Supposons que $z_1(t_a, x_i)$ et $z_2(t_a, x_i)$ sont des solutions du système (1) admettant pour $t_a = t_a^0$ les valeurs $\omega(x_1, \ldots, x_n)$. Les fonctions z_1 et z_2 sont de classe C^1 dans l'ensemble R. A l'aide de la transformation T elles se changent en fonctions $z_1(t_a^0 + t\mu_a, x_i)$ et $z_2(t_a^0 + t\mu_a, x_i)$ qui sont des solutions de l'équation (10) dans l'ensemble R' et y sont identiques. En posant $t=1$ on obtient que les fonctions $z_1(t_a^0, x_i)$ et $z_2(t_a, x_i)$ sont identiques dans l'ensemble R. Ainsi l'unicité des solutions du système (1) dans l'ensemble R est établie.

Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de variables complexes

par W. Pawelski (Gdańsk)

Considérons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right) \tag{1}$$

u celle-ci, sous une forme abregée,

$$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n). \tag{2}$$

Supposons que la fonction $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *soit analytique par oapport à toutes ses variables dans l'ensemble* (A)

$$|x - x_0| \leqslant k, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant k, \quad |z - z_0| \leqslant k, \quad |q_i - q_i^0| \leqslant k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

et que $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ *soit une fonction analytique pour*

$$|y_i - y_i^0| \leqslant k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Supposons ensuite que la valeur absolue de la fonction $f(x, y_1, \ldots \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *soit plus petite que* M, *de même que les valeurs absolues de ses premières et deuxièmes (mixtes) dérivées;*

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right| < M, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}\right| < M \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$|q_i^0| < M, \tag{6}$$

$$|\varphi(y_1^0, \ldots, y_n^0) - z_0| < \frac{k}{4}, \quad |\varphi_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{k}{4}. \tag{7}$$

Sous toutes ces hypothèses l'équation (1) *n'a qu'une, et une seule, intégrale* $z(x, y_1, \ldots, y_n)$ *analytique dans l'ensemble* (B)

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)} - M|x - x_0| \tag{8}$$

(*où* $\delta=k^2/[(2n+1)(n+1)^5(M+k+1)^5]$) *qui se réduit à la fonction* $\varphi(y_1,\ldots,y_n)$ *dans l'ensemble* (C)

$$x=x_0\,,\qquad |y_i-y_i^0|\leqslant\frac{k}{4n(M+1)}\,.$$

La **démonstration** de ce théorème se compose de trois parties.

Dans la **première**, nous apprécions le rayon a du cercle de centre au point x_0, dans lequel existent les intégrales du système d'équations différentielles qui déterminent les bandes caractéristiques pour (1) dont les valeurs initiales x_0, y_i^*, z^*, q_i^* satisfont aux inégalités

$$|y_i^*-y_i^0|\leqslant\frac{k}{2},\qquad |z^*-z_0|\leqslant\frac{k}{2},\qquad |q_i^*-q_i^0|\leqslant\frac{k}{2}$$

et qui, pour $|x-x_0|\leqslant a$ et ces valeurs initiales, vérifient les inégalités

$$|y_i(x)-y_i^0|\leqslant\frac{3}{4}k,\qquad |z(x)-z_0|\leqslant\frac{3}{4}k,\qquad |q_i(x)-q_i^0|\leqslant\frac{3}{4}k.$$

Dans la **seconde**, nous substituons aux valeurs initiales dans les fonctions évaluées respectivement:

$$y_i^*=v_i,\qquad z^*=\varphi(v_1,\ldots,v_n),\qquad q_i^*=\frac{\partial\varphi}{\partial v_i}$$

et nous démontrons qu'il existe un nombre positif $\delta<a$ tel que, pour

$$(\varDelta)\qquad\qquad |x-x_0|\leqslant\delta$$

le jacobien $J(v_1,\ldots,v_n)=D(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n)/D(v_1,\ldots,v_n)$ pour les fonctions

$$\bar{y}_i(x,v)=y_i\left(x,v_1,\ldots,v_n,\varphi(v_1,\ldots,v_n),\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)$$

soit différent de zéro dans le cercle $\varDelta$, et que, dans ce cercle, la transformation (T_x)

$$\bar{y}_i=\bar{y}_i(x,v)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

peut être inversée univoquement.

Dans la **troisième**, nous démontrons que l'ensemble (B) de (8) est contenu dans le champ de la transformation inverse T_x^{-1}, ce qui achève la démonstration de l'existence de l'intégrale de l'équation (1). L'unicité de l'intégrale de cette équation résulte de sa forme analytique et du fait que cette intégrale doit admettre dans l'ensemble (C) les valeurs de la fonction analytique $\varphi(y_1,\ldots,y_n)$.

I. On trouve l'intégrale de l'équation (1) comme pour les fonctions de variables réelles en résolvant le système de caractéristiques qui, pour les fonctions $f(x,y_1,\ldots,y_n,z,q_1,\ldots,q_n)$ prennent la forme suivante:

$$(9)\qquad \frac{dy_i}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial q_i},\qquad \frac{dz}{dx}=f-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_j}q_j,\qquad \frac{dq_i}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y_i}+\frac{\partial f}{\partial z}q_i,$$

ou bien, en introduisant les notations

$$Y_i=\frac{\partial f}{\partial y_i},\qquad Z=\frac{\partial f}{\partial z},\qquad Q_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

la suivante:

$$(10)\qquad \frac{dy_i}{dx}=-Q_i,\qquad \frac{dz}{dx}=f-\sum_{j=1}^{n}Q_jq_j,\qquad \frac{dq_i}{dx}=Y_i+Zq_i.$$

Supposons que le point $x=x_0$, $y_i=y_i^*$, $z=z^*$, $q_i=q_i^*$ *de l'espace complexe à* $2n+2$ *dimensions vérifie l'inégalité*

$$(11)\qquad |y_i^*-y_i^0|\leqslant\frac{k}{2},\qquad |z^*-z_0|\leqslant\frac{k}{2},\qquad |q_i^*-q_i^0|\leqslant\frac{k}{2}.$$

