Taking $t^0=t$, we obtain from (4.17) simple recurrence formulas for the functions $A^{(n)}(t)$ and $B^{(n)}(t)$, $n=1,2,\ldots$

The consistency of the two methods described in this section may be verified by the expansion of $\dot{c}_2/(1+c_2)$ and $\varkappa^2(c_2-c_0)/(1+c_2)$ in power series of λ and a comparison with A and B respectively.

In contract to the first method described in this section the second method allows a generalization to partial differential equations. We shall return to these questions at another place.

Finally it may be noted that the considerations of this section apply equally well to general types of linear integro-differential equations with constant coefficients and higher order derivatives outside the integral.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Eingliedrige Gruppen der homogenen kanonischen Transformationen und Finslersche Räume

von K. Maurin (Warszawa)*

1. Einführung. Bisher wurden die kanonischen Transformationen

$$\tilde{x}^i=\varphi^i(x^1,\ldots,x^n;p_1,\ldots,p_n),\quad \tilde{p}_i=\psi_i(x^1,\ldots,x^n;p_1,\ldots,p_n)\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

als Abbildungen des $2n$-dimensionalen linearen Raumes (des sog. Phasenraumes) interpretiert. In dieser Abhandlung werden $x^1,\ldots,x^n$ als Koordinaten des Punktes P einer (nicht notwendig linearen) Mannigfaltigkeit M_n der Klasse C^1, dagegen $p_1,\ldots,p_n$ als Koordinaten des Punktes $p\in\overline{T}_n(x)$ gedeutet. $\overline{T}_n(x)$ ist der duale Raum des tangentialen Raumes der M_n im Punkte P.

Auf diese Weise wird die geometrische Interpretation der infinitesimalen kanonischen homogenen Transformationen (k. h.) und ihr enger Zusammenhang mit den Indicatrizen Eichflächen der (kovarianten) Finsler-Metrik evident.

Damit die Zusammenhänge klarer vor Augen treten, werden die für die Anwendungen wichtigsten k. h. Transformationen ausgesondert und als *sternartige Transformationen* bezeichnet. Es wird bewiesen der folgende

Hauptsatz. *Jede sternartige* 1-*gliedrige Gruppe* G_1 *der k. h. Transformationen induziert in* M_n *eine Finsler-Metrik und umgekehrt: der Finslersche Raum bestimmt eine sternartige* G_1, *wobei die geodätischen Linien des* F_n *Trajektorien der* G_1 *sind.*

Die hier entwickelte Theorie zeigt, daß die Elementarwellen von Huyghens-Vessiot die Indikatrizen des von G_1 erzeugten F_n-Raumes sind; G_1 beschreibt die Ausbreitung der Störungen im permanenten Medium.

Als Anwendung gebe ich einen einfachen Beweis des Haupsatzes der Theorie der Normalkongruenzen geodätischer Linien im Finslerschen Raume.

In der Arbeit wurde alles auf koordinatenfreie Weise entwickelt; dadurch wurde der geometrische Inhalt der Theorie in den Vorder-

* Hier möchte ich Professor S. Gołąb meinen aufrichtigen Dank für das Lesen des Manuskriptes ausdrücken (*Verfasser*).

grund gestellt und die Verallgemeinerung auf unendlichdimensionale Räume ermöglicht.

2. Die Phasenmannigfaltigkeit X_{2n}. Es sei M_n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1, $x=(x^1,\ldots,x^n)$ die Koordinaten ihres Punktes $P\in M_n$; $T_n(x)$ der Tangentiale Raum von M_n im Punkte P, d. h. der lineare Raum der Differentiale dx im Punkte P: $dx\in T_n(x)$ [7]. Es sei $\overline{T}_n(x)$ der duale Raum von $T_n(x)$, seine Elemente sind also die linearen Funktionale $p\in\overline{T}_n(x)$. Wir schreiben den Wert des Funktionals p in $\xi\in T_n(x)$ $\langle\xi,p\rangle$.

