Anmerkung. Dieser geometrischen Konstruktion der ∞^1 transversalen Trajektorien M_{n-1}^t, die als Bilder von M_{n-1}^0 durch die Transformationsgruppe G_1 erzeugt sind, entspricht physikalisch die Ausbreitung der Wellen in einem permanenten Medium. Diese Theorie in Verbindung mit der klassischen Abhandlung von Vessiot [8] zeigt den nahen Zusammenhang des Finslerschen Raumes, der 1-gliedrigen k. h. Transformationsgruppen und des Huygensschen Prinzips.

Die in § 2, § 3, entwickelten Begriffe lassen sich auf die allgemeinen differenzierbaren (nicht endlich dimmensionalen) Mannigfaltigkeiten von A. D. Michal [3], [4] übertragen, da sie nur den Begriff des kontravarianten Vektors (des Differentials dx) und des dualen Raumes erfordern. Man müßte sich nur auf die konvexen und symmetrischen statt auf die sternartigen Indikatrizen (Eichkörper) beschränken; die tangentialen Räume würden dann die reflexiven Banach-Räume bedeuten.

Zitate

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique VI*, Livre II. Algèbre. Algèbre Linéaire, Paris 1947.

[2] L. P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, Princeton 1933.

[3] A. D. Michal, *General differential geometries and related topics*, B.A.M.S. 45 (1939), S. 529-559.

[4] — *General Tensor Analysis*, B.A.M.S. 43 (1937), S. 394-401.

[5] П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, Москва-Ленинград 1947, S. 262-289.

[6] В. Вагнер, *Геометрия Финслера как теория поля локальных гиперповерхностей в X_n*, Труды Сем. по Bект. Тенс. Анал. 7 (1949), S. 65-166.

[7] O. Veblen, J. H. C. Whitehead, *The Foundations of Differential Geometry*, Cambridge 1953.

[8] E. Vessiot, *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales*, Bull. Soc. Math. 34 (1906), S. 230-269.

Sur une propriété des nombres irrationnels

par A. Turowicz (Tyniec)

Deux joueurs A et B choisissent alternativement des nombres positifs décroissants, et forment ainsi une suite $\{a_n\}$ à termes positifs, telle que $0<a_{n+1}<a_n$. Le joueur A gagnera la partie si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

converge vers une limite irrationnelle quelconque; dans le cas contraire, la partie sera gagnée par B.

Nous allons démontrer qu'il existe une méthode garantissant la victoire au joueur A, c'est-à-dire que les choix effectués par B ne sauraient empêcher l'existence d'une limite irrationelle de la série (1) pourvu que A adopte le procédé, que nous exposons dans la suite.

La démonstration découle du fait bien connu que chaque nombre positif c peut être développé en une série, dite de Cantor

$$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n!},$$

où les nombres c_n sont des entiers positifs tels que $c_n<n$ pour $n\geqslant 2$ et que l'inégalité

$$c_n<n-1$$

est satisfaite pour une infinité d'indices n[1]. Ce développement est unique pour un nombre c donné, et la condition nécessaire et suffisante[2] pour qu'un nombre c soit rationnel est qu'il y ait un nombre N tel que $c_n=0$ pour $n\geqslant N$. Une série de Cantor est toujours convergente.

Supposons que B commence le jeu (ce qui est d'ailleurs sans importance); par conséquent, c'est B qui choisit tous les termes a_{2k-1} de la série (1). Posons

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

[1]) Cf. par exemple O. Perron, *Irrationalzahlen*, Berlin 1939, p. 113.

[2]) Cf. Perron, l. c., p. 115.

Nous allons déterminer la méthode de jeu que doit employer A pour que la série (1) converge vers une limite irrationnelle. Supposons que $2k-1$ choix aient été effectués et développons s_{2k-1} en série de Cantor

(2) $$s_{2k-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!},$$

où $c_n^{(2k-1)}<n$ pour $n\geqslant 2$, et $c_n^{(2k-1)}<n-1$ pour une infinité d'indices n. Soit p le plus petit indice tel que $p>2k-1$ et $c_p^{(2k-1)}<p-1$. Alors A choisit à son tour a_{2k} tel que

$$a_{2k}\leqslant\frac{1}{3\cdot p!}.$$

Vu que $a_{2k+1}<a_{2k}$ on a

$$s_{2k+1}=s_{2k+1}+a_{2k}+a_{2k+1}<s_{2k-1}+\frac{2}{3\cdot p!},$$

$$s_{2k+1}<\sum_{n=1}^{p}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}+\left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}-\frac{4}{3\cdot p!}\right)+\frac{2}{p!}.$$

Mais en vertu de nos hypothèses

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}-\frac{4}{3\cdot p!}\leqslant\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}-\frac{4}{3\cdot p!}=\sum_{n=p+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]-\frac{4}{3\cdot p!}$$
$$=\frac{1}{p!}-\frac{4}{3\cdot p!}=-\frac{1}{3\cdot p!}<0.$$

On a par conséquent

$$s_{2k+1}<\sum_{n=1}^{p}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}+\frac{2}{p!}=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}+\frac{c_p^{(2k-1)}+2}{p!}\leqslant\sum_{n=1}^{p-1}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}+\frac{1}{(p-1)!},$$

(3) $$s_{2k-1}<s_{2k}<s_{2k+1}<\sum_{n=1}^{p-1}\frac{c_n^{(2k-1)}}{n!}+\frac{1}{(p-1)!}.$$

On tire aisément de la formule (3) que le développement en série de Cantor des nombres s_{2k} et s_{2k+1} ne diffère pas de celui du nombre s_{2k-1} dans les premiers $p-1$ termes. On obtient par induction que

(4) $$c_n^{(2k-1)}=c_n^{(q)}\quad\text{pour}\quad 1\leqslant n\leqslant 2k-1,\quad q\geqslant 2k-1.$$

Posons

(5) $$b_n=c_n^{(n)}$$

pour tous les n entiers positifs et

(6) $$b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}.$$

Les formules (2), (4), (5), (6) impliquent que le développement de b en série de Cantor ne peut différer de celui du nombre s_k que dans les termes dont l'indice est supérieur à k. Evidemment

$$|b-s_k|=\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{b_n-c_n^{(k)}}{n!}\right|\leqslant 2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=2\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]=\frac{2}{k!}.$$

On a $\lim_{k\to\infty}s_k=b$. Désignons par r_k la somme

$$r_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{b_n}{n!}.$$

On a $r_k\leqslant s_k<s_{k+1}<b$ pour tout k. Mais l'inégalité $r_k<b$ valable pour tous les k entiers positifs implique qu'il existe une infinité de nombres b_n non nuls. Par conséquent, b est un nombre irrationnel.

Ainsi le but de cette note est atteint.