

Sur le système d'équations intégrales à une infinité de fonctions inconnues

par W. POGORZELSKI (Warszawa)

I. Système du type de Fredholm

Dans ce travail nous étudions quelques systèmes d'équations intégrales à une infinité de fonctions inconnues. Les considérations qui suivent mettent en évidence la fécondité et la puissance de la méthode nouvelle d'étude des équations intégrales, fondée sur le théorème topologique de Schauder. Les problèmes que nous résolvons par cette méthode étaient irrésolubles à l'aide de l'analyse classique.

Rappelons tout d'abord les trois théorèmes suivants sur lesquels nous nous basons dans la suite.

THÉORÈME D'ARZELÀ. *Si une famille de fonctions continues, définies dans une même région bornée, est uniformément bornée et les fonctions de cette famille sont équicontinues, alors on peut extraire de cette famille une suite de fonctions uniformément convergente.*

THÉORÈME DE FRÉCHET¹⁾ *Pour qu'un ensemble X de points dans un espace métrique complet E soit compact, il faut et il suffit que, pour tout ε positif, il existe dans l'espace E un ensemble compact Y_ε tel qu'à chaque point x de X corresponde un point y de Y_ε dont la distance $\delta(x, y)$ du point x serait inférieure à ε .*

THÉORÈME DE SCHAUDER²⁾ *Si dans un espace complet, normé et linéaire, une opération continue transforme un ensemble de points borné, fermé et convexe, en un sous-ensemble compact de ce dernier, il existe au moins un point invariant de l'opération donnée.*

Considérons maintenant un système d'équations intégrales, non linéaires et singulières, à une infinité dénombrable de fonctions inconnues

$$(1) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

¹⁾ M. Fréchet, *Quelques propriétés des ensembles abstraits*, Fundamenta Mathematicae 12 (1928), p. 298-310.

²⁾ J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 171-180.

du type suivant de Fredholm:

$$(2) \quad \varphi_n(x) = \lambda \int_{\Omega} \frac{F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), \dots]}{|xy|^{\alpha_n}} dy \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

où $F_n(x, y, u_1, u_2, u_3, \dots)$ sont des fonctions d'une infinité de variables définies dans la région fermée

$$(3) \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega, \quad |u_1| \leq R, \quad |u_2| \leq R, \quad \dots, \quad |u_n| \leq R, \quad \dots$$

On a désigné par $|xy|$ la distance des points x et y dans un domaine (fermé et borné) d'intégration Ω de l'espace euclidien à s dimensions; les exposants α_n sont des constantes réelles données, non supérieures au nombre $\alpha < s$.

On suppose que les fonctions données $F_n(x, y, u_1, u_2, u_3, \dots)$ soient continues en tout point de la région (3), c'est-à-dire que, pour tout point $(x_0, y_0, u_1^0, u_2^0, \dots)$ de cette région et pour toute fonction F_n séparément, on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre positif η tel que

$$|F_n(x_0, y_0, u_1^0, u_2^0, \dots) - F_n(x, y, u_1, u_2, \dots)| < \varepsilon$$

si

$$|x_0 x| < \eta, \quad |y_0 y| < \eta, \quad |u_i^0 - u_i| < \eta \quad (v=1, 2, 3, \dots).$$

En outre on admet que les fonctions F_n sont uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif M tel que toutes les fonctions F_n satisfont à l'inégalité

$$(4) \quad |F_n| \leq M.$$

Démontrons d'abord que chaque fonction F_n séparément est uniformément continue dans la région (3). Considérons à cet effet un espace Π composé de toutes les suites infinies $A(x, y, u_1, u_2, u_3, \dots)$ où x, y sont des points arbitraires du domaine Ω , et u_1, u_2, u_3, \dots une suite réelle bornée, quelconque. Définissons la distance de deux points

$$(5) \quad A(x, y, u_1, u_2, u_3, \dots), \quad A'(x', y', u'_1, u'_2, u'_3, \dots)$$

de l'espace Π par la formule

$$(6) \quad \rho(A, A') = |xx'| + |yy'| + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v |u_v - u'_v|,$$