Désignons l'intégrale passant par ce point par C^*:

$$(12)\qquad \begin{aligned} y_i&=y_i(x,y_1^*,\ldots,y_n^*,z^*,q_1^*,\ldots,q_n^*),\\ z&=z(x,y_1^*,\ldots,y_n^*,z^*,q_1^*,\ldots,q_n^*),\\ q_i&=q_i(x,y_1^*,\ldots,y_n^*,z^*,q_1^*,\ldots,q_n^*).\end{aligned}$$

On tâchera de choisir $a>0$ *de manière que pour* $|x-x_0|\leqslant a$ *l'intégrale analytique* C^* *de l'équation* (10) *existe et vérifie l'inégalité*

$$(13)\qquad \begin{gathered} |y_i(x,y_1^*,\ldots,q_n^*)-y_i^0|\leqslant\frac{3}{4}k,\qquad |z(x,y_1^*,\ldots,q_n^*)-z_0|\leqslant\frac{3}{4}k,\\ |q_i(x,y_1^*,\ldots,q_n^*)-q_i^0|\leqslant\frac{3}{4}k.\end{gathered}$$

(Il résulte alors des inégalités antérieures et de l'hypothèse (6) que

$$|q_i(x,y_1^*,\ldots,q_n^*)|\leqslant|q_i(x,y_1^*,\ldots,q_n^*)-q_i^0|+|q_i^0|\leqslant\frac{3}{4}k+M<k+M.)$$

Dans ce but on s'appuiera sur la propriété B énoncée dans le corollaire du théorème démontré dans un travail de M. T. Ważewski[1]) que voici:

[1]) T. Ważewski, *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 16 (1937), p. 97-106.

Supposons que les fonctions $f_i(x,y_1,\ldots,y_n)$ soient analytiques dans le domaine

(14) $$|x-x_0|<a, \qquad |y_i-y_i^0|<b_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et considerons le système d'équations différentielles

(15) $$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\ldots,y_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Respectons l'hypothèse H relative aux fonctions auxiliaires $\sigma_i(t,u_1,\ldots,u_n)$.

HYPOTHÈSE H. *Supposons que les fonctions* $\sigma_i(t,u_1,\ldots,u_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *soient continues et non négatives dans l'ensemble des points réels* $(t,u_1,\ldots,u_n)$ *pour lesquels on a*

$$0\leqslant t<s, \qquad u_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Supposons ensuite que la fonction σ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ *est croissante (au sens large) dans l'intervalle fermé* $[0,\infty]$ *séparément par rapport à chacune des variables* $(u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_n)$. *En supposant que* $k_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *on désignera par*

$$u_1=\omega_1(t,k_1,\ldots,k_n), \quad \ldots, \quad u_n=\omega_n(t,k_1,\ldots,k_n)$$

l'intégrale supérieure du système

$$\frac{du_i}{dt}=\sigma_i(t,u_1,\ldots,u_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

issue du point $t=0,u_1=k_1,\ldots,u_n=k_n$. *On suppose que cette intégrale existe dans l'intervalle* $0\leqslant t<s$.

Supposons que les fonctions f_i vérifient, dans le domaine (14), les inégalités

(16) $$|f_i(x,y_1,\ldots,y_n)|\leqslant\sigma_i(|x-x_0|,|y_1-y_1^0|,\ldots,|y_n-y_n^0|).$$

Considérons une intégrale quelconque

(17) $$y_1=\varphi_1(x), \quad \ldots, \quad y_n=\varphi_n(x)$$

du système (15) et supposons (en désignant par $k_1,\ldots,k_n$ les constantes respectives) les inégalités

(18) $$|\varphi_i(x_0)-y_i^0|\leqslant k_i<b_i.$$

Propriété B. Désignons par t_i $(i=1,2,\ldots,n)$ la plus petite racine positive de l'équation

(19) $$\omega_i(t,k_1,\ldots,k_n)=b_i$$

et, au cas où une telle racine n'existe pas, posons $t_i=\infty$. Si les hypothèses du théorème sont satisfaites, l'intégrale (17) existe, est analytique dans le cercle $|x-x_0|<\min(a,s,t_1,\ldots,t_n)$ et vérifie l'inégalité

$$|\varphi_i(x)-y_i^0|\leqslant\omega_i(|x-x_0|,k_1,\ldots,k_n).$$

Passons au calcul de la constante a. Dans le domaine de son existence, l'intégrale (12) vérifie le système (10). En y introduisant la différence $q_i-q_i^0$, changeons ce système en

(20) $$\frac{dy_i}{dx}=-Q_i, \qquad \frac{dz}{dx}=f-\sum_{j=1}^{n}Q_j[(q_j-q_j^0)+q_j^0],$$
$$\frac{dq_i}{dx}=Y_i+Z[(q_i-q_i^0)+q_i^0].$$

C'est un système d'équations différentielles correspondant au système (15), et auquel s'applique le théorème mentionné plus haut.

En s'appuyant sur les hypothèses (5) et (6) on trouve que les valeurs absolues des côtés droits du système satisfont aux inégalités

$$|-Q_i|\leqslant M,$$

(21) $$|f-\sum_{j=1}^{n}Q_jq_j|=|f-\sum_{j=1}^{n}Q_j[(q_j-q_j^0)+q_j^0]|\leqslant M(1+nM+\sum_{j=1}^{n}|q_j-q_j^0|),$$
$$|Y_i+Zq_i|=|Y_i+Z[(q_i-q_i^0)+q_i^0]|\leqslant M(1+M+|q_i-q_i^0|).$$

Donc, d'autant plus, les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$|-Q_i|\leqslant M(1+nM+\sum_{j=1}^{n}|q_j-q_j^0|),$$

(22) $$|f-\sum_{j=1}^{n}Q_jq_j|\leqslant M(1+nM+\sum_{j=1}^{n}|q_j-q_j^0|),$$
$$|Y_i+Zq_i|\leqslant M(1+nM+\sum_{j=1}^{n}|q_j-q_j^0|).$$

