Problème aux limites d'Hilbert généralisé

par W. Pogorzelski (Warszawa)

Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble de p lignes fermées de Jordan $L_1, L_2, \ldots, L_p$ sans points communs et entourant les domaines disjoints $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$. Soit en outre une ligne fermée de Jordan L_0 entourant toutes les lignes précédentes. Désignons par S_0^- le domaine infini situé à l'extérieur de la ligne L_0 et par S^+ le domaine limité par la ligne L_0 et les lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$. Dans le travail [1] est posé le problème suivant: *trouver le système de fonctions de variable complexe* $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_m(z)$ *dont chacune serait holomorphe dans les domaines* $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$ *séparément et dont les valeurs limites* $\Phi_a^+(t), \Phi_a^-(t)$ *concernant les domaines* S^+, S_ν^- *satisferaient en tout point* t *de l'ensemble* $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_p$ *aux relations*

$$\Phi_a^+(t) = G_a(t)\Phi_a^-(t) + \lambda F_a[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_m^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots, \Phi_m^-(t)] \tag{1}$$

$(a = 1, 2, \ldots, m)$ *où* $G_a(t)$ *sont des fonctions déterminées sur les lignes* L *et* $F_a(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2m})$ *des fonctions données de* $2m+1$ *arguments.*

Dans le travail cité ce problème est résolu sous l'hypothèse que les fonctions G_a, F_a soient holomorphes dans certaines bandes comprenant les lignes L_ν. Ici nous allons traiter le problème d'Hilbert (1) sous les hypothèses plus générales suivantes:

I. Les fonctions complexes $G_a(t)$ sont déterminées sur l'ensemble L et vérifient la condition d'Hölder

$$|G_a(t) - G_a(t')| < k|t - t'|^\mu;$$

en outre elles admettent des valeurs différentes de zéro.

II. Les fonctions $F_a(t, u_1, \ldots, u_{2m})$ sont déterminées dans la région

$$t \in L, \qquad |u_\nu| \leqslant R \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{2}$$

où elles vérifient la condition d'Hölder par rapport à la variable t et la condition de Lipschitz par rapport aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$.

III. Les lignes $L_0, L_1, \ldots, L_p$ ont des tangentes continues en tout point.

D'après les travaux de Gachov [2], de Hvédelidzé [3] et le travail de Pogorzelski [1], nous pouvons affirmer, sous les hypothèses I, II, III, que les formules

$$\Phi_a(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} X_a(z) \int_L \frac{F_a[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{X_a^+(\tau)(\tau - z)} d\tau + X_a(z) P_a(z) \tag{3}$$
$$(a = 1, 2, \ldots, m)$$

donnent la solution du problème, si les fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)$, vérifiant la condition d'Hölder, satisfont au système d'équations intégrales singulières (intégrales au sens de Cauchy) en tout point t de L:

$$\varphi_a(t) = \lambda F_a^*[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)] + f_a(t) + \tag{4}$$
$$+ \lambda \int_L \frac{F_a^{**}[t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{\tau - t} d\tau \qquad (a = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Les fonctions F_a^*, F_a^{**}, f_a sont déterminées dans la région (2) par les formules

$$F_a^*(t, u_1, \ldots, u_{2m}) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_a(t, u_1, \ldots, u_{2m}), & \text{si } a = 1, 2, \ldots, m, \\ -\frac{1}{2} \frac{X_{a-m}^+(t)}{X_{a-m}^-(t)} F_{a-m}(t, u_1, \ldots, u_{2m}), & \text{si } a = m+1, \ldots, 2m, \end{cases} \tag{5}$$

$$F_a^{**}(t, \tau, u_1, \ldots, u_{2m}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \frac{X_a^+(t)}{X_a^+(\tau)} F_a(\tau, u_1, \ldots, u_{2m}), & \text{si } a = 1, 2, \ldots, m, \\ \frac{1}{2\pi i} \frac{X_{a-m}^-(t)}{X_{a-m}^+(\tau)} F_{a-m}(\tau, u_1, \ldots, u_{2m}), & \text{si } a = m+1, \ldots, 2m, \end{cases}$$

$$f_a(t) = \begin{cases} X_a^+(t) P_a(t), & \text{si } a = 1, 2, \ldots, m, \\ X_{a-m}^-(t) P_{a-m}(t), & \text{si } a = m+1, \ldots, 2m. \end{cases}$$