où $\sum \varepsilon_v$ est une série de nombres positifs convergente, arbitrairement choisie. L'ensemble (3) est alors borné dans l'espace Π ; nous démontrons qu'il est compact. En effet, pour ε positif quelconque, considérons dans l'espace Π l'ensemble de tous les points

$$(7) \quad B_\varepsilon(x, y, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N_\varepsilon}, 0, 0, 0, \dots)$$

dont les composantes à indice supérieur au nombre N_ε tel que

$$\sum_{\nu=N_\varepsilon}^{\infty} \varepsilon_\nu < \frac{\varepsilon}{2R}$$

sont nulles. A chaque point $A(x, y, u_1, u_2, u_3, \dots)$ de l'ensemble (3), on peut donc faire correspondre un point B_ε tel que

$$\varrho(A, B_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Mais l'ensemble des points B_ε dans l'espace Π est évidemment *compact*, par conséquent, d'après le théorème cité de Fréchet, l'ensemble (3) est aussi *compact* dans l'espace Π . Il en résulte que toute fonction F_n séparément est *uniformément continue* dans l'ensemble (3), c'est-à-dire que l'on a, pour deux points quelconques (5) de (3), l'inégalité

$$(8) \quad |F_n(A) - F_n(A')| < \varepsilon$$

si $\varrho(A, A') < \eta$, ou bien si $|xx'| < \eta_1, |yy'| < \eta_1, |u_\nu - u'_\nu| < \eta_1$, où

$$\eta_1 = \frac{\eta}{2 + \sum_p \varepsilon_p}$$

(η ne dépend que de ε et n).

Pour l'étude du système (2), considérons l'espace fonctionnel E^∞ de toutes les suites infinies

$$[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots]$$

bornées, composées des fonctions déterminées et *continues* dans le domaine fermé Ω . Définissons la distance des deux points $U\{\varphi_1\}$ et $V\{g_n\}$ de l'espace E^∞ par la formule

$$(9) \quad \delta(U, V) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sup |\varphi_n - g_n|,$$

où $\sum \varepsilon_n$ est une série numérique aux termes positifs convergente, arbitrairement choisie. La norme du point $U\{\varphi_n\}$ sera définie par sa distance de l'origine $\Theta(0, 0, 0, \dots)$:

$$(10) \quad \|U\| = \delta(U, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sup |\varphi_n|.$$

La définition (9) vérifie toutes les conditions admises pour l'espace métrique.

Il est évident que la condition de Cauchy est *suffisante* pour la convergence d'une suite arbitraire de points U_1, U_2, U_3, \dots de l'espace E^∞ , et, par conséquent, cet espace est *complet*. En outre l'espace E^∞ sera *linéaire*, si l'on admet les définitions suivantes du produit d'un point $U\{\varphi_n\}$

par le nombre réel γ et de la somme des deux points $U\{\varphi_n\}$ et $V\{g_n\}$:

$$(11) \quad \gamma U = \{\gamma \varphi_n\}, \quad U + V = \{\varphi_n + g_n\}.$$

Soit maintenant, dans l'espace E^∞ , un ensemble fermé S de tous les points $U\{\varphi_n\}$ vérifiant l'inégalité

$$(12) \quad |\varphi_n| \leq R.$$

Cet ensemble est *convexe*, puisque tous les points du segment rectiligne

$$(1-\gamma)U + \gamma V,$$

joignant les points $U\{\varphi_n\}$ et $V\{g_n\}$ de S , vérifie l'inégalité

$$|(1-\gamma)\varphi_n + \gamma g_n| \leq (1-\gamma)|\varphi_n| + \gamma|g_n| \leq R$$

quand γ varie dans l'intervalle $(0, 1)$; donc ces points appartiennent à l'ensemble S .

