(X_2^*, X_3^*, Y_2^*, Y_3^*) = 0.$$

On voit bien que l'équation a comme intégrale particulière

$$H(X_2, X_3, Y_2, Y_3) = X_3 + Y_2^2. \tag{21}$$

Pour la fonction (21) les expressions $D_1^*, \bar{D}_1^*, D_2^*, \bar{D}_2^*, \mathfrak{C}_0^* + \bar{\mathfrak{C}}_0^*, \mathfrak{C}_1^*, \bar{\mathfrak{C}}_1^*$, $\mathfrak{C}_2^*$ et $\bar{\mathfrak{C}}_2^*$ prendront la forme

$$\begin{gathered} D_1^* = \bar{D}_1^* = 4a_1^* R\{a_2^*\}, \qquad D_2^* = \bar{D}_2^* = 2a_1^{*3}, \\ \mathfrak{C}_0^* + \bar{\mathfrak{C}}_0^* = 4[R\{a_3^*\} + I\{a_2^*\}^2 a_1^{*-2}], \\ \bar{\mathfrak{C}}_1^* = \mathfrak{C}_1^* = 4R\{a_2^*\}, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_2^* = \mathfrak{C}_2^* = 2a_1^* \end{gathered} \tag{22}$$

et l'équation (5) — la forme

$$\begin{gathered} [f^{*\prime}(z)]^2 [f^*(z)]^{-4} \{\bar{D}_2^* [f^*(z)]^4 + \bar{D}_1^* [f^*(z)]^3 - 2\mathfrak{P}^* [f^*(z)]^2 + D_1^* f^*(z) + D_2^*\} \\ = z^{-4}[\bar{\mathfrak{C}}_2^* z^4 + \bar{\mathfrak{C}}_1^* z^3 + (\mathfrak{C}_0^* + \bar{\mathfrak{C}}_0^* - 2\mathfrak{P}^*) z^2 + \mathfrak{C}_1^* z + \mathfrak{C}_2^*]. \end{gathered} \tag{23}$$

Nous remarquons ensuite que les coefficients de l'équation (23) sont réels, d'où il résulte aisément que tous les coefficients de la fonction $f^*(z)$ sont réels et par conséquent $I\{a_2^*\} = 0$, $I\{a_3^*\} = 0$, $R\{a_2^*\} = a_2^*$ et $R\{a_3^*\} = a_3^*$.

On voit alors immédiatement que la recherche de la fonction $f^*(z)$, pour laquelle la fonctionnelle $H_f = H(X_{2f}, X_{3f}, Y_{2f}, Y_{3f}) = X_{3f} + Y_{2f}^2$ atteint la valeur la plus grande, est équivalente à la recherche de la fonction pour laquelle la fonctionnelle X_{3f} atteint la valeur la plus grande.

Remarquons, en outre, qu'on peut supposer $a_2^* \geqslant 0$ [4]), et que $a_3^* \geqslant 0$, car il existe une fonction pour laquelle $a_3 = 0$. D'autre part il faut remarquer que $\mathfrak{P}^* \leqslant 0$, cette expression représentant le minimum de $D_1^* \cos x + D_2^* \cos 2x$.

Considérons maintenant la fonction $\mathfrak{N}(z)$. Elle a en tenant compte de (22), la forme

$$\mathfrak{N}(z) = 2(a_1^* z^{-2} + 2a_2^* z^{-1} + 2a_3^* - \mathfrak{P}^* + 2a_2^* z + a_1^* z^2). \tag{24}$$

On sait que cette fonction a une racine double ε de module égal à un, donc on peut représenter $\mathfrak{N}(z)$ sous la forme

$$\mathfrak{N}(z) = 2a_1^* z^{-2}(z^2 - 2\varepsilon z + \varepsilon^2)(z^2 - 2mz + \bar{\varepsilon}^2).$$

Considérons deux cas:

I. La fonction

$$z^2 - 2mz + \bar{\varepsilon}^2 \tag{25}$$

a une racine z_0, pour laquelle $|z_0| < 1$. Les coefficients de la fonction (24) étant réels, le nombre conjugué $\bar{z}_0$ est alors la racine de cette fonction. z_0^{-1} et $\bar{z}_0^{-1}$ étant symétriques envers $|z| = 1$, sont aussi des racines de cette fonction. Il en résulte immédiatement que le nombre z doit être réel, car, au contraire, la fonction (25) posséderait 4 racines distinctes. Les racines de la fonction (25) sont alors de la forme $z_0 = r$ et $z_0' = r^{-1}$, où r est

---

[4]) On peut obtenir $a_2^* \geqslant 0$ en prenant, au lieu de $f^*(z)$, la fonction $-f^*(-z)$, ayant le même coefficient a_3^*, mais où a_2^* est de signe opposé.

un nombre réel plus petit que 1. Par conséquent $\bar{\varepsilon}^2 = z_0 z_0' = rr^{-1} = 1 = \varepsilon^2$, $2m = r + r^{-1}$ et

$$\mathfrak{N}(z) = 2a_1^* z^{-2}(z^2 - \varepsilon z + 1)[z^2 - (r + r^{-1})z + 1]. \tag{26}$$