$P_a(z)$ sont des fonctions entières, arbitrairement choisies; $X_a^+(t), X_a^-(t)$ les valeurs limites (correspondant aux domaines S^+ et S_ν^-) des fonctions $X_a(z)$ dites *solutions canoniques* du problème d'Hilbert homogène et données par les formules

$$X_a(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Pi_a(z)} \exp \Gamma_a(z), & \text{si } z \in S^+, \\ z^{-\varkappa_a} \exp \Gamma_a(z), & \text{si } z \in S^-. \end{cases} \tag{6}$$

La lettre $\varkappa_a$ désigne un nombre entier dit *index* du problème d'Hilbert qui est égal à la somme

$$\varkappa_a = \sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu$$

où $2\pi\lambda_\nu = [\arg G_a(t)]_{L_\nu}$ est l'accroissement qu'éprouve l'argument du nombre complexe $G_a(t)$ lorsque le point t décrit la ligne fermé L_ν dans le sens positif pour $\nu=0$ et dans le sens négatif pour $\nu=1,2,\ldots,p$. On a en outre

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\Pi_a(z) = (z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\ldots(z-a_p)^{\lambda_p},\\ &G_a^{(0)}(t) = t^{-\varkappa_a}\Pi_a(t)G_a(t),\\ &\Gamma_a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G_a^{(0)}(t)}{t-z}\,dt \end{aligned}$$

où a_ν est un point arbitrairement choisi à l'intérieur du domaine S_ν^- et le point $z=0$ se trouve à l'intérieur du domaine S^+.

On est donc amené à résoudre le système d'équations intégrales (4).

Le raisonnement qui suit est basé sur la propriété importante de l'intégrale du type de Cauchy

$$(8)\qquad \psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

démontrée par Plemelj et ensuite plus rigoureusement par Privalov [4]. Notamment, si $\varphi(t)$ est une fonction complexe déterminée en tout point t des lignes L et satisfaisant à la condition d'Hölder

$$(9)\qquad |\varphi(t)-\varphi(t')| < C|t-t'|^\mu$$

où l'exposant μ est inférieur à l'unité, la fonction $\psi(z)$ admet les valeurs limites $\psi^+(t)$ et $\psi^-(t)$ (correspondant aux domaines S^+ et S^-) en tout point t des lignes L, satisfaisant aussi à la condition d'Hölder de la forme

$$(10)\qquad |\psi^\pm(t)-\psi^\pm(t')| < KC|t-t'|^\mu$$

avec le même exposant $\mu<1$ que la fonction $\varphi(t)$; en outre le coefficient K ne dépend que de la forme géométrique des lignes L. La valeur de l'intégrale (7) au point t sur les lignes L est une intégrale impropre au sens de Cauchy et est égale à la moyenne arithmétique des valeurs limites $\psi^\pm(t)$

$$(11)\qquad \psi(t) = \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{1}{2}\,[\psi^+(t)+\psi^-(t)].$$

La fonction (11) satisfait donc aussi à l'inégalité d'Hölder (10).

Supposons maintenant que l'exposant μ dans la condition d'Hölder, admise pour les fonctions G_a et F_a, est inférieur à l'unité. D'après les suppositions I et II, on a les inégalités

$$(12)\qquad \begin{aligned} &|G_a(t)-G_a(t')| < k|t-t'|^\mu,\\ &|F_a(t,u_1,\ldots,u_{2m})-F_a(t',u_1',\ldots,u_{2m}')| < A\,[|t-t'|^\mu + \sum_{\nu=1}^{2m}|u_\nu-u_\nu'|]. \end{aligned}$$

D'après la propriété admise pour les fonctions $G_a(t)$ et la propriété citée de l'intégrale de Cauchy, on conclut que les solutions canoniques $X_a(z)$, données par les formules (6) et (7), admettent en tout point t des lignes L les valeurs limites $X_a^\pm(t)$ qui satisfont à la condition d'Hölder avec l'exposant $\mu<1$

$$(13)\qquad |X_a^\pm(t)-X_a^\pm(t')| < B|t-t'|^\mu,$$

où le coefficient positif B ne dépend que des fonctions $G_a(t)$. On voit aussi, d'après les expressions (6) et (7), que les fonctions $X_a^\pm(t)$ sont partout différentes de zéro. Désignons par q et s les bornes positives de l'ensemble des modules de ces fonctions sur les lignes L

$$(14)\qquad 0 < q \leqslant |X_a^\pm(t)| \leqslant s.$$

Désignons encore par k_P le coefficient d'Hölder des fonctions $P_a(t)$ sur les lignes L

$$(15)\qquad |P_a(t)-P_a(t')| < k_P|t-t'|^\mu$$

et par M_F, M_P les bornes supérieures de l'ensemble des fonctions $|F_a|$ et $|P_a|$ dans la région (2) ou L

$$(16)\qquad |F_a| \leqslant M_F, \qquad |P_a(t| \leqslant M_P.$$

Les conditions (12) sont insuffisantes pour résoudre le système d'équations intégrales (4) par la méthode des approximations successives. On résoud donc le système (4) par l'application du théorème suivant de Schauder [5] sur le point invariant, fondé sur les propriétés topologiques de l'espace métrique: *Toute transformation continue d'un ensemble de points, convexe, borné et fermé dans un espace linéaire, normé et complet, en son sous-ensemble compact admet au moins un point invariant.*