Ainsi

(23) $$\sigma_i(t,u_1,\ldots,u_{2n+1})=M(1+nM+\sum_{j=1}^{n}u_{j+n+1}) \qquad (i=1,2,\ldots,2n+1)$$

et les conditions (18) ont la forme

$$|y_i(x_0)-y_i^0|\leqslant\frac{k}{2}, \qquad |z(x_0)-z_0|\leqslant\frac{k}{2}, \qquad |q_i(x_0)-q_i^0|\leqslant\frac{k}{2}.$$

Le système des fonctions $\sigma_i(t,u_1,\ldots,u_{2n+1})$ remplit aussi l'hypothèse H (croissance ou décroissance au sens large). De plus, pour que les inégalités (14) soient vérifiées, il suffit d'admettre

$$|x-x_0|<\frac{3}{4}k,\qquad |y_i-y_i^0|<\frac{3}{4}k,\qquad |z-z_0|<\frac{3}{4}k,\qquad |q_i-q_i^0|<\frac{3}{4}k.$$

Le système d'équations différentielles à variables réelles

$$\frac{du_i}{dt}=M(1+nM+\sum_{j=1}^{n}u_{j+n+1})\qquad (i=1,2,\ldots,2n+1) \tag{24}$$

a une, et une seule, intégrale u_i $(i=1,2,\ldots,2n+1)$ qui

1° pour $t=0$ admet les valeurs $u_i=k/2$,

2° $u_1=u_2=\ldots=u_{2n+1}$, ce qui résulte de 1° et du fait que tous les côtés droits du système (24) sont égaux.

Ainsi donc, au lieu de (24), il suffit de résoudre l'équation

$$\frac{du}{dt}=M+nM^2+nMu. \tag{25}$$

On en déduit l'équation linéaire

$$u'-nMu-(M+nM^2)=0$$

dont l'intégrale, d'ailleurs unique[2]), a la forme

$$u=\exp\left(\int_0^t nM\,dt\right)\left\{\frac{k}{2}+\int_0^t(M+nM^2)\exp\left(-\int_0^t nM\,dt\right)dt\right\},$$

ce qui donne en définitive, après les transformations,

$$u=\frac{k}{2}+\left(\frac{1}{n}+M+\frac{k}{2}\right)(\exp nMt-1). \tag{26}$$

Considérons la fonction $u(t)=k/2+(1/n+M+k/2)(\exp nMt-1)$ fortement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ qui, pour $t=0$ admet la valeur $u(0)=k/2$. Désignons par T la racine de l'équation $u(t)=3k/4$ et choisissons $T_0=\min(k/4,T)$. Alors, dans notre cas, $t_i=T_0$ $(i=1,2,\ldots,2n+1)$ et l'intégrale (12) du système (20) existe, est analytique pour

$$|x-x_0|<\min\left(\frac{3}{4}k,T_0,s\right),$$

en outre $s\geqslant 3k/4$, car on déduit de la forme du système (25) et (26) que l'intégrale $u(t)$ existe même pour $-\infty<t<+\infty$. Néanmoins pour les

[2]) Voir E. Kamke, *Differentialgleichungen reeler Funktionen*, Leipzig 1930, p. 33.

évaluations ultérieures, tâchons de trouver un $a>0$ et en même temps $a<\min(3k/4,T_0,s)$ pour lequel ait lieu (13). Choisissons dans ce but la fonction

$$\varphi(t)=\frac{k}{2}+\left(\frac{1}{n}+M+\frac{k}{2}\right)(\exp n(M+1)t-1). \tag{27}$$

Il résulte immédiatement de (26) et (27) que $\varphi(t)>u(t)$ pour $t>0$, donc la racine de l'équation $\varphi(t)=3k/4$ (désignons-la par a) est moindre que la racine T.

Résolvons l'équation $\varphi(a)=3k/4$. On a

$$\frac{3}{4}k=\frac{k}{2}+\left(\frac{1}{n}+M+\frac{k}{2}\right)(\exp n(M+1)a-1),$$

$$\exp n(M+1)a=1+\frac{k}{4\left(\frac{1}{n}+M+\frac{k}{2}\right)},$$

$$a=\frac{1}{n(M+1)}\ln\left(1+\frac{k}{4\left(\frac{1}{n}+M+\frac{k}{2}\right)}\right) \tag{28}$$

$$<\frac{1}{n(M+1)}\cdot\frac{k}{4\cdot\frac{1}{n}}=\frac{k}{4(M+1)}<\frac{k}{4}.$$

Il en résulte que $a<\min(k/4,T)$, donc $a<\min(3k/4,T_0,s)$.

On tire les conclusions suivantes des résultats obtenus par l'application du théorème de la page 40:

1° *La racine a dans* (28) *satisfait aux conditions* (13), *ce qui implique que* $|x-x_0|\leqslant a$,

$$|y_i(x)-y_i^0|\leqslant\varphi(|x-x_0|)\leqslant\frac{3}{4}k,\qquad |z(x)-z_0|\leqslant\varphi(|x-x_0|)\leqslant\frac{3}{4}k,$$

$$|q_i(x)-q_i^0|\leqslant\varphi(|x-x_0|)\leqslant\frac{3}{4}k.$$

2° *Les fonctions* (12) *sont analytiques dans le cercle* $|x-x_0|\leqslant a$. *Evidemment elles le sont aussi par rapport à toutes les valeurs initiales* y_i^*,z^*,q_i^* *dans l'ensemble*

$$|y_i^*-y_i^0|\leqslant\frac{k}{2},\qquad |z^*-z_0|\leqslant\frac{k}{2},\qquad |q_i^*-q_i^0|\leqslant\frac{k}{2}.$$

Remarquons que $\delta < a$, ce qui résulte de l'inégalité $\ln(1+x) > x - x^2/2$ pour $x > 0$, après de simples calculs.