En comparant les coefficients dans les formules (24) et (26) on obtient

$$\mathfrak{P}^* = 2\{a_3^* - a_1^*[1 + \varepsilon(r + r^{-1})]\}, \qquad 2a_2^* = -2\varepsilon - r - r^{-1}. \tag{27}$$

Nous remarquons que

$$\varepsilon(r + r^{-1}) > 0. \tag{28}$$

En effet, dans le cas contraire, il devrait être $1 + \varepsilon(r + r^{-1}) < 0$, car $|r + r^{-1}| > 2$, ce qui est impossible, car on aurait alors $\mathfrak{P}^* > 0$ en tenant compte de $a_3^* \geqslant 0$. Il en résulte, vu les relations (27) et (28), que $a_2^* = |\varepsilon| + |r| + |r^{-1}| = 1 + |r| + |r^{-1}| > 2$ ce qui est impossible en vertu de théorème 1.

II. La fonction (25) a une racine z_0 pour laquelle $|z_0| = 1$. Il en résulte que z_0 est une racine unique double de cette fonction et, des coefficients de (22) étant réels, $z_0 = \bar{\varepsilon}$. Posons

$$\varepsilon = e^{i\vartheta}. \tag{29}$$

Vu (29), on peut écrire

$$\mathfrak{N}(z) = 2a_1^* z^{-2}(z^2 - 2z\cos\vartheta + 1)^2. \tag{30}$$

En comparant les coefficients dans les formules (24) et (30) on obtient $a_2^* = -2a_1^* \cos\vartheta$. Comme $a_2^* \geqslant 0$, on a $\cos\vartheta \leqslant 0$; en posant, pour abréger, $-\cos\vartheta = \lambda > 0$, on a

$$a_2^* = 2a_1^* \lambda. \tag{31}$$

Revenons maintenant au nombre $\mathfrak{P}^*$. Vu les formules (8) et (22), on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^* &= \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} R\{D_1^* e^{ix} + D_2^* e^{2ix}\} \\ &= \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} (4a_1^* a_2^* \cos x + 2a_1^{*3} \cos 2x) \\ &= \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} (8a_1^{*2} \lambda \cos x + 2a_1^{*3} \cos 2x).\end{aligned}$$

Posons pour abréger

$$u(x) = 8a_1^{*2} \lambda \cos x + 2a_1^{*3} \cos 2x \tag{32}$$

et cherchons pour quelles valeurs de $x = x_0$ $u(x)$ atteint son minimum et évaluons de même $\mathfrak{P}^*$.

On a $u'(x_0) = -8a_1^{*2} \lambda \sin x_0 - 4a_1^{*3} \sin 2x_0 = 0$, d'où x_0 doit satisfaire à l'une des équations: $\cos x_0 = -1$, $\cos x_0 = -\lambda/a_1^*$, $\cos x_0 = 1$.

Examinons les trois cas ci-dessus:

1° Dans le premier cas $x_0 = \pi$ et on a $u''(\pi) > 0$ pour $\lambda > a_1^*$, $u''(\pi) = 0$ pour $\lambda = a_1^*$, $u''(\pi) < 0$ pour $\lambda < a_1^*$, mais $u^{(\mathrm{IV})}(\pi) > 0$ pour $\lambda = a_1^*$.

Il en résulte que la fonction (32) atteint son minimum pour $x_0 = \pi$ quand $\lambda \geqslant a_1^*$ et, comme il est aisé de voir, $\mathfrak{P}^* = -8a_1^{*2}\lambda + 2a_1^{*3}$ pour $\lambda \geqslant a_1^*$.

2° Dans le deuxième cas $x_0 = \arccos(-\lambda/a_1^*)$ et on a

$$u''[\arccos(-\lambda/a_1^*)] > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda < a_1^*.$$

Pour $\lambda = a_1^*$ on obtient le premier cas et pour $\lambda > a_1^*$ le point x_0 n'existe pas. Il en résulte que la fonction (32) atteint son minimum pour $x_0 = \arccos(-\lambda/a_1^*)$ quand $\lambda \leqslant a_1^*$ et, comme il est aisé de voir,

$$\mathfrak{P}^* = -4a_1^* \lambda^2 - 2a_1^{*3} \quad \text{pour} \quad \lambda \leqslant a_1^*.$$

3° Dans le troisième cas x_0 doit être égal à 0 ou 2π, mais $u''(0) < 0$ et $u''(2\pi) < 0$ donc dans ce cas le minimum n'existe pas.

