Hence we deduce the following corollaries:

a. *All curves lying on a plane are B-straight.*

b. *The generatrices are the only B-straight lines on developable surfaces (the cylinder, the cone, the surface with an edge of regression).*

From Theorem 2 (chapter 2) we know that the curve C lying on a surface V_2 embedded in R_3 is B-plane if and only if the vector $\boldsymbol{B}$ or $\boldsymbol{T}_1$ (formula (69)) normal to the surface V_2 along this curve is parallel to a fixed plane, and is parallel to no fixed line, that is if the vector $\boldsymbol{T}_1$ ($\neq$const) is constantly orthogonal to a fixed vector $\boldsymbol{D}\neq 0$. It follows that the *envelope of the planes tangent to the surface V_2 along B-plane curve C is a cylinder circumscribed on V_2, since every two planes of this family intersect along a line parallel to a fixed vector $\boldsymbol{D}$.*

The above proposition implies the following corollaries:

c. *On a cylindrical surface every curve different from a generatrix is B-plane.*

d. *There are no B-straight lines on a conical surface and on a surface with an edge of regression, since the envelope of planes tangent along an arbitrary curve, different from a generatrix, is identical with the surface itself. All curves lying on these surfaces (except the generatrices) are B-skew.*

From the above considerations, we see that the knowledge of the rank of B-skewness of a curve lying on developable surfaces does not enable us to decide whether the curve lies on a conical surface or on a surface with an edge of regression.

The subject of this paper has been suggested to me by S. Gołąb. I wish to express my sincere gratitude to him for his helpful advice and, criticism during the preparation of this paper.

References

[1] S. Gołąb, *Über die affinen Inwarianten einer Kurve der X_p, die in einem L_n eingebettet ist*, Труды Семинара по векторному и тензорному анализу, IV, Москва 1937.

[2] — *Généralisations des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire des dimensions*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22 (1949), p. 128-138.

[3] V. Hlavatý, *Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connesione lineare generale*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 53 (1929), p. 365-388.

[4] A. Scheffers, *Anwendungen der Differenzial und Integralrechnung auf Geometrie*, Bd. I, p. 376.

[5] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differenzialgeometrie*, Groningen-Batavia 1935.

Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'un système involutif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

par W. Pawelski (Gdańsk)

Considérons le système d'équations

(1) $$\frac{\partial z}{\partial t_\alpha}+H_\alpha\left(t_\beta,x_i,\frac{\partial z}{\partial x_i},z\right)=0 \qquad (\alpha,\beta=1,2,\dots,m;\quad i=1,2,\dots,n)$$

pour lequel a lieu la condition de compatibilité

(2) $$\frac{\partial H_\beta}{\partial t_\alpha}-H_\alpha\frac{\partial H_\beta}{\partial z}-\frac{\partial H_\alpha}{\partial t_\beta}+H_\beta\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_\beta}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial H_\beta}{\partial z}\right)-\frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right)\right\}\equiv 0.$$

Supposons que les fonctions H_α de variables réelles t_α, x_i, q_i, z soient de classe C^2 dans l'ensemble

(3) $$|t_\alpha-t_\alpha^0|\leqslant c,\qquad |x_i-x_i^0|\leqslant c,\qquad |z-z_0|\leqslant c,\qquad |q_i-q_i^0|\leqslant c.$$

Soit

(4) $$\omega(x_1,\dots,x_n)$$

une fonction de classe C^1 dans le cube $|x_i-x_i^0|\leqslant c$. Désignons par M le nombre constant positif tel que

$$1^0\quad |H_\alpha|<M,\qquad \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right|<M,$$

$$\left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial z^2}\right|<M,$$

(5) $$\left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial q_i\partial q_j}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i\partial z}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial z\partial q_i}\right|<M,$$

$$\left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i\partial q_j}\right|<M,$$

$$2^0 \quad \left|\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right| < M, \qquad \left|\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| < M \quad \textit{dans le cube } (3);$$

$$3^0 \quad |q_i^0| < M.$$

Supposons encore les deux inégalités

$$(6) \qquad |\omega(x_i^0) - z_0| < \frac{c}{4}, \qquad |\omega_{x_i}(x_i^0) - q_i^0| < \frac{c}{4}.$$