D'après la forme de l'équation intégrale proposée (2), transformons maintenant l'ensemble S en faisant correspondre à tout point $U\{\varphi_n\}$ de cet ensemble un point $U'\{\psi_n\}$ de E^∞ dont les composantes sont déterminées par les formules

$$(13) \quad \psi_n(x) = \lambda \int_{\Omega} \frac{F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), \dots]}{|xy|^{a_n}} dy \quad (n=1, 2, \dots, \infty).$$

Le point $U'\{\psi_n\}$ appartient à l'ensemble S , si le paramètre λ est suffisamment petit pour qu'on ait

$$(14) \quad |\lambda| M \int_{\Omega} \frac{dy}{|xy|^{a_n}} \leq R,$$

où M désigne la borne supérieure de l'ensemble des fonctions $|F_n|$. Or on a

$$(15) \quad \int_{\Omega} \frac{dy}{|xy|^{a_n}} \leq \int_0^L \frac{\omega_s e^{s-1}}{e^{a_n}} d\rho = \frac{\omega_s}{s-a_n} L^{s-a_n} \leq \frac{\omega_s}{s-a} L' = L,$$

où L est le diamètre du domaine Ω , ω_s - l'aire de la surface sphérique à s dimensions

$$\omega_s = \frac{2(1-\pi)^s}{\Gamma(s/2)};$$

en outre on a $L' = L^s$ si $L > 1$, et $L' = L$ si $L \leq 1$. La condition (9) sera donc satisfaite si

$$(16) \quad |\lambda| \leq \frac{R}{Ml}$$

et l'ensemble S' des points transformés de S fera partie de cet ensemble. Pour prouver, d'après le théorème de Schauder, l'existence du point invariant de la transformation (13) il faut montrer encore que la transformation fonctionnelle (13) est *continue* et que l'ensemble transformé S' est *compact*.

Soit donc dans l'ensemble S une suite infinie de points $\{U, (\varphi_1^v, \varphi_2^v, \dots)\}$ convergente vers le point $U(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$. On a alors

$$(17) \quad \delta(U_v, U) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sup |\varphi_n^v - \varphi_n| \rightarrow 0, \quad \text{si } v \rightarrow \infty.$$

Si $\{U_v^*(\varphi_1^v, \varphi_2^v, \dots)\}$ est la suite de points qui correspondent aux points U_v dans la transformation (13) et $U^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ correspond au point limite U , on a alors pour toute valeur entière positive de n et v

$$(18) \quad \varphi_n^v(x) - \varphi_n(x) = \lambda \int_{\Omega} \frac{F_n[x, y, \varphi_1^v(y), \varphi_2^v(y), \dots] - F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots]}{|xy|^{\alpha_n}} dy.$$

D'après la supposition (17), toutes les différences $\varphi_n^v - \varphi_n$ tendent uniformément vers zéro dans le domaine Ω si $v \rightarrow \infty$; en outre les fonctions F_n sont *uniformément continues* séparément, on peut donc faire correspondre à tout ε positif l'indice $N_n(\varepsilon)$ pour qu'on ait

$$|F_n[x, y, \varphi_1^v(y), \varphi_2^v(y), \dots] - F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots]| < \varepsilon$$

si $v > N_n(\varepsilon)$, où $N_n(\varepsilon)$ peut dépendre de n . On aura ainsi

$$(19) \quad |\varphi_n^v(x) - \varphi_n(x)| \leq |\lambda| \varepsilon \int_{\Omega} \frac{dy}{|xy|^{\alpha_n}} \leq |\lambda| \varepsilon l$$

si $v > N_n(\varepsilon)$. Remarquons maintenant que les fonctions φ_n^v vérifient, quels que soient n et v , l'inégalité

$$|\varphi_n^v(x)| \leq R.$$

On peut donc choisir un indice $n_0(\varepsilon)$ qui ne dépend que de ε et qui soit suffisamment grand pour qu'on ait

$$(20) \quad \sum_{n=n_0(\varepsilon)+1}^{\infty} \varepsilon_n \sup |\varphi_n^v - \varphi_n| \leq \varepsilon$$

quel que soit v . L'indice $n_0(\varepsilon)$ étant fixé, on aura alors, d'après (19), l'inégalité

$$(21) \quad \sum_{n=1}^{n_0(\varepsilon)} \varepsilon_n \sup |\varphi_n^v - \varphi_n| \leq |\lambda| \varepsilon l A$$

(où $A = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$) pour $v > \bar{N}(\varepsilon)$, où $\bar{N}(\varepsilon) \geq N_n(\varepsilon)$ si $n=1, 2, \dots, n_0(\varepsilon)$. Il en résulte, d'après les inégalités (20) et (21), que

$$\delta(U_v^*, U^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sup |\varphi_n^v - \varphi_n| \leq (1 + |\lambda| l A) \varepsilon$$

si $v > \bar{N}(\varepsilon)$; donc $\delta(U_v^*, U^*) \rightarrow 0$ si $v \rightarrow \infty$, et la transformation fonctionnelle, définie par les relations (13), est *continue* dans l'ensemble S .