Il résulte de ces considérations qu'il existe seulement deux possibilités, en ce qui concerne $\mathfrak{P}^*$

$$\mathfrak{P}^* = -4a_1^* \lambda^2 - 2a_1^{*3} \quad \text{pour} \quad \lambda \leqslant a_1^*, \tag{33}$$

$$\mathfrak{P}^* = -8a_1^{*2} \lambda + 2a_1^{*3} \quad \text{pour} \quad \lambda \geqslant a_1^*\ ^{5)}. \tag{34}$$

Nous étudierons maintenant les conséquences de l'égalité (33). Dans le cas considéré, en posant $\mathfrak{P}^*$ de la formule (33) dans (19) on obtient, après un calcul aisé, en tenant compte de (22) et (31), que pour $\omega = f^*(z)$

$$\mathfrak{M}[f^*(z)] = 2a_1^{*3}[f^*(z)]^{-2}\{[f^*(z)]^2 + 2\lambda a_1^{*-1} f^*(z) + 1\}^2.$$

Par conséquent l'équation (23) admet (après division des deux membres par $2a_1^*$), d'après (30) et (31) la forme suivante:

$$a_1^{*2}[f^{*\prime}(z)]^2\{1 + 2\lambda[a_1^* f^*(z)]^{-1} + [f^*(z)]^{-2}\}^2 = (1 + 2\lambda z^{-1} + z^{-2})^2,$$

d'où

$$f^{*\prime}(z)\{1 + 2\lambda[a_1^* f^*(z)]^{-1} + [f^*(z)]^{-2}\} = a_1^{*-1}(1 + 2\lambda z^{-1} + z^{-2}). \tag{35}$$

On a pris les branches indiquées des racines, car les coefficients de z^{-2} des deux côtés de (35) doivent être égaux. En intégrant les deux membres de (35) dans un ensemble simplement connexe quelconque, ne contenant pas de point zéro et compris dans le cercle $|z| < 1$, on obtient

$$f^*(z) + 2\lambda a_1^{*-1} \log f^*(z) - [f^*(z)]^{-1} = a_1^{*-1}(z + 2\lambda \log z - z^{-1}) + K. \tag{36}$$

[5]) On voit bien que pour $\lambda = a_1^*$, les deux valeurs de $\mathfrak{P}^*$ données par (33) et (34) sont égales.

En développant les différents termes de (36) pour z suffisamment petit:

$$f^*(z) = a_1^* z + O_1(z), \qquad \log f^*(z) = \log a_1^* + \log z + O_2(z),$$

$$[f^*(z)]^{-1} = (a_1^* z)^{-1} - A_2^* a_1^{*-1} + O_3(z), \tag{37}$$

$$z + 2\lambda \log z - z^{-1} = 2\lambda \log z - z^{-1} + O_4(z),$$

où le rang de $O_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ est au moins 1. En considérant en particulier les valeurs de z sur un arc C de la circonférence $|z|=1$ que la fonction $\omega = f^*(z)$ transforme en un arc analogue D de la circonférence $|\omega|=1$ (cf. [1]) on voit, d'après (36), que

$$R\{K\} = 0. \tag{38}$$

En mettant les expressions (37) dans (36) nous obtiendrons

$$2\lambda \log a_1^* + A_2^* = O(z) + K, \tag{39}$$

où $O(z) = O_1(z) + 2\lambda a_1^{*-1} O_2(z) - O_3(z) - a_1^{*-1} O_4(z)$. Selon la définition de la fonction $O_i(z)$ on obtient de (39) l'équation

$$2\lambda \log a_1^* + A_2^* = K. \tag{40}$$

Tous les termes de l'expression du membre gauche de (40) étant des nombres réels, on obtient de (38) que $K=0$ et l'équation (40) prendra alors la forme $2\lambda \log a_1^* + A_2^* = 0$. En tenant compte de la valeur a_2^* de (31):

$$2\lambda(1 + \log a_1^*) = 0, \tag{41}$$

d'où

$$\lambda = 0 \quad \text{si} \quad a_2^* \neq e^{-1}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant a_1^* \quad \text{si} \quad a_1^* = e^{-1}. \tag{42}$$

Considérons maintenant les conséquences de l'égalité (34). Supposons que dans (34) $\lambda > a_1^*$. De (19), on a, d'après (22),

$$\mathfrak{M}(\omega) = 2a_1^{*3} \omega^{-2} (\omega^4 + 4\lambda a_1^{*-1} \omega^3 - \mathfrak{P} a_1^{*-3} \omega^2 + 4\lambda a_1^{*-1} \omega + 1). \tag{43}$$

En posant la valeur de $\mathfrak{P}^*$ de (34) dans (43) on obtient

$$\mathfrak{M}(\omega) = 2a_1^{*3} \omega^{-2} [\omega^4 + 4\lambda a_1^{*-1} \omega^3 + (8\lambda a_1^{*-1} - 2)\omega^2 + 4\lambda a_1^{*-1} \omega + 1]. \tag{44}$$

D'autre part, comme il est aisé de voir de (44), $\mathfrak{M}(\omega)$ possède une racine double $\omega_0 = -1$ et on peut réprésenter $\mathfrak{M}(\omega)$ sous la forme

$$\mathfrak{M}(\omega) = 2a_1^{*3} \omega^{-2} (\omega + 1)^2 (\omega^2 - 2n\omega + 1). \tag{45}$$