Considérons un espace fonctionnel E composé de tous les systèmes de $2m$ fonctions continues complexes $U[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)]$ déterminées en tout point $t\epsilon L$. On définie la distance $\delta(U,V)$ de deux points

$$U[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)], \qquad V[g_1(t),\ldots,g_{2m}(t)]$$

de l'espace E par la somme des bornes supérieures

$$\delta(U,V)=\sum_{a=1}^{2m}\sup|\varphi_a(t)-g_a(t)| \tag{17}$$

et en prenant pour norme des points U la distance $\delta(U,\Theta)$ entre le point U et le point nul $\Theta(0,0,\ldots,0)$. D'après cette définition, la suite convergente de points U de E est une suite de systèmes de fonctions uniformément convergente et son point limite est composé des fonctions continues sur L, donc il appartient aussi à l'espace E. Par conséquent, cet espace est *complet* et *normé*; en outre il sera *linéaire* si nous définissons le produit du point U par le nombre réel γ et la somme de deux points U,V par les égalités

$$\gamma U=(\gamma\varphi_1,\gamma\varphi_2,\ldots,\gamma\varphi_{2m}),\qquad U+V=(\varphi_1+g_1,\varphi_2+g_2,\ldots,\varphi_{2m}+g_{2m}).$$

Considérons maintenant dans l'espace E l'ensemble $S(\varkappa,\mu)$ de tous les points $U(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{2m})$ satisfaisant à la condition

$$|\varphi_a|\leqslant R\qquad (a=1,2,\ldots,2m) \tag{18}$$

et à la condition d'Hölder

$$|\varphi_a(t)-\varphi_a(t')|\leqslant\varkappa|t-t'|^{\mu}\qquad(a=1,2,\ldots,2m) \tag{19}$$

où $\varkappa$ est une constante positive fixée arbitrairement et $\mu<1$ est l'exposant d'Hölder concernant les fonctions F_a dans les inégalités (12). L'ensemble $S(\varkappa,\mu)$ est fermé, puisque la suite convergente des points de cet ensemble tend vers un point limite qui vérifie aussi la condition (18) et la condition d'Hölder (19), donc qui appartient à cet ensemble. L'ensemble $S(\varkappa,\mu)$ est en outre *convexe*; en effet, si U et V sont deux points arbitraires de l'ensemble S, alors tous les points du segment rectiligne joignant ces points

$$\gamma U+(1-\gamma)V\qquad(0\leqslant\gamma\leqslant1)$$

satisfont aux conditions (18) et (19) et appartiennent à l'ensemble $S(\varkappa,\mu)$.

Appliquons maintenant à tous les points $U[\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)]$ de l'ensemble $S(\varkappa,\mu)$ une transformation fonctionnelle définie par les relations

$$\begin{aligned}\psi_a(t)&=\lambda F_a^*[t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)]+f_a(t)+\\&\quad+\lambda\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{2m}(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau\qquad(a=1,2,\ldots,2m).\end{aligned} \tag{20}$$

Cherchons la condition pour que le point transformé $(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{2m})$ appartienne à l'ensemble $S(\varkappa,\mu)$. Ecrivons à ce but l'intégrale dans la relation (20) sous la forme

$$\begin{aligned}\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{2m}(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau&=F_a^{**}[t,t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)]\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}+\\&+\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{2m}(\tau)]-F_a^{**}[t,t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)]}{\tau-t}\,d\tau.\end{aligned} \tag{21}$$

On a, d'après l'expression (5) et les inégalités (12), (13), (14), (16), (19)

$$\begin{aligned}&|F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{2m}(\tau)]-F_a^{**}[t,t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(\;)]|\\&\leqslant\frac{s}{2\pi q}A\left[|t-\tau|^{\mu}+\sum_{\nu=1}^{2m}|\varphi_\nu(t)-\varphi_\nu(\tau)|\right]+\frac{s}{2\pi q^2}BM_F|t-\tau|^{\mu}\\&\leqslant\frac{s}{2\pi q}\left[A(2m\varkappa+1)+\frac{B}{q}M_F\right]|t-\tau|^{\mu}.\end{aligned} \tag{22}$$