Sous toutes ces hypothèses le système (1) *n'a qu'une, et une seule, intégrale* $z(t_a, x_i)$ *de classe* C^1 *dans l'ensemble* R

$$|t_a - t_a^0| < \varrho_0, \qquad |x_i - x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)} - M\sum_{a=1}^{m}|t_a - t_a^0|$$

où $\varrho_0 = \min\left\{\delta, \frac{1}{m}, \varrho_1\right\}$, $\delta = \frac{c^2}{[(n+1)(M+c+1)]^5}$, $\varrho_1 = \frac{c}{4n(M+1)\,Mm}$,

qui se réduit à la fonction $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ *dans l'ensemble*

$$r\left\{t_a = t_a^0,\ |x_i - x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)}\right\}.$$

La démonstration du théorème ci-dessus se compose de trois parties.

Dans la première est démontré un théorème auxiliaire qui est d'une valeur essentielle pour la démonstration du théorème en question.

Dans la seconde se trouve exposée la méthode classique de résolution de l'équation (10).

Dans la troisième le théorème énoncé au début est établi.

I. La recherche de l'intégrale du système (1) se réduit à l'aide de la transformation de Mayer à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons la transformation

$$(7) \qquad T\{t_a = t_a^0 + t\mu_a\}.$$

En admettant

$$(8) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\mu_a| \leqslant c,$$

il suit de (7) et (8) que $|t_a - t_a^0| \leqslant c$.

A l'aide de la transformation T le système (1) deviendra le suivant:

$$(9) \qquad \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{a=1}^{m} H_a\mu_a = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \mu_a} + tH_a = 0.$$

Occupons-nous pour le moment de la première équation du système (9)

$$(10) \qquad \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{a=1}^{m} H_a\left(t_a^0 + t\mu_a, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right)\mu_a = 0,$$

où μ_a sont considérés comme étant des paramètres. Introduisons la notation suivante pour le second terme de l'équation (10)

$$(11) \qquad F\left(t, \mu_a, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{a=1}^{m} H_a\mu_a.$$

En se référant aux hypothèses citées au commencement de ce travail, on trouve les hypothèses relatives à l'équation (10).

La fonction F est de classe C^2 dans l'ensemble

$$(12) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad |x_i - x_i^0| \leqslant c, \quad |z - z_0| \leqslant c, \quad |q_i - q_i^0| \leqslant c, \quad |\mu_a| \leqslant c.$$

Soit $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de classe C^2 dans le cube

$$(13) \qquad |x_i - x_i^0| \leqslant c.$$

Désignons par ϱ le nombre positif tel que

$$(14) \qquad \varrho < \frac{1}{m}, \qquad \varrho \leqslant c,$$

et supposons que $|\mu_a| < \varrho$. En tenant alors compte de (14) et de (5) on obtient les hypothèses

$$(15) \quad \text{toutes les fonctions: } |F|, \left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial q_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|, \left|\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial q_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial q_j}\right|, \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial z}\right| \quad \text{sont} \leqslant M\sum_{a=1}^{m}|\mu_a|,$$

$$(16) \qquad \left|\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right| < M, \qquad \left|\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| < M$$

dans le cube (4).

Evidemment $M\sum_{a=1}^{m}|\mu_a| < Mm\varrho < M$.

Supposons en outre que

$$(17) \qquad |q_i^0| < M,$$

$$(18) \qquad |\omega(x_i^0) - z_0| < \frac{c}{4}, \qquad |\omega_{x_i}(x_i^0) - q_i^0| < \frac{c}{4}.$$