En comparant les coefficients de ω^3 dans (44) et (45) on obtient

$$n = -2\lambda a_1^{*-1} + 1 \tag{46}$$

et, vu la condition $\lambda a_1^{*-1} > 1$, on a

$$n < -1. \tag{47}$$

En tenant compte de (30) et (45), l'équation (23) prendra (après la division des deux membres par $2a_1^*$) la forme

$$a_1^{*2} [f^{*\prime}(z)]^2 [f^*(z)]^{-4} [f^*(z) + 1]^2 \{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\} = z^{-4} (z^2 + 2\lambda z + 1)^2.$$

D'où

$$a_1^* f^{*\prime}(z) [f^*(z)]^{-2} [f^*(z) + 1] \{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} = z^{-2} (z^2 + 2\lambda z + 1) \tag{48}$$

où l'on a pris la branche de radical $\{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2}$ qui est égale pour $f^*(z) = 0$ à 1. En intégrant les deux membres de (48) dans un ensemble simplement connexe quelconque, ne contenant pas de point zéro et compris dans le cercle $|z|<1$, on obtient

$$\begin{aligned} &\{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} - \{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} [f^*(z)]^{-1} + \\ &\quad + (n-1) \log \frac{\{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} - f^*(z) + n}{\{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} [f^*(z)]^{-1} - [f^*(z)]^{-1} + n} \\ &\quad = a_1^{*-1} (z + 2\lambda \log z - z^{-1}) + K. \end{aligned} \tag{49}$$

En développant les termes de (49) pour z suffisamment petits:

$$\left\{ \begin{aligned} &\{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} \\ &= [(a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots)^2 - 2n(a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots) + 1]^{1/2} \\ &= 1 - n a_1^* z + [(a_1^{*2} - 2n a_2^*)/2 - n^2 a_1^{*2}/2] z^2 + O_1(z), \\ &\{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2} [f^*(z)]^{-1} \\ &= [(a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots)^2 - \\ &\qquad - 2n(a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots) + 1]^{1/2} (a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots)^{-1} \\ &= (a_1^* z)^{-1} - (A_2^* + n a_1^*) a_1^{*-1} + O_2(z), \\ &\log\left(f^*(z) - n - \{[f^*(z)]^2 - 2nf^*(z) + 1\}^{1/2}\right) \\ &= \log\{a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots - n - [(a_1^* z + \ldots)^2 - 2n(a_1^* z + \ldots) + 1]^{1/2}\} \\ &= \log(-1 - n) + O_3(z), \\ &\log\left([f^*(z)]^{-1} - n - \{[f^*(z)]^2 - 2nf_1^*(z) + 1\}^{1/2} [f^*(z)]^{-1}\right) \\ &= \log\{(a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots)^{-1} - n - \\ &\qquad - [(a_1^* z + \ldots)^2 - 2n(a_1^* z + \ldots) + 1]^{1/2} (a_1^* z + \ldots)^{-1}\} \\ &= \log z + \log[a_1^{*2}(n^2 - 1)/2] + O_4(z), \\ &z + 2\lambda \log z - z^{-1} = 2\lambda \log z - z^{-1} + O_5(z), \end{aligned} \right. \tag{50}$$

où le rang de $O_i(z)$ est au moins 1 $(i=1,2,3,4,5)$. En considérant, en particulier, les valeurs de z sur l'arc C (cf. [1]) on obtient de (49) que

$$R\{K\}=0. \tag{51}$$

En effet, soit un point quelconque $z=e^{i\varphi}$ sur l'arc C et le point correspondant $\omega=e^{i\Phi}$ sur l'arc D; désignons le membre gauche de l'équation (49) par $I_1[f^*(z)]$ et le membre droit par $I_2(z)$ et posons pour chaque valeur de ω

$$a(\omega)=I_1(\omega)$$

et pour chaque valeur de z

$$\beta(z)=I_2(z).$$

On a

$$R\{a(e^{i\Phi})\}=R\{2i(2\cos\Phi-2n)^{1/2}\sin(\Phi/2)+\\ +2i(n-1)\arg[e^{i\Phi/2}(e^{i\Phi}-2n+e^{-i\Phi})^{1/2}-e^{i\Phi}+n]\}=0,$$

car

$$2\cos\Phi-2n>0$$

d'après (47), et

$$R\{\beta(e^{i\varphi})\}=R\{2i(\sin\varphi+\lambda\varphi+2k\pi)+K\}=R\{K\},$$

d'où $R\{K\}=0$. En posant les expressions (50) dans (49) nous obtenons, en vertu de la définition de la fonction $O_i(z)$, l'équation

$$1+A_2^*a_1^{*-1}+n+(n-1)\log(-1-n)+(1-n)\log[a_1^*(n^2-1)/2]=K. \tag{52}$$

Tous les termes du membre gauche de (52) étant des nombres réels, on obtient d'après (51) que $K=0$ et l'équation (52) prendra alors la forme

$$1+A_2^*a_1^{*-1}+n+(n-1)\log(-1-n)+(1-n)\log[a_1^*(n^2-1)/2]=0$$

et, en tenant compte de (46) et (31), nous obtenons l'équation en λ: $1+\lambda a_1^{*-1}\log\lambda=0$, d'où

$$\lambda\log\lambda=-a_1^*. \tag{53}$$

Supposons maintenant que $\lambda=a_1^*$. On voit bien que dans ce cas l'équation (35) est équivalente à l'équation (44) pour $\lambda=a_1^*$ et par conséquent pour $n=-1$, d'où en vertu de (41) on a $a_1^*=e^{-1}$.