De là résulte la limitation suivante de l'intégrale (21):

$$\left|\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{2m}(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau\right|\leqslant\frac{s}{2q}\left[\frac{1}{\pi}AD(2m\varkappa+1)+M_F\left(1+\frac{BD}{\pi q}\right)\right], \tag{23}$$

D désignant la borne supérieure de l'intégrale $\int_L\frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}$. On en déduit que les composantes (20) du point transformé vérifient les inégalités

$$|\psi_a(t)|\leqslant|\lambda|\frac{s}{2q}\left[\frac{1}{\pi}AD(2m\varkappa+1)+M_F\left(2+\frac{BD}{\pi q}\right)\right]+M_Ps. \tag{24}$$

Ensuite, d'après la propriété citée (10) de l'intégrale de Cauchy et les inégalités (12), (13), (14), (15), (16), on en déduit que les composantes (20) du point transformé vérifient l'inégalité d'Hölder suivante

$$\begin{aligned}|\psi_a(t)-\psi_a(t')|&\leqslant(M_PB+sk_P)|t-t'|^{\mu}+\\&+\frac{|\lambda|s}{2\pi q^2}[Aq(\pi+Kq^2)(2m\varkappa+1)+(2\pi B+K)M_F+2ABD]|t-t'|^{\mu}.\end{aligned} \tag{25}$$

En s'appuyant sur les résultats (24) et (25), on conclut que la transformation (20) fait correspondre au point $U(\varphi_1,\ldots,\varphi_{2m})$ de l'ensemble S le point

$(\psi_1,\dots,\psi_{2m})$ de cet ensemble, si le module du paramètre λ et les constantes M_P, k_P concernant les fonctions $P_a(t)$ sont suffisamment petites pour que les inégalités suivantes aient lieu:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &|\lambda|\frac{s}{2q}\left[\frac{AD}{\pi}(2m\varkappa+1)+M_F\left(2+\frac{BD}{\pi q}\right)\right]+M_P s\leqslant R,\\ &(M_P B+sk_P)+\frac{|\lambda|s}{2\pi q^2}[Aq(\pi+Kq^2)(2m\varkappa+1)+(2\pi B+K)M_F+2ABD]\leqslant\varkappa. \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que la transformation (20) est *continue*, c'est-à-dire que si la suite de points $U_n(\varphi_1^{(n)},\dots,\varphi_{2m}^{(n)})$ de l'ensemble $S(\varkappa,\mu)$ converge vers le point $U(\varphi_1,\dots,\varphi_{2m})$ de cet ensemble, la suite de points transformés $V_n(\psi_1^{(n)},\dots,\psi_{2m}^{(n)})$ converge vers le point transformé $V(\psi_1,\dots,\psi_{2m})$ du point limite $U(\varphi_1,\dots,\varphi_{2m})$. Écrivons donc, d'après les expressions (20), les composantes des points transformés de la façon suivante:

$$(27)\qquad \begin{aligned} \psi_a(t)&=\lambda F_a^*[t,\varphi_1,\dots,\varphi_{2m}]+f_a(t)+\lambda F_a^{**}[t,t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_{2m}(t)]\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}+\\ &\quad+\lambda\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\dots,\varphi_{2m}(\tau)]-F_a^{**}[t,t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_{2m}(t)]}{\tau-t}d\tau,\\ \psi_a^{(n)}(t)&=\lambda F_a^*(t,\varphi_1^{(n)},\dots,\varphi_{2m}^{(n)})+f_a(t)+\lambda F_a^{**}[t,t,\varphi_1^{(n)}(t),\dots,\varphi_{2m}^{(n)}(t)]\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}+\\ &\quad+\lambda\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1^{(n)}(\tau),\dots,\varphi_{2m}^{(n)}(\tau)]-F_a^{**}[t,t,\varphi_1^{(n)}(t),\dots,\varphi_{2m}^{(n)}(t)]}{\tau-t}d\tau. \end{aligned}$$

Les limites des trois premiers termes étant évidentes, on n'étudiera que la dernière intégrale en posant

$$(28)\qquad \begin{aligned} J&=\lambda\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\dots,\varphi_{2m}(\tau)]-F_a^{**}[t,t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_{2m}(t)]}{\tau-t}d\tau,\\ J^{(n)}&=\lambda\int_L\frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1^{(n)}(\tau),\dots,\varphi_{2m}^{(n)}(\tau)]-F_a^{**}[t,t,\varphi_1^{(n)}(t),\dots,\varphi_{2m}^{(n)}(t)]}{\tau-t}d\tau. \end{aligned}$$