Il reste à démontrer que l'ensemble transformé S' est *compact*. A cet effet démontrons que les composantes (13) de tous les points transformés, correspondant à l'indice n fixé, sont *équicontinues*, c'est-à-dire qu'à tout ε positif correspond un nombre η tel que toutes les fonctions (8), pour n fixé, vérifient l'inégalité

$$(22) \quad |\varphi_n(x) - \varphi_n(x')| < \varepsilon, \quad \text{si } |xx'| < \eta.$$

Décomposons donc la différence (22) en deux parties

$$(23) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x) - \varphi_n(x') &= \lambda \int_{\Omega} \frac{F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] - F_n[x', y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots]}{|xy|^{\alpha_n}} dy + \\ &+ \lambda \int_{\Omega} F_n[x', y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] \left(\frac{1}{|xy|^{\alpha_n}} - \frac{1}{|x'y|^{\alpha_n}} \right) dy. \end{aligned}$$

D'après la continuité des fonctions F_n , toute fonction F_n vérifie l'inégalité

$$(24) \quad |\lambda| |F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] - F_n[x', y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots]| < \frac{\varepsilon}{2l}$$

si $|xx'| < \eta_1$, où le nombre positif η_1 dépend du nombre positif arbitraire ε . Il en résulte, d'après l'inégalité (15), que le module de la première intégrale (23) sera inférieur à $\varepsilon/2$ si $|xx'| < \eta_1$. Pour rendre la seconde intégrale (23) inférieure à $\varepsilon/2$ en module par rapprochement des points x et x' , remarquons que l'on a

$$(25) \quad \left| \lambda \int_{\Omega} F_n[x', y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] \left(\frac{1}{|xy|^{\alpha_n}} - \frac{1}{|x'y|^{\alpha_n}} \right) dy \right| \leq M |\lambda| \int_{\Omega} \left| \frac{1}{|xy|^{\alpha_n}} - \frac{1}{|x'y|^{\alpha_n}} \right| dy.$$

Soit maintenant une sphère K de centre x située à l'intérieur du domaine Ω , et décomposons l'intégrale à droite dans l'inégalité (25) en deux parties

$$(26) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{1}{|xy|^{a_n}} - \frac{1}{|x'y|^{a_n}} \right| dy = \int_K \left| \frac{1}{|xy|^{a_n}} - \frac{1}{|x'y|^{a_n}} \right| dy + \int_{\Omega-K} \left| \frac{1}{|xy|^{a_n}} - \frac{1}{|x'y|^{a_n}} \right| dy$$

étendues à la sphère K et à la partie extérieure $\Omega - K$. On peut choisir le rayon r_ε de la sphère K suffisamment petit pour qu'on ait

$$(27) \quad \int_K \frac{dy}{|x'y|^{a_n}} < \frac{\varepsilon}{6M|\lambda|}$$

en tout point x' et pour tous les exposants $a_n \leq a \leq s$. Le point x étant extérieur au domaine $\Omega - K$ et le rayon r_ε étant fixé, on peut faire correspondre maintenant au nombre ε un nombre η_ε indépendant de x et de n tel qu'on ait

$$(28) \quad \left| \frac{1}{|xy|^{a_n}} - \frac{1}{|x'y|^{a_n}} \right| < \frac{\varepsilon}{6M|V|\lambda|}$$

si $|xx'| < \eta_\varepsilon$ et où y est un point arbitraire à l'extérieur de la sphère K ; V désigne le volume du domaine Ω . Finalement, d'après les formules (25), (26), (27), (28), on conclue que le module de l'intégrale (25) sera inférieur à $\varepsilon/2$ si $|xx'| < \eta_\varepsilon$; on aura donc

$$|\psi_n(x) - \psi_n(x')| < \varepsilon$$

pour toute fonction ψ_n et pour tout couple de points x et x' du domaine Ω , dont la distance est inférieure aux nombres η_1, η_2 . Par conséquent, les fonctions ψ_n sont équicontinues pour n fixé.