En comparant les coefficients dans les formules (24) et (30) on obtient

$$\mathfrak{P}^*=2a_3^*-4\lambda^2a_1^*-2a_1^*. \tag{54}$$

En comparant ensuite (33) et (54), (34) et (54) on obtient finalement, d'après (42) et (53) et l'égalité évidente $a_1^*=T$, le résultat suivant:

1° Pour $\lambda<T$ on a $\lambda=0$ lorsque $T\neq e^{-1}$ et $0\leqslant\lambda<T$ lorsque $T=e^{-1}$ et, en même temps, $A_3^*=1-T^2$.

2° Pour $\lambda=T$ il doit être $T=e^{-1}$ et, en même temps, $A_3^*=1-T^2=2\lambda^2+1-4T\lambda+T^2$.

3° Pour $\lambda>T$ on a $\lambda\log\lambda=-T$ lorsque $T<e^{-1}$ et, en même temps, $A_3^*=2\lambda^2+1-4T\lambda+T^2$.

λ est ici celle de deux racines de l'équation $\lambda\log\lambda=-T$ qui est la plus grande. En effet, en posant $P(\lambda)\equiv\lambda\log\lambda+T$ $(0<\lambda<1)$ on a $P'(\lambda)=1+\log\lambda$. Comme $\lim\limits_{0<\lambda\to 0}P(\lambda)=T>0$, $\min P(\lambda)=P(e^{-1})=T-e^{-1}<0$, $\lim\limits_{1>\lambda\to 1}P(\lambda)=T>0$ l'équation a deux racines $\lambda_1<e^{-1}$ et $\lambda_2>e^{-1}$. $\lambda>T$, d'où, vu que $P(T)<0$, on a $\lambda_1<T$ et $\lambda_2>T$. Donc $\lambda=\lambda_2$.

Remarquons que ce cas n'est possible que pour $T<e^{-1}$, car, dans le cas contraire, l'équation (53) ne posséderait pas de solution en λ plus grande que T.

Introduisons les fonctions de la variable $0<T<1$ suivantes:

$$A_3'(T)=1-T^2,\qquad A_3''(T)=2\mu^2(T)+1-4\mu(T)T+T^2,$$

où $\mu=\mu(T)$ est défini par l'égalité $\mu^\mu=e^{-T}$. En classifiqant les valeurs de A_3^* et λ selon les valeurs de la variable T on obtient finalement:

$$\begin{array}{llll} \text{si} & T>e^{-1}, & A_3^*=A_3'(T) & \text{et}\quad \lambda=0,\\ \text{si} & T=e^{-1}, & A_3^*=A_3'(T)=A_3''(T) & \text{et}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant T,\\ \text{si} & T<e^{-1}, & A_3^*=A_3'(T) & \text{et}\quad \lambda=\theta, \end{array}$$

où $A_3^*=A_3''(T)$ et $\lambda\log\lambda=-T$.

Nous démontrons maintenant que:

THÉORÈME 3. *Il existe pour chaque $0<T<1$ et pour $\lambda=0$ une fonction univalente bornée,*

$$\omega=f^*(z)=a_1^*z+a_2^*z^2+a_3^*z^3+\ldots=a_1^*(z+A_2^*z^2+A_3^*z^3+\ldots),$$

telle que $a_1^*=T$, $A_2^*=0$, $A_3^*=1-T^2$.

Cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$\omega-\omega^{-1}=T^{-1}(z-z^{-1}). \tag{55}$$

THÉORÈME 4. *Il existe pour $T=e^{-1}$ et pour chaque $0\leqslant\lambda\leqslant T$ une fonction univalente bornée,*

$$\omega=f^*(z)=a_1^*z+a_2^*z^2+a_3^*z^3+\ldots=a_1^*(z+A_2^*z^2+A_3^*z^3+\ldots),$$

telle que $a_1^*=T$, $A_2^*=2\lambda$, $A_3^*=1-T^2$.

Cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$\omega \exp[(\omega-\omega^{-1})(2\lambda e)^{-1}] - z\exp[(z-z^{-1})(2\lambda)^{-1}] = 0. \tag{56}$$

THÉORÈME 5. *Il existe, pour chaque $T<e^{-1}$ et pour λ satisfaisant à l'équation $\lambda\log\lambda=-T$, une fonction univalente bornée,*

$$\omega = f^*(z) = a_1^* z + a_2^* z^2 + a_3^* z^3 + \ldots \doteq a_1^*(z + A_2^* z^2 + A_3^* z^3 + \ldots),$$

telle que $a_1^*=T,\ A_2^*=2\lambda,\ A_3^*=2\lambda^2+1-4\lambda T+T^2$.