Nous affirmons que *l'équation* (10) *n'a qu'une, et une seule, intégrale* $z(t,x_i,\mu_a)$ *de classe* C^1 *dans l'ensemble* R'

$$0\leqslant t\leqslant 1,\qquad |x_i-x_i^0|\leqslant \frac{c}{4n(M+1)}-\Big(M\sum_{a=1}^{m}|\mu_a|\Big)t,\qquad |\mu_a|<\varrho_0$$

qui se réduit à la fonction $\omega(x_1,\dots,x_n)$ *dans l'ensemble*

$$\Big\{t=0,\ |x_i-x_i^0|\leqslant\frac{c}{4n(M+1)}\Big\}.$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle d'un théorème semblable énoncé par M. T. Ważewski[1]). Les petites différences qui existent entre ces deux théorèmes se présentent avant tout dans les hypothèses, et elles sont dues à l'introduction chez nous des paramètres μ_a. Nous ne donnons pas ici la démonstration de notre théorème qui ne serait qu'une répétition de celle de M. T. Ważewski. Il faut indiquer néanmois qu'en deux entroits ϱ devra être considéré temporairement comme variable.

1° A la page 156 du travail de M. T. Ważewski[1]) la fonction Φ prendra la forme

$$\Phi_0(\varrho,t)=\frac{c}{2}+n\Big(1+M+\frac{c}{2}\Big)(e^{(M+1)m\varrho t}-1).$$

La fonction $\Phi_0(\varrho,t)$ pour $\varrho\leqslant\alpha$ de (26) et pour $0\leqslant t\leqslant 1$ vérifiera une inégalité analogue à l'inégalité (25).

2° Il en sera de même avec la fonction φ dans l'appréciation du jacobien à la page 164 du travail de M. T. Ważewski. Il sera chez nous

$$\varphi_0(\varrho,t)=b(e^{a'\varrho t}-1),$$

où

$$a'=Mm[2n(1+M+c)+1],\qquad b=1+(n+1)M.$$

Les mêmes propriétés que $\varphi(t)$ aura la fonction $\varphi_0(\varrho,t)$ pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et $\varrho<\gamma$, où γ est obtenu de (42) (page 164 du travail cité de M. T. Ważewski). Par contre, la démonstration de l'unicité dans notre théorème résulte directement du théorème de Haar (mentionné dans la démonstration de l'unicité pour le système de Jacobi) et du fait que

$$\varrho_0\leqslant\frac{c}{4n(M+1)Mm}.$$

[1]) T. Ważewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 14 (1935), p. 149-177.

II. Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial H_a}{\partial q_i}\mu_a,\qquad \frac{dq_i}{dt}=-\sum_{a=1}^{m}\Big(\frac{\partial H_a}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial H_a}{\partial z}\Big)\mu_a,$$
$$\frac{dz}{dt}=\sum_{a=1}^{m}\Big(-H_a+\sum_{j=1}^{m}q_j\frac{\partial H_a}{\partial q_j}\Big)\mu_a, \tag{19}$$

où les fonctions H_a sont traitées comme étant composées avec la substitution de Mayer, et le système de ses intégrales

$$x_i(t,\mu_a,v_i),\qquad q_i(t,\mu_a,v_i),\qquad z(t,\mu_a,v_i) \tag{20}$$

passant par le point

$$t=0,\qquad x_i^*=v_i,\qquad q_i^*=\frac{\partial\omega(v_1,\dots,v_n)}{\partial v_i},\qquad z^*=\omega(v_1,\dots,v_n),$$

et définies dans l'ensemble

$$0\leqslant t\leqslant 1,\qquad |v_i-x_i^0|\leqslant\frac{c}{4n(M+1)},\qquad |\mu_a|<\varrho_0. \tag{21}$$

La méthode classique de recherche de l'intégrale $z(t,\mu_a,x_i)$ pour l'équation (10) consiste à résoudre, par rapport à $v_1,\dots,v_n$, le système d'équations $x_i=x_i(t,\mu_a,v_i)$ et à substituer ensuite les valeurs $v_1,\dots,v_n$ ainsi obtenues à la fonction $z(t,\mu_a,v_i)$.