Nous terminerons la première partie en démontrant que *dans l'ensemble* (C)

$$(29)\qquad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)} < \frac{k}{4}$$

ont lieu les inégalités

(30)

$$|y_i - y_i^0| < \frac{k}{2}, \qquad |\varphi(y_1, \dots, y_n) - z_0| < \frac{k}{2}, \qquad |\varphi_{y_i}(y_1, \dots, y_n) - q_i^0| < \frac{k}{2}.$$

Démonstration. La première des inégalités (30) résulte directement de (29). On a ensuite

$$(31)\qquad |\varphi(y_1, \dots, y_n) - z_0| \leqslant |\varphi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(y_1^0, \dots, y_n^0)| + |\varphi(y_1^0, \dots, y_n^0) - z_0|.$$

Notons

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(Y), \qquad \varphi(y_1^0, \dots, y_n^0) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(Y^0).$$

Supposons que Y et Y^0 appartiennent à (C). Le segment $S(t) = Y^0 + t(Y - Y^0)$ (t réel, $0 \leqslant t \leqslant 1$) appartient également à (C). On a

$$\begin{gathered} s_1(t) = y_1^0 + t(y_1 - y_1^0), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ s_n(t) = y_n^0 + t(y_n - y_n^0). \end{gathered}$$

Alors $\quad \Phi[S(t)] = \varphi(S_1(t), \dots, S_n(t)), \quad \Phi[S(1)] = \Phi(Y), \quad \Phi[S(0)] = \Phi(Y^0)$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(y_1^0, \dots, y_n^0) &= \Phi(S(1)) - \Phi(S(0)) = \int_0^1 \frac{d\Phi(S(t))}{dt}\, dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi(S_1(t), \dots, S_n(t))}{\partial y_k} (y_k - y_k^0)\right] dt, \end{aligned}$$

d'où

$$(32)\qquad \begin{aligned} &|\varphi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(y_1^0, \dots, y_n^0)| \\ &\leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial\varphi(S_1(t), \dots, S_n(t))}{\partial y_k}\right| \cdot |y_k - y_k^0|\, dt \leqslant n \cdot \frac{k}{4n(M+1)} \cdot M < \frac{k}{4}. \end{aligned}$$

Il résulte directement de (31) et (32) que la deuxième inégalité de (30) est satisfaite.

On démontre de la même manière la troisième inégalité de (30).

II. Désignons par (R_z) l'ensemble des points complexes $x, v_1, \dots, v_n$ qui satisfont aux conditions

$$(33)\qquad x = x_0, \qquad |v_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et par (r_z) l'ensemble $V = (v_1, \dots, v_n)$ vérifiant les conditions

$$|v_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)}.$$

Dans les fonctions (12) substituons

$$(34)\qquad y_i^* = v_i, \qquad z^* = \varphi(v_1, \dots, v_n), \qquad q_i^* = \frac{\partial\varphi(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Désignons les fonctions ainsi obtenues par

$$(35)\qquad \bar{y}_i(x, v), \qquad \bar{z}(x, v), \qquad \bar{q}_i(x, v).$$

Désignons ensuite par $L(V)$ la courbe définie par les relations

$$(36)\qquad |x - x_0| \leqslant \delta, \qquad y_i = \bar{y}_i(x, v) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A chaque valeur V de (r_z) correspond une telle courbe. Chacune de ces courbes satisfait à la condition que pour $x = x_0$ la valeur correspondante Y vérifie l'inégalité

$$|y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)},$$

car, pour $x = x_0$, on a $y_i = v_i$. Toutes les courbes $L(V)$ ainsi obtenues forment un ensemble évidemment borné, fermé et connexe que l'on désignera par $E(R_z)$. On obtient cet ensemble en substituant à V dans (36) tous les $v_1, \dots, v_n$ de (r_z) et à x toutes les valeurs du cercle $|x - x_0| \leqslant \delta$.

Désignons par $E(R_z, \zeta)$ toute section de cet ensemble obtenue en posant $x = \zeta$ (constant). Si l'on ne considère que les points complexes $(y_1, \dots, y_n)$ obtenus de cette manière, sans tenir compte de ζ, on désignera cet ensemble correspondant à $x = \zeta$ par $e(r_z, \zeta)$. Désignons (comme plus haut) par $S(\zeta)$ la section de l'ensemble (B) pour $x = \zeta$, et par $s(\zeta)$ la même section mais en négligeant ζ, c'est-à-dire la section composée des points $x = (\zeta, y_1, \dots, y_n)$ de l'ensemble (B). Désignons par $T_x(V)$ la transformation dépendant d'un paramètre complexe x suivante:

$$(37)\qquad \begin{gathered} y_1 = \bar{y}_1(x, v_1, \dots, v_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \bar{y}_n(x, v_1, \dots, v_n). \end{gathered}$$

Il résulte des considérations antérieures, p. 40, que les fonctions (35) sont analytiques dans l'ensemble (P)

$$|x-x_0| \leqslant \delta, \qquad |v_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)}, \tag{38}$$

satisfont aux inégalités

$$|\bar{y}_i - y_i^0| \leqslant \frac{3}{4}k, \qquad |\bar{z}-z_0| \leqslant \frac{3}{4}k, \qquad |\bar{q}_i - q_i^0| \leqslant \frac{3}{4}k, \qquad |\bar{q}_i| < k+M$$

et vérifient le système d'équations (10) dans le cercle (D)

$$|x-x_0| \leqslant \delta.$$

La résolution de la première partie de notre problème (démonstration de l'existence) se réduit à présent à la résolution par rapport à $v_1, \ldots, v_n$ du système d'équations $y_i = \bar{y}_i(x, v)$. Les solutions obtenues, substituées ensuite à $v_1, \ldots, v_n$ dans $\bar{z}(x, V)$ donneront l'intégrale cherchée. Dans ce but il faut démontrer que

1. *pour tout x complexe de (D) le jacobien*

$$J(x, v_1, \ldots, v_n) = \frac{D(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)} \tag{39}$$

est différent de zéro dans (P),

2. *dans l'ensemble (r_z) la transformation inverse pour $T_x(V)$ existe, unique et analytique.*