Cette fonction satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$(n+1)^{-1}[B(\omega)(\omega^{1/2}-\omega^{-1/2})-(\omega+\omega^{-1})+n+1]\times \\ \times\exp[B(\omega)T(\omega^{1/2}-\omega^{-1/2})(2\lambda)^{-1}] - z\exp[(z-z^{-1})(2\lambda)^{-1}] = 0 \tag{57}$$

où $B(\omega)\equiv(\omega+\omega^{-1}-2n)^{1/2}$, $n=-2\lambda T^{-1}+1$.

Démonstration du théorème 3. Considérons dans le cercle $|\omega|<1$ la fonction réelle suivante:

$$R\{\omega+2\lambda T^{-1}\log\omega-\omega^{-1}\} = R\{\omega-\omega^{-1}\}\ ^{6)}.$$

On voit qu'elle est égale à zéro sur toute la circonférence $|\omega|=1$ et encore sur les segments C_1 et C_2 symétriques, par rapport à l'axe réel, issus des points $\omega_1=-i$ et $\omega_2=i$, dirigés vers le point zéro. Ces points sont évidemment des racines de l'équation

$$(\omega+2\lambda T^{-1}\log\omega-\omega^{-1})' = (\omega-\omega^{-1})' = 1+\omega^{-2} = 0.$$

Prenons deux segments quelconques, C_1' et C_2', faisant partie des précédents, symétriques par rapport à l'axe réel et issus des points ω_1 et ω_2. Prenons ensuite la fonction univalente bornée,

$$\omega=\omega(z)=a_1^*z+\ldots,\qquad a_1^*>0, \tag{58}$$

qui transforme conformément le cercle $|z|<1$ en l'ensemble $G=K(0,1)-(C_1'+C_2')$ où $K(0,1)$ désigne le cercle $|\omega|<1$. L'ensemble G étant symétrique par rapport à l'axe réel, les coefficients de la fonction (58) sont alors réels.

Supposons encore que les segments C_1' et C_2' soient choisis de telle façon que le coefficient a_1^* soit égal à T.

Considérons maintenant l'expression

$$\omega(z)-[\omega(z)]^{-1}-T^{-1}(z-z^{-1}). \tag{59}$$

[6]) La fonction $\omega+2\lambda a_1^{*-1}\log\omega-\omega^{-1}$ est le membre gauche de l'équation (36) pour $f^*(z)=\omega$ et $a_1^*=T$.

De la définition de $\omega(z)$ et des arcs C_1' et C_2' il résulte que l'expression (59) n'admet sur la circonférence $|z|=1$, que des valeurs imaginaires et, comme elle est encore holomorphe et bornée à l'intérieur du cercle $|z|<1$, elle doit donc se réduire à une constante.

On calcule facilement que cette constante est égale à zéro. On trouve ensuite sans difficulté que l'on a $A_2^*=0$, $A_3^*=1-T^2$. On voit bien que la fonction (58) satisfait à l'équation (55), qui est équivalente à (36).

Démonstration du théorème 4. Considérons dans le cercle $|\omega|<1$ la fonction réelle suivante (comparer à la note[6])) $R\{\omega+2\lambda e\log\omega-\omega^{-1}\}$. On voit qu'elle est égale à zéro sur la circonférence $|\omega|=1$ et encore sur les arcs C_1 et C_2, symétriques par rapport à l'axe réel, issus des points $\omega_1=-\lambda e-i(1-\lambda^2e^2)^{1/2}$ et $\omega_2=-\lambda e+i(1-\lambda^2e^2)^{1/2}$ et dirigés vers le point zéro. Ces points sont évidemment des racines de l'équation

$$(\omega+2\lambda e\log\omega-\omega^{-1})' = \omega^{-2}(\omega^2+2\lambda e\omega+1) = 0.$$

Les arcs C_1 et C_2 ne se croisent qu'au point zéro et éventuellement, au point $\omega_0=-1$ si $\lambda=e^{-1}$. Prenons deux arcs quelconques C_1' et C_2' faisant partie des précédents, symétriques par rapport à l'axe réel, issus des points ω_1 et ω_2 (resp. du point ω_0).

Prenons ensuite la fonction univalente bornée

$$\omega=\omega(z)=a_1^*z+\ldots,\qquad a_1^*>0, \tag{60}$$

qui transforme conformément le cercle $|z|<1$ en l'ensemble $G=K(0,1)-(C_1'+C_2')$. Comme dans le cas précédent, tous ses coefficients sont réels. Supposons encore que les arcs C_1' et C_2' soient choisis de telle façon que le coefficient a_1^* soit égal à T.

Considérons maintenant l'expression

$$\omega(z)+2\lambda e\log\omega(z)-[\omega(z)]^{-1}-e(z+2\lambda\log z-z^{-1}). \tag{61}$$

On constate, comme dans le cas précédent, que l'expression (61) est égale à zéro. On calcule ensuite facilement que l'on a ici $A_2^*=2\lambda$, $A_3^*=1-T^2$. On voit bien que la fonction (60) satisfait à l'équation (56); cette équation est équivalente à (36).