III. Passons à présent à la résolution du probléme posé au début. Nous allons démontrer que le système d'intégrales (20) satisfaisant aux équations (19) vérifie aussi les équations

$$\frac{dx_i}{d\mu_a}=t\frac{\partial H_a}{\partial q_i},\qquad \frac{dq_i}{d\mu_a}=-t\Big(\frac{\partial H_a}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial H_a}{\partial z}\Big),$$
$$\frac{dz}{d\mu_a}=t\Big(-H_a+\sum_{j=1}^{n}q_j\frac{\partial H_a}{\partial q_j}\Big), \tag{22}$$

où H_a sont également composées avec la substitution de Mayer.

Nous allons démontrer que les termes du côté gauche et ceux du côté droit de l'équation (22) vérifient séparément un certain système d'équations différentielles ordinaires linéaires; cela constituera une preuve de l'identité des termes de chaque côté de (22) lorsque ces termes sont des intégrales ayant le même point initial.

Les termes de chaque côté de (22) satisfont au système d'équations différentielles ordinaires

$$(23)\quad \frac{dW_i^1}{dt}=\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}+t\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_i\partial t_\alpha}\mu_\beta+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_i\partial x_j}\mu_\beta\Big\}W_j^1+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_i\partial q_j}\mu_\beta\Big\}W_j^2+\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_i\partial z}\mu_\beta\Big\}W^3,$$

$$(24)\quad \frac{dW_i^2}{dt}=-\Big\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\Big\}+t\sum_{\beta=1}^{m}\Big\{-\Big(\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial x_i\partial t_\alpha}+q_i\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial z\,\partial t_\alpha}\Big)\mu_\beta\Big\}-$$
$$-\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial H_\beta}{\partial z}\mu_\beta\Big\}W_i^2+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}-\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial x_i\partial x_j}\mu_\beta\Big\}W_j^1+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\Big[-q_i\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial z\,\partial x_j}\mu_\beta\Big]\Big\}W_j^1+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial x_i\partial q_j}-q_i\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial z\,\partial q_j}\Big)\mu_\beta\Big\}W_j^2+$$
$$+\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial x_i\partial z}-q_i\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial z^2}\Big)\mu_\beta\Big\}W^3,$$

$$(25)\quad \frac{dW^3}{dt}=-H_\alpha+\sum_{j=1}^{n}q_j\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_j}+t\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-\frac{\partial H_\beta}{\partial t_\alpha}+\sum_{j=1}^{n}q_j\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_j\partial t_\alpha}\Big)\mu_\beta+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-\frac{\partial H_\beta}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}q_j\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_j\partial x_k}\Big)\mu_\beta\Big\}W_k^1+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial H_\beta}{\partial q_j}\mu_\beta\Big\}W_k^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-\frac{\partial H_\beta}{\partial q_k}+\sum_{j=1}^{n}q_j\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_j\partial q_k}\Big)\mu_\beta\Big\}W_k^2+$$
$$+\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}\Big(-\frac{\partial H_\beta}{\partial z}+\sum_{j=1}^{n}q_j\frac{\partial^2 H_\beta}{\partial q_j\partial z}\Big)\mu_\beta\Big\}W^3.$$

À W_i^1, W_i^2, W^3 il faut substituer successivement $dx_i/d\mu_\alpha$, $dq_i/d\mu_\alpha$, $dz/d\mu_\alpha$ puis les termes du côté droit de (22). On obtient la vérification du système

d'équations (23)-(25) par les termes du côté gauche de (22) en différenciant le système (19) comme des identités par rapport à μ_α.

Les termes à droite dans (22) satisfont aux équations (23)-(25) si l'on se réfère au système (19) et à la condition (2) qu'il faut différencier par rapport à x_i, q_i, z. D'après la forme des équations (23)-(25) on voit que les fonctions qui figurent dans les côtés droits de celles-ci sont linéaires par rapport à W_i^1, W_i^2, W^3.

Les fonctions $dx_i/d\mu_\alpha$, $dq_i/d\mu_\alpha$, $dz/d\mu_\alpha$ sont égales à 0 pour $t=0$, car alors $x_i(0)=v_i$, $q_i(0)=\partial\omega/\partial v_i$, $z(0)=\omega(v_1,\ldots,v_n)$. De même les termes du côté droit de (22) sont nuls pour $t=0$. Il en résulte que le système d'intégrales (20) satisfait aux équations (22).