On prouvera les propriétés 1 et 2 après avoir démontré que dans l'ensemble (P) ont lieu les inégalités

$$\left|\frac{\partial \bar{y}_i(x, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_j} - \frac{\partial \bar{y}_i(x_0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_j}\right| < \frac{1}{n} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Démonstration. Notons

$$\begin{aligned} \eta_i(x) &= \frac{\partial \bar{y}_i(x, v)}{\partial v_\lambda} - \frac{\partial \bar{y}_i(x_0, v)}{\partial v_\lambda}, \\ \zeta(x) &= \frac{\partial \bar{z}(x, v)}{\partial v_\lambda} - \frac{\partial \bar{z}(x_0, v)}{\partial v_\lambda}, \qquad (\lambda \text{ fixé}, \ i = 1, 2, \ldots, n) \\ \varkappa_i(x) &= \frac{\partial \bar{q}_i(x, v)}{\partial v_\lambda} - \frac{\partial \bar{q}_i(x_0, v)}{\partial v_\lambda}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\eta_i^* = \frac{\partial \bar{y}_i(x_0, v)}{\partial v_\lambda}, \qquad \zeta^* = \frac{\partial \bar{z}(x_0, v)}{\partial v_\lambda}, \qquad \varkappa_i^* = \frac{\partial \bar{q}_i(x_0, v)}{\partial v_\lambda}; \tag{42}$$

alors

$$\eta_i(x_0) = \varkappa_i(x_0) = \zeta(x_0) = 0, \tag{43}$$

et, vu que

$$\bar{z}(x_0, v_1, \ldots, v_n) \equiv \varphi(v_1, \ldots, v_n), \qquad \bar{q}_i(x_0, v_1, \ldots, v_n) = \frac{\partial \varphi(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_i},$$

on a

$$\eta_i^* = 0 \ (i \neq \lambda) \quad \text{et} \quad \eta_\lambda^* = 1, \qquad |\zeta^*| < M, \qquad |\varkappa_i^*| < M. \tag{44}$$

Pour des évaluations ultérieures rappelons que

$$|\bar{q}_i(x, v_1, \ldots, v_n)| \leqslant \frac{3}{4}k + M < k + M,$$

ce qui a lieu en vertu de (13). Dans la suite substituons les fonctions

$$\bar{y}_i(x, v_1, \ldots, v_n), \qquad \bar{z}(x, v_1, \ldots, v_n), \qquad \bar{q}_i(x, v_1, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

à y_i, z, q_i dans les équations caractéristiques (10) et différencions par rapport à v_λ les identités ainsi obtenues qui sont vraies pour $|x-x_0| \leqslant \alpha$ (page 43). On peut faire ceci sous l'hypothèse que $|x-x_0| \leqslant \alpha$ parce qu'alors les fonctions (45) sont analytiques d'après la démonstration du théorème à la page 39.

On obtient alors le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dx} &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}(\varkappa_j + \varkappa_j^*) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(\eta_j + \eta_j^*) - \frac{\partial Q_i}{\partial z}(\zeta + \zeta^*), \\ \frac{d\zeta}{dx} &= -\sum_{j=1}^{n}(\varkappa_j + \varkappa_j^*)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \cdot \bar{q}_i\right) - \sum_{j=1}^{n}(\eta_j + \eta_j^*)\left(-Y_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}\right) - \\ &\quad -(\zeta + \zeta^*) - \left(Z + \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \frac{\partial Q_i}{\partial z}\right), \\ \frac{d\varkappa_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n}(\varkappa_j + \varkappa_j^*)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial Z}{\partial q_j} \cdot \bar{q}_i\right) + Z(\varkappa_i + \varkappa_i^*) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}(\eta_j + \eta_j^*)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_j} + \bar{q}_i \frac{\partial Z}{\partial y_j}\right) + (\zeta + \zeta^*)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial z} + \bar{q}_i \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Désignons les côtés droits de ces équations respectivement par

$$\lambda_i(\varkappa_j, \eta_j, \zeta), \qquad \mu(\varkappa_j, \eta_j, \zeta), \qquad \varrho_i(\varkappa_j, \eta_j, \zeta) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient des équations (46), (42)-(45) et de l'hypothése à la page 40 les inégalités suivantes:

$$|\lambda_i(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\leqslant M\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+nM^2+M\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+M+M|\zeta|+M^2,$$

$$\tag{47}\begin{aligned}|\mu(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\leqslant&\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+nM\Big)nM(k+M)+\\&+\Big(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+1\Big)[M+(k+M)nM]+\\&+(|\zeta|+M)[M+(k+M)nM],\\|\varrho_i(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\leqslant&\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+nM\Big)[M+(k+M)M]+M|\varkappa_i|+M^2+\\&+\Big(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+1\Big)[M+(k+M)M]+\\&+(|\zeta|+M)[M+(k+M)M];\end{aligned}$$

par suite

$$|\lambda_i(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\leqslant M\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+M\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+M|\zeta|+(M^2n+M^2+M),$$

$$\begin{aligned}|\mu(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\leqslant& nM(k+M)\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+[M+(k+M)nM]\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+\\&+[M+(k+M)nM]|\zeta|+[n^2M^2(k+M)+M+(k+M)nM+M^2+\\&+nM^2(k+M)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varrho_i(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\leqslant&[2M+(k+M)M]\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+[M+(k+M)M]\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+\\&+[M+(k+M)M]|\zeta|+\{nM[M+(k+M)M]+M^2+M+\\&+(k+M)M+M[M+(k+M)M]\}.\end{aligned}$$

Si dans les côtés droits de ces trois inégalités on remplace les coefficients de $|\varkappa_i|,|\eta_i|,|\zeta|$ par $nM(2+k+M)$ et tous les termes libres par $nM(2+k+M)(2n+1)[1+(n+1)M]$, ces côtés augmentent. On peut donc écrire

$$\tag{48}\left.\begin{aligned}&|\lambda_i(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\\&|\mu(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\\&|\varrho_i(\varkappa_j,\eta_j,\zeta)|\end{aligned}\right\}\leqslant nM(2+k+M)\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varkappa_j|+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|+|\zeta|\Big)+ \\ +nM(2+k+M)(2n+1)[1+(n+1)M].$$