A chaque point $U'(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \infty)$ de l'ensemble transformé S' , faisons correspondre un point $U''_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_\varepsilon}, 0, 0, 0, \dots)$ dont les composantes à indice supérieur au nombre N_ε s'annulent, tel que l'on ait

$$(29) \quad \delta(U', U''_\varepsilon) = \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \varepsilon_n \sup |\psi_n| < \varepsilon$$

où ε est un nombre positif arbitrairement choisi. Or l'ensemble de tous les points U''_ε , dont les composantes au nombre finie de N_ε sont différentes de zéro, est compact d'après la propriété démontrée (22) et le théorème d'Arzelà. Il en résulte, d'après le théorème de Fréchet cité au début, que l'ensemble transformé S' est compact. Toutes les conditions du théorème de Schauder sont donc satisfaites et l'existence dans l'ensemble S du point $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \infty)$ invariant par rapport à la transformation (8), c'est-à-dire l'existence d'une solution du système d'équations intégrales (2) à une infinité de fonctions inconnues se trouve prouvée.

II. Système d'équations du type elliptique

Soit maintenant le système d'équations différentielles

$$(30) \quad \Delta U_n = \lambda F_n(A, u_1, u_2, u_3, \dots) \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty)$$

à une infinité de fonctions inconnues $u_1(A), u_2(A), u_3(A), \dots$ dans un domaine borné Ω de l'espace euclidien à trois dimensions; Δ désigne l'opérateur de Laplace.

On recherche le système de fonctions $\{u_n(A)\}$ qui satisfont aux équations (30) à l'intérieur du domaine Ω et qui s'annulent aux points P de la surface fermée S limitant le domaine Ω

$$(31) \quad u_n(A) \rightarrow 0, \quad \text{si } A \rightarrow P \in S.$$

On suppose que les fonctions $F_n(A, u_1, u_2, u_3, \dots)$ d'une infinité de variables sont déterminées et uniformément bornées dans le domaine fermé

$$(32) \quad A \in \Omega, \quad |u_n| \leq R \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty),$$

et qu'elles y vérifient la condition d'Hölder, c'est-à-dire l'inégalité

$$(33) \quad |F_n(A, u_1, u_2, u_3, \dots) - F_n(\bar{A}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots)| < k_n |A\bar{A}|^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty} k_n^\nu |u_\nu - \bar{u}_\nu|^\mu \quad (0 < \mu \leq 1).$$

On suppose en outre que la série numérique des coefficients d'Hölder

$$\kappa_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_n^\nu$$

est convergente quel que soit n .

Pour trouver une solution du problème posé, considérons le système d'équations intégrales suivantes:

$$(34) \quad u_n(A) = - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\Omega} G(A, B) F_n[B, u_1(B), u_2(B), \dots] d\tau_B$$

à une infinité de fonctions inconnues $u_1(A), u_2(A), u_3(A), \dots$ $G(A, B)$ est la fonction de Green habituelle relative à la surface S . On a donc, pour deux points intérieurs A, B ,

$$(35) \quad 0 < G(A, B) = \frac{1}{|AB|} - g(A, B) < \frac{1}{|AB|},$$

$g(A, B)$ étant harmonique même si A coïncide avec B . Le système (34) est donc semblable au système (2) étudié précédemment. Les fonctions F_n sont uniformément continues, d'après la supposition (33). En outre on démontre dans la théorie du potentiel, que l'estimation de

la continuité des intégrales de la forme (34) n'exige que la connaissance de la limite supérieure des fonctions $|F_n|$, donc ces intégrales forment une famille de fonctions *équicontinues*. Par conséquent, en répétant le raisonnement de la première partie, on démontre l'existence d'une solution du système (34) composée des fonctions continues $u_1(A), u_2(A), u_3(A), \dots$, si la valeur absolue du paramètre λ vérifie l'inégalité (16), qui, dans le cas actuel, est la suivante:

$$(36) \quad |\lambda| \leq \frac{2R}{ML^2},$$

où M désigne la borne supérieure de l'ensemble des fonctions $|F_n|$, et L — le diamètre du domaine Ω .