Die Phasenmannigfaltigkeit X_{2n} ist der Raum der Paare (x,p) $\big(p\in\overline{T}_n(x)\big)$.

Es sei $I_{n-1}(x)\subset T_n(x)$ eine in Bezug auf $x=0$ sternartige $(n-1)$-dimensionale Fläche, die in jedem ihrer Punkte eine einzige Stützhyperebene besitzt. Da $x=0\,\bar{\in}\,I_{n-1}(x)$, wird der Stützebene im Punkte $x\in I_{n-1}(x)$ das lineare Funktional $p\in\overline{T}_n(x)$, durch die Gleichung $\langle x,p\rangle=1$ eineindeutig zugeordnet. Die Menge der auf diese Weise gewonnenen Funktionale wird $\overline{I}_{n-1}(x)\subset\overline{T}_n(x)$ genannt. Von $I_{n-1}(x)$ setzen wir voraus, daß ihre $\overline{I}_{n-1}(x)$ $(n-1)$-dimensional ist und sagen dann, daß die Mannigfaltigkeiten $I_{n-1}(x)$ und $\overline{I}_{n-1}(x)$ dual gekoppelt sind.

In jedem der linearen Räume $T_n(x)$ und $\overline{T}_n(x)$ werden durch die Angabe der dual gekoppelten $I_{n-1}(x)\subset T_n(x)$, $\overline{I}_{n-1}(x)\subset\overline{T}_n(x)$ die verallgemeinerten Minkowski-Metriken eingeführt. Die Mannigfaltigkeiten $I_{n-1}(x)$, $\overline{I}_{n-1}(x)$ werden Indikatrizen (Eichhyperflächen) der Minkowski-Räume genannt. Die Norm (Länge) des Vektors $\xi\in T_n(x)-\|\xi\|$ ist eine Funktion des Paares (x,ξ): $\|\xi\|=L(x,\xi)$. Die Norm von $p\in\overline{T}_n(x)-\|p\|=H(x,p)$. Die Funktionen $L(x,\xi)$, bzw. $H(x,p)$ sind positiv homogen erster Ordnung in Bezug auf ξ bzw. p. Wir verlangen, daß die metrischen Grundfunktionen $L(x,\xi)$ und $H(x,p)$ zweimal stetig differenzierbar seien. $L(x,\xi)=1$, bzw. $H(x,p)=1$ sind die Gleichungen der $I_{n-1}(x)$, bzw. $\overline{I}_{n-1}(x)$. Die Mannigfaltigkeit M_n mit den auf diese Weise eingeführten kontra- und kovarianten lokalen verallgemeinerten Minkowski-Metriken wird der verallgemeinerte Finslersche Raum F_n genannt [6].

Definition. Die Abbildung $X_{2n}\xrightarrow{\Phi}X_{2n}:\Phi(X_{2n})=X_{2n}$, d. h. das Paar der Transformationen

$$\tilde{x}=\varphi(x,p),\qquad \tilde{p}=\psi(x,p),\qquad \Phi(x,p)\overset{\mathrm{df}}{=}(\tilde{x},\tilde{p})$$

wird *kanonisch* und *homogen* genannt, wenn die Identität

$$\langle d\tilde{x},\tilde{p}\rangle=\langle dx,p\rangle \tag{1}$$

stattfindet.

In dualen (biorthogonalen) Basen wird (1) die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i d\tilde{x}^i=\sum_{i=1}^{n}p_i dx^i$$

annehmen [1].