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Désignons les coefficients dans* (48) *par* $A_1=nM(2+k+M)$, $B=nM(2+k+M)(2n+1)[1+(n+1)M]$, *et considérons le système d'équations différentiellles à variables réelles*

$$\tag{49}\frac{du_\nu}{dt}=A_i\sum_{\mu=1}^{2n+1}u_\mu+B,\qquad A_1>0,\qquad B>0.$$

Comme on le voit les côtés droits de ces équations sont, pour $\nu=1,2,\ldots,2n+1$, *égaux identiquement, donc aussi toutes les dérivées des fonctions u sont égales*

$$\tag{50}\frac{du_1}{dt}=\frac{du_2}{dt}=\ldots=\frac{du_{2n+1}}{dt}.$$

Si l'on suppose en outre que les valeurs initiales de ces fonctions pour $t=0$ *sont égales, par exemple*

$$\tag{51}u_1(0)=u_2(0)=\ldots=u_{2n+1}(0)=0,$$

il suit de (50) *et* (51) *que* $u_1\equiv u_2\equiv\ldots\equiv u_{2n+1}$.

Ainsi u_ν sont identiquement égales dans tout l'intervalle de la variable t. Il suffit donc de résoudre, à la place du système (49), une équation, à savoir

$$\tag{52}\frac{du}{dt}=A_1(2n+1)u+B.$$

Notons $A=A_1(2n+1)$. L'équation (52) prendra la forme

$$\tag{53}\frac{du}{dt}=Au+B.$$

L'intégrale de cette équation, d'ailleurs unique, qui pour $t=0$ admet la valeur $\eta=0$, a la forme

$$u=\exp\Big(\int_0^t A\,dt\Big)\Big(0+\int_0^t B\exp\Big(-\int_0^t A\,dt\Big)dt\Big)$$

$$=\exp(At)\,B\int_0^t\exp(-At)\,dt=\frac{B}{A}(\exp At-1).$$

Passons à présent à l'appréciation de la portée de l'inégalité (40), donc indirectement à l'évaluation de la fonction (41). On s'appuyera sur le théorème de la page 43 et sur le théorème auxiliaire ci-dessus.

Il résulte du théorème de la page 43, des relations (41)-(44), des équations (46), des inégalités (48) et du théorème auxiliaire ci-dessus que la fonction cherchée, majorisant les fonctions (41) a la forme

$$u=\frac{B}{A}(\exp At-1)\qquad\left(\frac{B}{A}>0,A>0\right),$$

qu'elle est fortement croissante pour $0\leqslant t<\infty$ et que, pour $t=0$, elle admet la valeur $u=0$. Il existe donc une, et une seule, racine vérifiant l'équation

$$\frac{B}{A}\left(\exp At-1\right)=\frac{1}{n},\qquad \frac{B}{A}\exp At=\frac{1}{n}+\frac{B}{A}$$

de la forme

$$\varrho=\frac{1}{A}\ln\left(1+\frac{A}{nB}\right).$$

Donc, pour tout $\delta<\varrho$, les inégalités (40) ont lieu pour $|x-x_0|\leqslant\delta$. Evidemment δ de la page 38 satisfait également à l'inégalité $\delta<\varrho$, ce qui résulte de l'inégalité $\ln(1+x)>x-x^2/2$ (pour $x>0$).

Supposons que pour l'ensemble (P) ont lieu les inégalités (40)

$$\left|\frac{\partial\overline{y}_i(x,V)}{\partial v_j}-\frac{\partial\overline{y}_i(x_0,V)}{\partial v_j}\right|<\frac{1}{n}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n).$$

Alors ont lieu aussi les identités suivantes:

$$\frac{\partial\overline{y}_i(x_0,V)}{\partial v_j}\equiv\delta_{ij},$$

où $\delta_{ij}=0$ pour $i\neq j$ et $\delta_{ii}=1$. Posons

$$\varepsilon_{ij}(x,V)=\frac{\partial\overline{y}_i(x,V)}{\partial v_j}-\frac{\partial\overline{y}_i(x_0,V)}{\partial v_j}.$$

On aura dans (P)

$$(54)\qquad \frac{\partial\overline{y}_i(x,V)}{\partial v_j}=\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}(x,V),\qquad|\varepsilon_{ij}(x,V)|<\frac{1}{n}.$$

Le théorème 1 de la page 46 est démontré dans le travail de M. T. Ważewski[3]).

[3]) T. Ważewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 14 (1936), p. 149-177.

Passons à la démonstration du théorème 2. Introduisons tout d'abord certaines notations et relations auxiliaires. Désignons par $V'=(v_1',\ldots,v_n')$, $V''=(v_1'',\ldots,v_n'')$ deux points complexes situés dans (r_z). Relions les par la droite

$$w=V'+t(V''-V')\qquad(t\text{ — paramètre réel})$$

qui évidemment est contenue dans (r_z).

Ecrivons

$$w_1=v_1'+t(v_1''-v_1')\overset{\text{df}}{=}\zeta_1(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n=v_n'+t(v_n''-v_n')\overset{\text{df}}{=}\zeta_n(t).$$

Notons

$$c_j(x,t)=\overline{y}_j\big(x,\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t)\big),$$
$$c_j(x,0)=\overline{y}_j(x,V'),$$
$$c_j(x,1)=\overline{y}_j(x,V'').$$

Alors pour x constant on a les relations

$$\overline{y}_j(x,V')-\overline{y}_j(x,V'')=c_j(x,0)-c_j(x,1)=-\int\limits_0^1\frac{\partial c_j(x,t)}{\partial t}\,dt,$$

où

$$\frac{\partial c_j(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\overline{y}_j\big(x,\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t)\big)}{\partial v_k}\zeta_k'(t)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\overline{y}_j\big(x,\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t)\big)}{\partial v_k}(v_k''-v_k').$$