Démonstration du théorème 5. Considérons dans le cercle $|\omega|<1$ la fonction réelle suivante:

$$R\big(A(\omega)-A(\omega)\omega^{-1}+(n-1)\log\{[A(\omega)-\omega+n]/[A(\omega)\omega^{-1}-\omega^{-1}+n]\}\big)\ ^{7)},$$

où $A(\omega)\equiv(\omega^2-2n\omega+1)^{1/2}$ et $n=-2\lambda T^{-1}+1$.

[7]) La fonction $A(\omega)-A(\omega)\omega^{-1}+(n-1)\log\{[A(\omega)-\omega+n]/[A(\omega)n^{-1}-\omega^{-1}+n]\}$ est le membre gauche de l'équation (49) pour $f^*(z)=\omega$.

On voit qu'elle est égale à zéro sur toute la circonférence $|\omega|=1$ et encore sur l'ensemble $C+C_1+C_2$, où C désigne le segment de l'axe réel allant du point $\omega_1=-1$ au point $\omega_0=n+(n^2-1)^{1/2}$ [8]); ces points sont des racines de la fonction (45). C_1 et C_2 sont les arcs symétriques par rapport à l'axe réel, allant du point ω_0 au point zéro. Ces arcs ne se croisent qu'au point zéro et au point ω_0.

Prenons deux arcs quelconques C_1' et C_2' faisant partie des arcs C_1 et C_2, symétriques par rapport à l'axe réel, issus du point ω_0.

Prenons ensuite la fonction univalente bornée

$$\omega=\omega(z)=a_1^*z+\ldots,\qquad a_1^*>0, \tag{62}$$

qui transforme conformément le cercle $|z|<1$ en l'ensemble $G=K(0,1)-(C+C_1'+C_2')$; tous ses coefficients sont évidemment réels.

Supposons encore que les arcs C_1' et C_2' soient choisis de telle façon que le coefficient a_1^* soit égal à T.

Pour démontrer que ce choix des arcs C_1' et C_2' est possible considérons la fonction $\omega(z)=\varphi^{-1}[a_1\varphi(z)]=a_1z+\ldots$ ($|z|<1$), où $\varphi(z)\equiv z(1-z)^{-2}$ et a_1 est choisis de manière que la fonction $w(z)$ transforme le cercle $|z|<1$ en l'ensemble $\hat{G}=K(0,1)-C$. On calcule facilement qu'on à $a_1=-4\omega_0(1-\omega_0)^{-2}$. Comme $\omega_0=n+(n^2-1)^{1/2}$, $n=-2\lambda T^{-1}+1$ on obtient que $a_1=T\lambda^{-1}$. Comme $a_1>T$ (car $\lambda<1$) on peut rétrécir l'ensemble $\hat{G}$ de manière que le premier coefficient a_1^* de la fonction (62) soit égal à T, cela démontre la possibilité du choix des arcs C_1' et C_2'.

Considérons maintenant l'expression

$$A(\omega)-A(\omega)\omega^{-1}+(n-1)\log\{[A(\omega)-\omega+n]/[A(\omega)\omega^{-1}-\omega^{-1}+n]\}-\\ -T^{-1}(z+2\lambda\log z-z^{-1}).$$

On constate, comme dans les cas précédents, que cette expression est égale à zéro. On calcule ensuite facilement que l'on a $A_2^*=2\lambda$, $A_3^*=2\lambda^2+1-4\lambda T+T^2$. On voit bien que la fonction (62) satisfait à l'équation (57); cette équation est équivalente à (49). Il résulte de la discussion précédente que le troisième coefficient de la fonction extrémale satisfait aux conditions

$$A_3^*=A_3'(T),\quad \text{si}\quad T\geqslant e^{-1},\qquad A_3^*=A_3''(T),\quad \text{si}\quad T\leqslant e^{-1},$$

où λ satisfait à l'équation (53) pour $a_1^*=T$.

En même temps il existe pour

[8]) En effet, pour $-1<\omega<\omega_0$ on a $\omega^2-2n\omega+1<0$ et par conséquent

$$R\{A(\omega)-A(\omega)\omega^{-1}+(n-1)\log([A(\omega)-\omega+n]/[A(\omega)\omega^{-1}-\omega^{-1}+n])\}\\ =(n-1)R\{\log([A(\omega)-\omega+n]/[A(\omega)\omega^{-1}-\omega^{-1}+n])\}=0,$$

car $|[A(\omega)-\omega+n]/[A(\omega)\omega^{-1}-\omega^{-1}+n]|=1$.

I′. $T>e^{-1}$ exactement une fonction extrémale correspondante, définie dans I.

II″. $T=e^{-1}$ une classe infinie de fonctions extrémales définies dans II.

III″. $T<e^{-1}$ exactement une fonction extrémale correspondante, définie dans III.

Considérons maintenant la famille F_M et la famille des fonctions de la forme (17). Ces fonctions appartiennent, nous l'avons vu, à la famille F_T où $T=M^{-1}$ et par conséquent il existe alors dans la famille F_M une fonction extrémale de la forme $F^*(z)=z+A_2^*z^2+\ldots$ et l'on peut poser $F^*(z)=f^*(z)M^{-1}$, d'où

$$A_3^*=\begin{cases}2\lambda^2+1-4\lambda M^{-1}+M^{-2} & \text{pour}\quad M\geqslant e,\\ 1-M^{-2} & \text{pour}\quad M\leqslant e,\end{cases} \tag{63}$$

où λ satisfait à l'équation $\lambda\log\lambda=-M^{-1}$. Le théorème 2 est ainsi demontré.

