dans ce cas le § 3b est superflu. Pareillement pour des courbes C convexes (même plus générales) on peut omettre le § 3d.

Il est probable que la méthode précédente peut être appliquée à l'étude des propriétés frontières de la fonction $f(z)$ dans le cas général où la frontière du domaine simplement connexe D est quelconque.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Un lemme sur les polynômes de Lagrange

par F. Leja et Z. Opial (Kraków)

Soit donnée une suite triangulaire de nombres complexes

$$\begin{array}{llll} \zeta_0^{(1)}, & \zeta_1^{(1)}, & & \\ \zeta_0^{(2)}, & \zeta_1^{(2)}, & \zeta_2^{(2)}, & \\ \zeta_0^{(3)}, & \zeta_1^{(3)}, & \zeta_2^{(3)}, & \zeta_3^{(3)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{1}$$

où $\zeta_j^{(n)} \neq \zeta_k^{(n)}$ lorsque $j \neq k$. Formons les polynômes

$$L_n^{(j)}(z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{z-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}, \qquad j=0,1,\dots,n,$$

et soient z_0 un point d'accumulation de la suite (1), r un nombre positif quelconque et $M_n(z_0,r)$ le plus grand de ceux des modules

$$|L_n^{(j)}(z_0)|, \qquad j=0,1,\dots,n,$$

pour lesquels le point $\zeta_j^{(n)}$ est contenu dans le cercle $|z-z_0|<r$. Lorsque aucun des points $\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ n'est contenu dans le cercle $|z-z_0|<r$, posons, par définition, $M_n(z_0,r)=0$.

Il est clair que, quel que soit $r>0$, on a $M_n(z_0,r)>0$ pour une infinité de valeurs de n. Nous allons démontrer que:

Quel que soit $r>0$, la limite supérieure

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{M_n(z_0,r)} = M(z_0,r)$$

satisfait à l'inégalité $M(z_0,r)\geqslant 1$.

Démonstration. Supposons que, pour une valeur $r_0>0$ de r, on ait $M(z_0,r_0)<\Theta<1$. Comme $M(z_0,r)$ ne croît pas lorsque r décroît, on a

$$M(z_0,r)<\Theta<1 \quad \text{pour} \quad r\leqslant r_0, \tag{2}$$

et, par suite, il existe un nombre N tel que

$$M_n(z_0,r)<\Theta^n \quad \text{pour} \quad n>N, \quad r\leqslant r_0,$$

d'où il résulte que

$$|L_n^{(j)}(z_0)|<\Theta^n \quad \text{pour} \quad n>N \quad \text{si} \quad |\zeta_j^{(n)}-z_0|<r\leqslant r_0. \tag{3}$$

Désignons par s le nombre

$$s=(1-\Theta)\frac{r}{2}$$

et par $\mu_r(n)$ le nombre de ceux des points

(4) $$\zeta_0^{(n)},\zeta_1^{(n)},\ldots,\zeta_n^{(n)}$$

qui sont situés dans l'ensemble $|\zeta-z_0|\geqslant r$. Alors parmi les points (4), $\mu_s(n)-\mu_r(n)$ points sont situés dans la couronne circulaire $s\leqslant|\zeta-z_0|<r$ et $n+1-\mu_s(n)$ dans le cercle $|\zeta-z_0|<s$.

Supposons que $\nu+1$ points initiaux $\zeta_0^{(n)},\zeta_1^{(n)},\ldots,\zeta_\nu^{(n)}$ du système (4) soient situés dans le cercle $|\zeta-z_0|<s$, et soit $\zeta_j^{(n)}$ l'un d'eux. Lorsque $\zeta_k^{(n)}$ appartient à l'ensemble $|\zeta-z_0|\geqslant r$, on a

$$|\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}|\geqslant r-s=(1+\Theta)\frac{r}{2},$$

donc

(5) $$\left|\frac{z_0-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}\right|=1-\left|\frac{\zeta_j^{(n)}-z_0}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}\right|\geqslant 1-\frac{1-\Theta}{1+\Theta}=\frac{2\Theta}{1+\Theta}.$$