On démontrera le théorème 2 par l'impossible. Supposons, pour parvenir à une contradiction, que pour deux paramètres différents $V'\neq V''$ appartenant à (r_z) on ait $\overline{y}_j(x,V')-\overline{y}_j(x,V'')=0$. Alors

$$0=\overline{y}_j(x,V')-\overline{y}_j(x,V'')=\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\overline{y}_j\big(x,\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t)\big)}{\partial v_k}(v_k'-v_k'')\,dt.$$

Il en résulte ainsi que de (54)

$$0=\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}\big(\delta_{jk}+\varepsilon_{jk}(x,v)\big)(v_k'-v_k'')\,dt\qquad(j=1,2,\ldots,n),$$
$$0=\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{jk}(x,v)(v_k'-v_k'')\,dt+\int\limits_0^1(v_j'-v_j'')\,dt,$$
$$0=(v_j'-v_j'')+\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{jk}(x,v)(v_k'-v_k'')\,dt,$$
$$v_j''-v_j'=\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{jk}(x,v)(v_k'-v_k'')\,dt,$$

d'où

$$|v_j'-v_j''|=|\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{jk}(x,v)(v_k'-v_k'')\,dt|$$

$$\leqslant\int_0^1\sum_{k=1}^{n}|\varepsilon_{jk}(x,v)|\,|v_k'-v_k''|\,|dt|<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|v_k'-v_k''|,$$

donc

$$|v_j'-v_j''|<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|v_k'-v_k''|\qquad(j=1,2,\ldots,n).$$

En additionnant côté par côté les inégalités ci-dessus à partir de $j=1$ jusqu'à $j=n$ on a la contradiction suivante:

$$\sum_{j=1}^{n}|v_j'-v_j''|<\sum_{k=1}^{n}|v_k'-v_k''|,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Dans le domaine des variables complexes P la transformation

(55) $$x=x,\qquad y_j=\overline{y}_j(x,v)\qquad(j=1,2,\ldots,n)$$

change (P) en un domaine $E(R_z)$. Cette transformation admet une, et une seule, transformation inverse

(56) $$x=x,\qquad v_j=v_j(x,y_1,\ldots,y_n)\qquad(j=1,2,\ldots,n)$$

ce qui résulte du théorème auxiliaire 2. La transformation inverse est une suite de fonctions analytiques pour toutes les variables complexes de l'ensemble $E(R_z)$.

En substituant (56) à $\overline{z}(x,v_1,\ldots,v_n)$ on obtient la fonction $\Psi(x,y_1,\ldots,y_n)$ définie pour tous les points de $E(R_z)$. La fonction $\Psi(x,y_1,\ldots,y_n)$ est analytique dans $E(R_z)$ et représente l'intégrale de l'équation (1) qui, pour $x=x_0$, se réduit à la fonction

$$\Psi(x_0,y_1,\ldots,y_n)=\varphi(y_1,\ldots,y_n).$$

III. Pour la démonstration définitive de notre théorème, il faut encore prouver que l'ensemble (B) est entièrement contenu dans $E(R_z)$.

Théorème auxiliaire. *Supposons que le point V est*

1° *contenu dans l'ensemble $|v_i-y_i^0|\leqslant k$,*

2° *qu'il n'est pas situé à l'intérieur de l'ensemble (r_z). Désignons par Δ le plus grand cercle fermé de centre x_0, dans lequel les fonctions $\overline{y}_i(x,V)$ sont définies pour x (par exemple pour $|x-x_0|\leqslant a$). Sous ces hypothèses le point*

(57) $$\overline{y}_i(x,v),\ldots,\overline{y}_n(x,v)$$

n'appartient pas à la section $s(x)$ si le point x est différent de x_0 et contenu dans Δ.

Démonstration. D'après les hypothèses, une au moins des inégalités $|v_i-y_i^0|<k/(4n(M+1))$ n'est pas satisfaite. Supposons pour la démonstration que ceci n'a pas lieu pour un a constant choisi parmi les nombres $1,2,\ldots,n$. Donc

(58) $$|v_a-y_a^0|\geqslant\frac{k}{4n(M+1)}.$$

Admettons pour parvenir à une contradiction que, pour un certain ζ $(\zeta\neq x_0)$ de l'entourage Δ, le point (57) appartient à $s(\zeta)$, c'est-à-dire qu'ont lieu les inégalités

$$|\overline{y}_i(\zeta,V)-y_i^0|\leqslant\frac{k}{4n(M+1)}-M|\zeta-x_0|\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

Donc en particulier pour

(59) $$|\overline{y}_a(\zeta,V)-y_a^0|\leqslant\frac{k}{4n(M+1)}-M|\zeta-x_0|.$$

Mais la fonction $\overline{y}_1(x,V)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d\overline{y}_a(x,V)}{dx}=-Q_a,\quad\text{donc}\quad\left|\frac{d\overline{y}_a(x,V)}{dx}\right|=|Q_a|.$$

Posons $M_1=\max|Q_a|$ sur Δ. Il résulte de (5) que

(60) $$|Q_a|\leqslant M_1<M$$

sur Δ. Fixons le point V et relions sur le plan de la variable complexe x les points ζ et x_0 par la droite $X(t)=x_0+(\zeta-x_0)t$. Alors le segment de cette droite déterminé par $0\leqslant t\leqslant 1$ est situé dans Δ et

(61) $$\overline{y}_a(\zeta,V)-\overline{y}_a(x_0,V)=\int_0^1\frac{\partial\overline{y}_a(X(t),V)}{\partial t}\,dt=\int_0^1\frac{\partial\overline{y}_a(X(t),V)}{\partial x}(\zeta-x_0)\,dt.$$

On obtient donc de (60) et (61)

$$|\overline{y}_a(\zeta,V)-\overline{y}_a(x_0,V)|\leqslant M_1|\zeta-x_0|,$$

c'est-à-dire

(62) $$|\overline{y}_a(\zeta,V)-V_a|\leqslant M_1|\zeta-x_0|.$$

Il résulte de (57) et (62) une contradiction avec l'inégalité (58)

$$|y_a^0-v_a|\leqslant|y_a^0-\overline{y}_a(\zeta,V)|+|\overline{y}_a(\zeta,V)-v_a|$$

$$\leqslant\frac{k}{4n(M+1)}-(M-M_1)|\zeta-x_0|<\frac{k}{4n(M+1)},$$

ce qui achève la démonstration du théorème auxiliaire.