D'après la propriété de la fonction de Green, les fonctions $u_n(A)$ satisfont à la condition limite (31). Il reste à démontrer qu'elles vérifient les équations différentielles (30). Or, si les fonctions continues $u_n(A)$ satisfont aux équations (34), elles admettent les dérivées $u'_n(A)$ par rapport aux coordonnées du point A sous la forme

$$(37) \quad u'_n(A) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{\partial} G'_A(A, B) F_n[B, u_1(B), u_2(B), \dots] d\tau_B.$$

On sait bien que les dérivées de la fonction de Green vérifient l'inégalité

$$(38) \quad |G'_A(A, B)| < \frac{c}{|AB|^2}$$

(c étant une constante) pour tous les couples A, B dans Ω . Donc, les dérivées des fonctions $u_n(A)$ sont bornées dans le domaine Ω , notamment on a

$$(39) \quad |u'_n(A)| < \frac{|\lambda|Mc}{4\pi} \int_{\partial} \frac{d\tau_B}{|AB|^2} \leq |\lambda|McL.$$

Il en résulte que les fonctions $u_n(A)$ satisfont à l'inégalité

$$|u_n(A) - u_n(\bar{A})| < 3|\lambda|McL|A\bar{A}|,$$

et, par conséquent, d'après la propriété (33), les fonctions composées $F_n[B, u_1(B), u_2(B), \dots]$ vérifient l'inégalité

$$(40) \quad |F_n[B, u_1(B), u_2(B), \dots] - F_n[\bar{B}, u_1(\bar{B}), u_2(\bar{B}), \dots]| < k_n |B\bar{B}|^\mu + \sum_{v=1}^{\infty} k_n^\nu |u_\nu(B) - u_\nu(\bar{B})|^\mu \leq (k_n + |3\lambda McL|^\mu k_n) |B\bar{B}|^\mu,$$

donc elles vérifient la condition d'Hölder. On en tire, d'après le théorème bien connu de la théorie du potentiel, que les fonctions $u_n(A)$, formant la solution du système d'équations intégrales (34), admettent les dérivées secondes en tout point intérieur A du domaine Ω , et vérifient le

système d'équations différentielles (30) ainsi que la condition au bord S du domaine Ω .

III. Système du type de Volterra

On étudiera encore le système d'équations singulières à une infinité de fonctions inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ de la forme

$$(41) \quad \int_0^x \frac{K_n(x, y)}{(x-y)^{\alpha_n}} \varphi_n(y) dy + \lambda \int_0^x \frac{F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots]}{(x-y)^{\alpha_n}} dy = f_n(x),$$

où les constantes α_n sont inférieures à l'unité. On suppose que les fonctions $K_n(x, y), f_n(x)$ sont déterminées et continues dans la région fermée

$$(42) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a,$$

et qu'on a $f_n(0) = 0$.

Les fonctions d'une infinité de variables $F_n[x, y, u_1, u_2, u_3, \dots]$ sont déterminées et continues dans la région

$$(43) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad |u_\nu| \leq R, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

En outre on suppose que les fonctions $K_n(x, y), f_n(x), F_n(x, y, u_1, u_2, \dots)$ admettent les dérivées *par rapport à la variable x* dans les régions (42) et (43) et que ces dérivées sont continues. On peut transformer le système (41) en système d'équations

$$(44) \quad \int_0^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha_n}} \left[\int_0^x \frac{K_n(x, y)}{(x-y)^{\alpha_n}} \varphi_n(y) dy + \lambda \int_0^x \frac{F_n[x, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots]}{(x-y)^{\alpha_n}} dy - f_n(x) \right] = 0.$$

Il en résulte, par l'application de la transformation de Dirichlet, que le système (41) est équivalent au système d'équations régulières

$$(45) \quad \int_0^z K_n^*(z, y) \varphi_n(y) dy + \lambda \int_0^z F_n^*[z, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] dy = f_n^*(z)$$