Il a donc été prouvé que chaque bande intégrale pour l'équation (10) passant par le point

$$t=0,\qquad x_i^*=v_i,\qquad q_i^*=\frac{\partial\omega}{\partial v_i},\qquad z^*=\omega$$

est une bande caractéristique pour l'équation

$$(26)\qquad \frac{\partial z}{\partial\mu_\alpha}+tH_\alpha\Big(t_\beta^0+t\mu_\beta, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\Big)=0.$$

Dans la dernière équation les variables $\mu_\alpha, x_1,\ldots,x_n$ sont indépendantes (pour α fixe) et $t, \mu_\beta\neq\mu_\alpha$ sont considérés comme des paramètres. Ainsi le côté gauche de l'équation (26) a une valeur constante le long de cette bande et admet la valeur 0 pour $t=0$, car

$$\frac{\partial z}{\partial\mu_\alpha}=\frac{\partial\omega(v_1,\ldots,v_n)}{\partial\mu_\alpha}=0\quad(\text{pour } t=0)\qquad\text{et}\qquad tH_\alpha=0\quad(\text{pour } t=0).$$

Donc cette bande est aussi une bande intégrale pour l'équation (26), ce qui permet d'affirmer que l'intégrale de l'équation (10) satisfait aussi à l'équation (26) dans son domaine d'existence. L'intégrale de l'équation (10) a la forme $z(t, x_i, \mu_\alpha)$. Posons y $t=1$; il résulte alors de (26) et de T que la fonction $z(1, x_i, t_\alpha-t_\alpha^0)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t_\alpha}+H_\alpha\Big(t_\beta, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\Big)=0$$

dans l'ensemble R et se réduit à $\omega(x_1,\ldots,x_n)$ dans l'ensemble r. Mais α était choisi arbitrairement, donc la fonction $z(1, x_i, t_\alpha-t_\alpha^0)$ est la solution recherchée du système (1).

Supposons que $z_1(t_a, x_i)$ et $z_2(t_a, x_i)$ sont des solutions du système (1) admettant pour $t_a = t_a^0$ les valeurs $\omega(x_1, \ldots, x_n)$. Les fonctions z_1 et z_2 sont de classe C^1 dans l'ensemble R. A l'aide de la transformation T elles se changent en fonctions $z_1(t_a^0 + t\mu_a, x_i)$ et $z_2(t_a^0 + t\mu_a, x_i)$ qui sont des solutions de l'équation (10) dans l'ensemble R' et y sont identiques. En posant $t=1$ on obtient que les fonctions $z_1(t_a^0, x_i)$ et $z_2(t_a, x_i)$ sont identiques dans l'ensemble R. Ainsi l'unicité des solutions du système (1) dans l'ensemble R est établie.

Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de variables complexes

par W. Pawelski (Gdańsk)

Considérons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right) \tag{1}$$

u celle-ci, sous une forme abregée,

$$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n). \tag{2}$$

Supposons que la fonction $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *soit analytique par oapport à toutes ses variables dans l'ensemble* (A)

$$|x - x_0| \leqslant k, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant k, \quad |z - z_0| \leqslant k, \quad |q_i - q_i^0| \leqslant k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

et que $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ *soit une fonction analytique pour*

$$|y_i - y_i^0| \leqslant k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Supposons ensuite que la valeur absolue de la fonction $f(x, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ *soit plus petite que* M, *de même que les valeurs absolues de ses premières et deuxièmes (mixtes) dérivées;*

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right| < M, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}\right| < M \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$|q_i^0| < M, \tag{6}$$

$$|\varphi(y_1^0, \ldots, y_n^0) - z_0| < \frac{k}{4}, \quad |\varphi_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{k}{4}. \tag{7}$$

Sous toutes ces hypothèses l'équation (1) *n'a qu'une, et une seule, intégrale* $z(x, y_1, \ldots, y_n)$ *analytique dans l'ensemble* (B)

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)} - M|x - x_0| \tag{8}$$