Revenant au théorème essentiel de la troisième partie, il faut démontrer que l'ensemble (B) est contenu entièrement dans l'ensemble $E(R_z)$. Dans ce but, on démontrera que la borne supérieure des nombres ϱ de l'intervalle $0 \leqslant \varrho \leqslant \delta$ tels que l'ensemble $\left(\bar{S}(\varrho)\right)$

$$|x-x_0| \leqslant \varrho, \qquad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)} - M|x-x_0|$$

soit contenu dans $E(R_z)$ est égale à δ.

En effet, l'ensemble des valeurs numériques des rayons ϱ', pour lesquels $\bar{S}(\varrho')$ est entièrement contenu dans $E(R_z)$, a une borne supérieure dans l'ensemble $0 \leqslant \varrho \leqslant \delta$, car il n'est pas vide puisqu'il contient le nombre $\varrho = 0$. Supposons que ϱ_0' remplisse ces conditions et que $\varrho_0' < \delta$. Alors

1⁰ pour tous les nombres ζ tels que $|\zeta - x_0| < \varrho_0'$

$$S(\zeta) \subset E(R_z),$$

2⁰ pour tous les ζ situés sur la circonférence du cercle de rayon ϱ_0' et de centre x_0, c'est-à-dire pour les ζ tels que $|\zeta - x_0| = \varrho_0'$, les $S(\zeta)$ correspondant à ces valeurs sont contenus dans $E(R_z)$, car ce dernier est un ensemble fermé, et $S(\zeta) \subset E(R_z)$ pour tous les ζ arbitrairement proches de la circonférence $|\zeta - x_0| = \varrho_0'$.

Considérons à présent la circonférence $|\zeta - x_0| = \varrho_0'$. Choisissons sur elle le point complexe $\zeta = \zeta'$. Alors $S(\zeta') \subset E(R_z)$, donc il existe un v^0, appartenant à l'ensemble (r_z), tel que la bande $L(v^0)$ passe par le point $(\zeta', y_1^0, \ldots, y_n^0)$. Mais, du fait que la bande $L(v^0)$ est continue par rapport à ζ et que ζ' est un point intérieur de l'entourage $|\zeta - x_0| \leqslant \delta$, on a directement qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous les ζ qui satisfont à la condition

$$|\zeta' - \zeta| \leqslant \varepsilon$$

$S(\zeta) \cdot E(R_z)$ n'est pas un ensemble vide.

On démontrera que pour les ζ qui vérifient la condition $|\zeta - \zeta'| \leqslant \varepsilon$, $S(\zeta) \subset E(R_z)$. Supposons, pour parvenir à une contradiction, que $S(\zeta) - E(R_z)$ ne soit pas vide. Il existe alors au moins un point $Y^{(1)}$ qui appartienne au produit $S(\zeta) \cdot E(R_z)$, et dans chaque entourage duquel il existe des points appartenant à $S(\zeta) - E(R_z)$. Puisque $Y^{(1)}$ appartient à $E(R_z)$, il existe un point $V^{(1)}$ dans l'ensemble (r_z) tel que $Y^{(1)} = Y(\zeta, V^{(1)})$. Mais $Y^{(1)}$ appartient aussi à $S(\zeta)$, donc $V^{(1)}$ est un point intérieur de l'ensemble (r_z) et comme tel il passe, par la transformation ci-dessus, également en un point intérieur de l'ensemble $E(R_z)$, ce qui est en contradiction avec le fait que $Y^{(1)}$ est un point au bord de $E(R_z)$.

Ainsi donc, pour ζ' arbitrairement choisi sur la circonférence $|\zeta - x_0| = \varrho_0'$ on a trouvé un entourage fermé de rayon $\varepsilon > 0$, tel que pour chaque ζ appartenant à cet entourage, le $S(\zeta)$ qui correspond à ce ζ est contenu dans $E(R_z)$. La circonférence $|\zeta - x_0| = \varrho_0'$ est un ensemble borné et fermé. On peut entourer chaque point, d'une telle circonférence, d'un cercle ouvert d'un certain rayon $\varepsilon_\zeta > 0$, remplissant les conditions antérieures. Entourons ces points de cercles de rayon $\varepsilon_\zeta/3$, concentriques aux précédents. Il résulte du théorème de Heine-Borel sur le recouvrement d'un tel ensemble par un nombre arbitraire d'ensembles ouverts, qu'il suffit d'un nombre fini de cercles de rayons $\varepsilon_\zeta/3$ pour recouvrir la circonférence. Donc, d'autant plus, cette circonférence sera recouverte par un nombre fini de cercle de rayon $\varepsilon_\zeta/3$. Ces derniers avec leurs circonférences formeront un ensemble fermé qui, ajouté à $|\zeta - x_0| \leqslant \varrho_0$ donnera un ensemble fermé à l'intérieur duquel se trouve par exemple le cercle de rayon $\varrho = \varrho_0' + \varepsilon/4$, où ε désigne le plus petit des rayons ε_ζ. Mais il résulte des considérations antérieures que pour tous les ζ appartenant à ce cercle, c'est-à-dire satisfaisant à l'inégalité

$$|\zeta - x_0| \leqslant \varrho_0' + \frac{1}{4}\varepsilon$$

les $S(\zeta)$, qui leur correspondent, sont contenus dans $E(R_z)$. On est ainsi parvenu à une contradiction, car ϱ_0' est le plus grand rayon dont les propriétés sont telles que $S(\zeta) \subset E(R_z)$.

De cette manière la troisième partie de la démonstration, qui consistait à prouver l'existence d'une intégrale régulière dans l'ensemble (B), vérifiant dans ce dernier l'équation (1) et se réduisant pour $x = x_0$ à la fonction $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$, est terminée.