$n = 1, 2, \dots, \infty$) où l'on a posé

$$K_n^*(z, y) = \int_y^z \frac{K_n(x, y)}{(z-x)^{1-\alpha_n} (x-y)^{\alpha_n}} dx,$$

$$(46) \quad F_n^*(z, y, u_1, u_2, \dots) = \int_y^z \frac{F_n(x, y, u_1, u_2, \dots)}{(z-x)^{1-\alpha_n} (x-y)^{\alpha_n}} dx,$$

$$f_n^*(z) = \int_0^z \frac{f_n(x)}{(z-x)^{1-\alpha_n}} dx.$$

D'après les propriétés admises pour les fonctions K_n, F_n, f_n , les fonctions (46) sont déterminées, bornées, continues et admettent les dérivées par rapport à la variable z , continues dans les régions (42) et (43). Désignons ces dérivées par $K_n^*(z, y)$, $f_n^*(z)$, $F_n^{**}(z, y, u_1, u_2, u_3, \dots)$. En dérivant les deux côtés des équations (45) par rapport à la variable z , et en remarquant que ces côtés s'annulent pour $z=0$, on peut affirmer que le système (41) est équivalent au système

$$(47) \quad K_n^*(z, z)\varphi_n(z) + \int_0^z K_n^*(z, y)\varphi_n(y) dy + \lambda F_n^*[z, z, \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots] + \\ + \lambda \int_0^z F_n^*[z, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] dy = f_n^*(z).$$

Il est facile de vérifier que

$$K_n^*(z, z) = K_n(z, z) \frac{\pi}{\sin \alpha_n \pi}.$$

En admettant que $K_n(z, z) \neq 0$, et en appliquant maintenant la solution bien connue de Volterra, on peut affirmer enfin que le système donné (41) est équivalent au système d'équations intégrales

$$(48) \quad \varphi_n(z) = -\lambda \int_0^z \Phi_n[z, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] dy - \\ - \lambda F_n^{**}[z, \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots] + f_n^{**}(z),$$

où les fonctions $\Phi_n, F_n^{**}, f_n^{**}$ sont déterminées par les formules

$$(49) \quad \Phi_n(z, y, u_1, u_2, \dots) = \int_y^z \frac{F_n^*(\bar{y}, y, u_1, u_2, \dots)}{K_n^*(\bar{y}, \bar{y})} \mathcal{N}_n(z, y) d\bar{y} + \\ + \frac{F_n^*(y, y, u_1, u_2, \dots)}{K_n^*(y, y)} \mathcal{N}_n(z, y) + \frac{F_n^*(z, z, u_1, u_2, \dots)}{K_n^*(z, z)}, \\ F_n^{**}(z, u_1, u_2, \dots) = \frac{F_n^*(z, z, u_1, u_2, \dots)}{K_n^*(z, z)},$$

$$f_n^{**}(z) = \frac{f_n^*(z)}{K_n^*(z, z)} + \int_0^z \mathcal{N}_n(z, y) \frac{f_n^*(y)}{K_n^*(y, y)} dy$$

où $\mathcal{N}_n(z, y)$ désigne le noyau résolvant de

$$N_n(z, y) = -\frac{K_n^*(z, y)}{K_n^*(z, z)},$$

c'est-à-dire c'est la somme de la série

$$(50) \quad \mathcal{N}_n(z, y) = N_n(z, y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} N_n^{\nu}(z, y),$$

où

$$N_n^{\nu}(z, y) = \int_y^z N_n(z, \bar{y}) N_n^{\nu-1}(\bar{y}, y) d\bar{y} \quad (N_n^0 = N_n).$$

Toutes les fonctions (49) sont bornées, d'après la supposition $f_n(0)=0$, en outre, elles sont continues dans l'ensemble fermé (43). En admettant que l'ensemble des bornes supérieures des modules des fonctions (49), pour $n=1, 2, \dots, \infty$, est borné, on peut répéter le raisonnement de la première partie. On considère donc dans l'espace E^{∞} , composé des suites $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions continues, une transformation fonctionnelle

$$(51) \quad \varphi_n(z) = -\lambda \int_0^z \Phi_n[z, y, \varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots] dy - \\ - \lambda F_n^{**}[z, \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots] + f_n^{**}(z)$$

et on constate, d'après le théorème de Schauder, l'existence d'une solution $\{\varphi_n(x)\}$ du système d'équations intégrales (41), le module de λ et de la variable z étant suffisamment petit.