D'autre part, lorsque $\zeta_k^{(n)}$ appartient à la couronne circulaire $s\leqslant|\zeta-z_0|<r$, on a $|\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}|\leqslant r+s$, donc

(6) $$\frac{z_0-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}\geqslant\frac{s}{r+s}=\frac{1-\Theta}{3-\Theta}.$$

De (3), (5) et (6) on déduit l'inégalité ($\zeta_j^{(n)}$ étant toujours un point du cercle $|\zeta-z_0|<s$)

$$\left(\frac{2\Theta}{1+\Theta}\right)^{\mu_r(n)}\left(\frac{1-\Theta}{3-\Theta}\right)^{\mu_s(n)-\mu_r(n)}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\nu}\left|\frac{z_0-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}\right|<\Theta^n,$$

où $\zeta_j^{(n)}$ est un point quelconque du système $\zeta_0^{(n)},\zeta_1^{(n)},\ldots,\zeta_\nu^{(n)}$.

Observons maintenant que la somme des polynômes

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\nu}\frac{z-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}},\qquad j=0,1,\ldots,\nu,$$

est égale identiquement à 1, donc le plus grand de leurs modules au point $z=z_0$ n'est pas plus petit que $1/(\nu+1)$, et comme $\nu\leqslant n$, on a, pour au moins une valeur de $j=0,1,\ldots,\nu$,

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\nu}\left|\frac{z_0-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}\right|\geqslant\frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\left(\frac{2\Theta}{1+\Theta}\right)^n\left(\frac{1-\Theta}{3-\Theta}\right)^{\mu_s(n)-\mu_r(n)}\frac{1}{n+1}<\Theta^n$$

et, par suite,

(7) $$\frac{2\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{1-\Theta}{3-\Theta}\right)^{\frac{\mu_s(n)-\mu_r(n)}{n}}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}<\Theta.$$

Désignons par $\mu(r)$ la limite

(8) $$\mu(r)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_r(n)}{n}$$

et observons que $\mu(r)$ ne décroît pas lorsque r décroît, donc la limite

(9) $$\lim_{r\to 0}\mu(r)=a$$

existe. Soient $\varepsilon>0$ si petit qu'on ait

(10) $$\left(\frac{1-\Theta}{3-\Theta}\right)^{\varepsilon}>\sqrt{\frac{1+\Theta}{2}}$$

et $r_1>0$ si petit qu'on ait $\mu(s)-\mu(r)<\varepsilon$ pour $r\leqslant r_1$; l'existence d'une telle valeur r_1 de r résulte du fait que la limite (9) existe.

D'après (8), on peut trouver une suite croissante $n_1<n_2<n_3<\ldots$ des valeurs de n pour les quelles

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu_r(n_k)}{n_k}=\mu(r),$$

et comme

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\mu_s(n_k)}{n_k}\leqslant\mu(s),$$

on a

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\mu_s(n_k)-\mu_r(n_k)}{n_k}<\varepsilon,$$

d'où il résulte que, si N_1 est suffisamment grand,

$$\frac{\mu_s(n_k)-\mu_r(n_k)}{n_k}<\varepsilon\qquad\text{pour}\quad n_k>N_1.$$

D'autre part

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}>\sqrt{\frac{1+\Theta}{2}}\qquad\text{lorsque}\quad n>N_2,$$

donc, si n_k est suffisamment grand, on a, d'après (7),

$$\frac{2\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{1-\Theta}{3-\Theta}\right)^{\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\Theta}{2}}<\Theta$$

et enfin, d'après (10),

$$\frac{2\Theta}{1+\Theta}\sqrt{\frac{1+\Theta}{2}}\sqrt{\frac{1+\Theta}{2}}<\Theta,$$

ce qui donne l'inégalité fausse $\Theta<\Theta$.