Considérons maintenant la famille F_∞ de toutes les fonctions de la forme (1) Nous démontrons que *pour les fonctions de la famille F_∞ on a $|A_3|\leqslant 3$.*

Pour cela nous supposerons, pour le moment que M est variable et nous passerons à la limite dans l'expression

$$A_3''(M^{-1})=2\lambda^2+1-4\lambda M^{-1}+M^{-2},\qquad \lambda\log\lambda=-M^{-1}$$

en faisant tendre M vers l'infini. Puisque $\lambda\to1$ lorsque $M\to\infty$, on obtient

$$\lim_{M\to\infty}A_3''(M^{-1})=3. \tag{64}$$

Considérons maintenant la famille F_∞. Soit $F(z)$ une fonction quelconque de cette famille. Considérons la fonction auxiliaire suivante

$$\Phi_\varkappa(z)=\varkappa^{-1}F(\varkappa z)=z+A_2\varkappa z^2+A_3\varkappa^2z^3+\ldots\qquad (0<\varkappa<1), \tag{65}$$

définie dans le cercle $|z|<1$ et univalente. La fonction (65) est bornée; soit $\sup_{|z|<1}|\Phi_\varkappa(z)|=M_\varkappa$ et considérons le coefficient $A_3\varkappa^2$ de la troisième puissance de z de la fonction (65) et celui de la fonction extrémale de la famille $F_{M_\varkappa}$. Désignons le par $A_{3M_\varkappa}^*$. $A_{3M_\varkappa}^*$ satisfait évidemment à l'équation (65) pour $M=M_\varkappa$. Il est évident que

$$|A_3|\varkappa^2\leqslant A_{3M_\varkappa}^*. \tag{66}$$

Or le membre droit de l'équation (63) est une fonction monotone de M, nous obtenons donc pour $M=M_\infty$

$$A_{3M_\varkappa}^*\leqslant 3. \tag{67}$$

D'autre part, $\Phi_\varkappa(z)\to F(z)$, si $\varkappa\to1$, donc finalement les équations (66), (67) et (64) conduisent au résultat demandé.

Travaux cités

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2, Warszawa 1953.

[2] — et W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska 4, Sectio A, Mathematica, Lublin 1950, p. 41-56.

[3] W. Janowski, *Le maximum d'argument des fonctions univalentes bornées*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska 4, Sectio A, Mathematica, Lublin 1950, p. 57-72.

[4] — *Le maximum de la partie imaginaire des fonctions univalentes bornées*, ce volume, p. 182-200

[5] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Annalen 89 (1932), p. 103-125.

[6] G. Pieck, *Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet*, Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Kl., Wien Abt. IIa (1917), p. 247-263.

[7] D. C. Spencer, *The coefficients of schlicht functions*, Duke Math. Journal 12 (1945), p. 107-125.

Le maximum des coefficients B_2 et B_3 des fonctions univalentes K-symétriques bornées

par W. Janowski (Łódź)

Considérons les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$\Phi(z)=z+B_2z^{K+1}+B_3z^{2K+1}+\ldots, \tag{1}$$

où K est un nombre entier et positif. Soit $M>1$ un nombre positif quelconque, Φ_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|\Phi(z)|<M$.

Nous démontrerons les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Pour les fonctions de la famille Φ_M nous avons l'inégalité*

$$|B_2|\leqslant 2K^{-1}(1-M^{-K}) \tag{2}$$

et cette limite est atteinte.

Théorème 2. *Pour les fonctions de la famille Φ_M nous avons l'inégalité*

$$|B_3|\leqslant\begin{cases} K^{-1}(1-M^{-2K}) & \text{pour } M\leqslant\exp[2/(K+1)],\\ K^{-1}(2\lambda^2+1+M^{-2K}-4\lambda M^{-K}) & \text{pour } M\geqslant\exp[2/(K+1)],\end{cases} \tag{3}$$

où le nombre λ est la plus grande des deux racines de l'équation

$$\lambda\log\lambda+\lambda(K-1)/(K+1)=-M^{-K}.$$

La limite (3) est atteinte.

Pour démontrer ces théorèmes considérons d'abord les fonctions holomorphes univalentes K-symétriques dans le cercle $|z|<1$ de la forme

$$\varphi(z)=b_1z+b_2z^{K+1}+b_3z^{2K+1}+\ldots=b_1(z+B_2z^{K+1}+\ldots), \tag{4}$$

où $b_1\geqslant T^{1/K}$, T est un nombre quelconque fixe de l'intervalle (0,1). Ces fonctions sont assujetties à la condition $|\varphi(z)|<1$.

Considérons la famille de toutes les fonctions de la forme (4). Nous l'appelons famille φ_T. On voit facilement que la recherche des limites pré-