Considérons un cercle Γ de centre t et de rayon si petit qu'il n'existe qu'un arc simple γ sur L situé à l'intérieur de Γ (quel que soit t) et décomposons les intégrales (28) en deux parties

$$(29)\qquad I=I_\gamma+I_{L-\gamma},\qquad I^{(n)}=I_\gamma^{(n)}+I_{L-\gamma}^{(n)}$$

étendues sur l'arc γ et sur la partie extérieure $L-\gamma$ des lignes L. D'après la propriété (22), on a

$$(30)\qquad |I_\gamma|\leqslant\frac{|\lambda|s}{2\pi q}\left[A(2m\varkappa+1)+\frac{B}{q}M_F\right]\int_\gamma\frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}$$

et la même inégalité pour l'intégrale $I_\gamma^{(n)}$. L'intégrale (30) tend vers zéro avec le rayon du cercle Γ, donc, pour tout ε positif, on peut choisir ce rayon aussi petit qu'on ait

$$(31)\qquad |I_\gamma|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |I_\gamma^{(n)}|<\frac{\varepsilon}{3}$$

quels que soient n et t. Le point t est extérieur à la ligne d'intégration $L-\gamma$, par conséquent, en s'appuyant sur la propriété (12) et la convergence supposée $\varphi_\nu^{(n)}\to\varphi_\nu$ des fonctions $\varphi_\nu^{(n)}$, on peut maintenant choisir l'indice N_ε suffisamment grand pour qu'on ait

$$(32)\qquad |I_{L-\gamma}-I_{L-\gamma}^{(n)}|<\frac{\varepsilon}{3}$$

si $n>N_\varepsilon$. On en conclut que les fonctions $\psi_a^{(n)}(t)$ convergent uniformément vers les fonctions $\psi_a(t)$ transformées de $\varphi_a(t)$, donc la distance $\delta(V_n,V)$ tend vers zéro et la transformation fonctionnelle, définie par les relations (20), est continue dans l'ensemble $S(\varkappa,\mu)$.

Il reste à montrer que l'ensemble S' transformé de S est *compact*. D'après les inégalités (24) et (25), les fonctions $\psi_1(t),\dots,\psi_{2m}(t)$ composantes de tous les points transformés de S forment une famille de fonctions uniformément bornées et *équicontinues*, c'est-à-dire que toutes ces fonctions vérifient l'inégalité

$$|\psi_a(t)-\psi_a(t')|<\varepsilon,\qquad \text{si}\quad |t-t'|<\eta$$

(où η ne dépend que de ε); donc d'après le théorème d'Arzelà, on peut de chaque suite de points de l'ensemble transformé S' tirer une suite de points qui converge vers un point de S', ainsi cet ensemble est compact. L'ensemble S étant convexe, fermé et borné, il résulte donc, d'après le théorème de Schauder, que pour la transformation fonctionnelle (20) il existe dans l'ensemble S un *point invariant*, c'est-à-dire un système de fonctions $\varphi_1(t),\dots,\varphi_{2m}(t)$ auquel correspond le même système, si le module du paramètre λ et les constantes M_p,k_p concernant les fonctions entières $P_a(z)$ sont suffisamment petites. Ce système est la solution des équations intégrales (4) et fournit une solution (3) du problème d'Hilbert posé.

Dans ce raisonnement le choix du coefficient d'Hölder $\varkappa$ pour l'ensemble $S(\varkappa, \mu)$ était arbitraire. On voit, d'après les inégalités (26), que l'intervalle dans lequel doit être compris $|\lambda|$ dépend du choix de $\varkappa$, mais la longueur de cet intervalle reste bornée, si $\varkappa$ augmente indéfiniment.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Problème non linéaire d'Hilbert pour le système de fonctions*, ce volume, p. 1-13.

[2] Ф. Гахов, *Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного*, Известия Казанского Университета (1938).

[3] Б. Хведелидзе, *Об одной граничной задаче Римана*, Сообщения Академии наук Грузинской ССР (1943).

[4] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, 1941.

[5] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Les manuscrits sont à expédier à l'adresse
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW, Tomasza 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10, Śniadeckich 8.

Le prix d'un fascicule est 2,50 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
KSIĄŻKA i PRASA
WARSZAWA 10, Koszykowa 31.