Par suite, l'inégalité (2) ne peut pas avoir lieu, ce qui prouve que la thèse $M(z_0,r)\geqslant 1$ est vraie.

Remarque. *À chaque nombre $R\geqslant 1$ on peut faire correspondre une suite* (1) *telle que la quantité $M(z_0,r)$ soit égale à R.*

En effet, soient $\eta_0^{(n)},\eta_1^{(n)},\ldots,\eta_n^{(n)}$ les sommets du polygone régulier inscrit dans le cercle $|z|=1$. Alors

$$\Delta_n=\min_j\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}|\eta_i^{(n)}-\eta_k^{(n)}|=n+1 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt[n]{\Delta_n}\to 1.$$

D'autre part, soit $\{\delta_n\}$ une suite de nombres positifs tels qu'on ait

$$\delta_n\leqslant\Delta_n \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{\delta_n}\to 1/R.$$

En changeant convenablement la position d'un seul des points $\eta_0^{(n)},\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\ldots,\eta_n^{(n)}$ sur la circonférence $|z|=1$, on peut être conduit au cas où

$$\delta_n=\min_j\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}|\eta_j^{(n)}-\eta_n^{(n)}|.$$

Posons $z_0=0$ et $\zeta_k^{(n)}=r_n\eta_k^{(n)}$, où $\{r_n\}$ est une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Lorsque $r_n\leqslant r$, on a

$$M_n(z_0,r)=\max_j\left[\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{|\zeta_k^{(n)}|}{|\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}|}\right]=\frac{r_n^n}{\min\limits_j\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}|\zeta_j^{(n)}-\zeta_n^{(n)}|}=\frac{1}{\delta_n},$$

donc

$$M(z_0,r)=\overline{\lim}\sqrt[n]{M_n(z_0,r)}=1/\sqrt[n]{\delta_n}=R.$$

Non-local problems in the calculus of variations (I)

by A. Krzywicki, J. Rzewuski, J. Zamorski and A. Zięba (Wrocław)

Introduction. Non-local variational problems occur in the developments of modern theoretical physics, especially in the theory of elementary particles. On the other hand they are intimately connected with the theory of integro-differential equations. In view of the above applications and of the fact that they constitute a new domain of the calculus of variations, we thought it worth while to carry out a systematic investigation of their mathematical structure.

A variational problem is called *non-local* if the unknown functions under the integral sign are taken at several different points of the domain considered. The integrals are multiple, each taken over the same domain of integration. Integrals of various multiplicity may occur.

In the present paper we shall confine ourselves to the study of non-local problems in which the unknown functions $q_1(t),q_2(t),\ldots,q_n(t)$ are functions of one independent variable t. We denote by $\dot{q}_i,\ddot{q}_i,\ldots$ the first, the second, etc. derivatives of these functions with respect to t. The fixed domain of integration is the closed interval $a\leqslant t\leqslant b$. We shall further restrict our investigations to problems in which higher order derivatives than the first do not occur under the integral sign and in which the multiplicity of integrals is at most two.

With all these restrictions we may finally write out the general form of the functional W to be investigated

$$W=\int_a^b L^{(1)}[t,q_i(t),\dot{q}_i(t)]\,dt+\lambda\int_a^b\!\!\int L^{(2)}[t,t',q_i(t),q_i(t'),\dot{q}_i(t),\dot{q}_i(t')]\,dt\,dt'. \tag{0.1}$$

We assume all the conventional conditions for $q_i(t),L^{(1)}$ and $L^{(2)}$ that are necessary for the existence of the integrals in (0.1); they will be listed in detail in due course. In the following investigations the parameter λ will play a similar role to that of the analogous parameter in the integral equations of Fredholm's type.

We must emphasize at this place that the restriction to first order derivatives and twofold integrals is not essential since problems with higher order derivatives of q_i and integrals of higher order multiplicity may be treated by trivial generalizations of the methods developed for (0.1).