Die Funktion Φ ist bekanntlich [2] *positiv homogen erster Ordnung in p*

$$\Phi(x,\lambda p)=\lambda\Phi(x,p),\qquad \lambda\geqslant 0. \tag{2}$$

3. Die eingliedrige sternartige Gruppe der k. h. Transformationen. Es sei $\Phi[x,p);t]=\big(\tilde{x}(t),\tilde{p}(t)\big)$ die 1-gliedrige k. h. Transformationsgruppe G_1. G_1 erzeugt ein Vektorfeld in X_{2n} $\xi\in T_n(x)$, $\pi\in\overline{T}_n(x)$.

$$(\xi,\pi)\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{\partial\Phi}{\partial t}[(x,p);0] \tag{3}$$

die sogenannte infinitesimale Transformation der Gruppe, und von ihr wird eine G_1 erzeugt. Mittels dieses Vektorfeldes wird die Funktion

$$H(x,p)\overset{\mathrm{df}}{=}\langle\xi,\pi\rangle \tag{4}$$

(die Hamiltonsche Funktion) definiert.

Wie aus (2), (4) ersichtlich, ist H homogen erster Ordnung in p

$$H(x,\lambda p)=\lambda H(x,p),\qquad \lambda\geqslant 0. \tag{5}$$

Die Trajektorien der G_1 genügen den kanonischen Gleichungen

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}(x,p),\qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,p). \tag{6}$$

Es gelten die Relationen [2]

$$\xi=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \pi=-\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{7}$$

Die Gleichung

$$H(x,p)=1 \tag{8}$$

definiert eine $(n-1)$-dimensionale Fläche des $\overline{T}(x)$: $\overline{I}_{n-1}(x)$. Wenn p $\overline{I}_{n-1}(x)$ durchläuft, beschreibt ξ (schau (7)) die zu $\overline{I}_{n-1}(x)$ duale Hyperfläche in $T_n(x)$; wir bezeichnen diese Fläche $I_{n-1}(x)$.

Definition. Wenn $I_{n-1}(x)$ sternartig in Bezug auf $\xi=0$ ist, wird die Gruppe G_1 *sternartig* genannt.

In dieser Arbeit werden nur sternartige G_1 untersucht. Auf diese Weise induziert G_1 in $T_n(x)$ und $\overline{T}_n(x)$ die Flächen $I_{n-1}(x)$ und $\overline{I}_{n-1}(x)$

die als Indikatrizen der verallgemeinerten Minkowski-Räume dienen können [5], [6], wobei $H(x,p)$ die metrische Funktion der kovarianten Finslermetrik ist.

Wie aus obiger Konstruktion ersichtlich ist, ist $I_{n-1}(x)$ die Elementarfläche von Vessiot [8] und hat im Falle der geschlossenen $I_{n-1}(x)$ die physikalische Interpretation der Elementarwelle. Die Deutung von Vessiot kann noch erweitert werden. $\bar{I}_{n-1}(x)$ wäre dann die sogenannte Normalenfläche der Optik. $I_{n-1}(x)$ und $\bar{I}_{n-1}(x)$ treten ganz ungezwungen als polare (duale) Gebilde in den tangentialen Räumen $T(x)$ und $\bar{T}(x)$ auf.

Auf diese Weise gibt unsere Konstruktion die geometrische Interpretation der schönen Theorie von Vessiot, die den engen Zusammenhang des Huyghensschen Prinzips mit den 1-gliedrigen k. h. Transformationsgruppen ans Licht gebracht hat.

4. Es sei F_n der verallgemeinerte Finslersche Raum mit den dual gekoppelten lokalen Minkowski-Eichflächen $I_{n-1}(x)$, $\bar{I}_{n-1}(x)$ aus § 2. $\bar{I}_{n-1}(x)$ definiert $H(x,p)=\|p\|$: die Stützebenenfunktion von $I_{n-1}(x)$, die positiv homogen erster Ordnung in p ist aber eine solche $H(x,p)$ definiert bekanntlich eine sternartige G_1. Die Ergebnisse von § 3, § 4 fassen wir im folgenden Hauptsatz zusammen:

Die eingliedrige sternartige k. h. Transformationsgruppe erzeugt in M_n eine Finslermetrik, wandelt also M_n in F_n um. Umgekehrt: jeder Finslersche Raum F_n bestimmt eine sternartige G_1, die geodätischen Linien von F_n sind die Projektionen der Trajektorien von G_1, da sie den Gleichungen

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}\,; \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

genügen. Die Funktion $H(x,p)$ ist die metrische Funktion der kovarianten Finslermetrik und gleichzeitig das Symbol der infinitesimalen Transformation der Gruppe

$$Af=\langle\xi,\frac{\partial f}{\partial x}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial p},\pi\rangle\left[=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}+\pi_i\frac{\partial f}{\partial p_i}=(H,f)\right]$$

wobei (H,f) die Poissonsche Klammer bedeutet. Die geodätischen Linien dieses F_n sind durch die Gleichung $\tilde{x}(t)=\varphi[(x,p;t]$ gegeben.

5. Eine Anwendung zur Theorie der Normalkongruenzen des Finslerschen Raumes. Der obige Hauptsatz legt die Anwendung zur Theorie der Normalkongruenzen im Finslerschen Raume nahe. In dieser Theorie spielt die Hauptrolle bekanntlich der folgende

Satz. *Damit eine Kongruenz geodätischer Linien normal sei, ist die Existenz einer transversalen Mannigfaltigkeit M^0_{n-1} notwendig und hinreichend.*

Schwierigkeiten bereitet allein der Beweis des zweiten Teiles dieses Satzes, den man bekanntlich [3] folgendermassen formulieren kann:

Satz. *Aus der Existenz einer transversalen M^0_{n-1} der Kongruenz, folgt die Existenz einer Schar von ∞^1 Transversalmannigfaltigkeiten M^t_{n-1}.*

Bevor ich den Beweis dieses Satzes angebe, möchte ich die Transversalität der geodätischen Linie (als Trajektorie von G_1)

$$x^t=\varphi[(x^0,p^0);t], \qquad p^t=\psi[(x^0,p^0);t],$$
$$x^0=\varphi[(x^0,p^0);0], \qquad p^0=\psi[(x^0,p^0),0]$$

zur Mannigfaltigkeit M^t_{n-1}

$$x^t=x^t(u^1,\dots,u^{n-1})$$

formulieren. Der tangentiale Vektor ξ der geodätischen Linie im Punkte x^t hat die Gestalt:

$$\mu\xi=\frac{\partial H}{\partial p}(x^t,p^t) \qquad \mu\neq 0,$$

seine Transversalität zur M^t_{n-1} ist durch die Gleichung

$$\langle dx^t, p^t\rangle=0$$

ausgedrückt, wobei $dx^t\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial x^t}{\partial u^a}du^a$ die M^t_{n-1} berührt.

Beweis. Es sei $x^0=x^0(u^1,\dots,u^{n-1})$ die M^0_{n-1}. Die zu M^0_{n-1} transversalen geodätischen Linien können nach dem Hauptsatz als Projektionen der Trajektorien der G_1 mit der Anfangsbedingung

$$x^0=x^0(u^1,\dots,u^{n-1}), \qquad p^0=p^0(u^1,\dots,u^{n-1}),$$

wobei

$$\langle dx^0(u^1,\dots,u^{n-1}),p^0(u^1,\dots,u^{n-1})\rangle=0, \tag{9}$$

$$dx^0(u^1,\dots,u^{n-1})=\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial x^0}{\partial u^a}du^a$$

gilt, gedeutet werden. Die Schar der ∞^1 M^t_{n-1}

$$x^t=\varphi[(x^0(u^1,\dots,u^{n-1}),p^0(u^1,\dots,u^{n-1});t]=x^t(u^1,\dots,u^{n-1})$$

wird transversal geschnitten von der Kongruenz der geodätischen Linien,

$$x^t=\varphi[x^0(u^1,\dots,u^{n-1}),p^0(u^1,\dots,u^{n-1});t],$$
$$p^t=\psi[x^0(u^1,\dots,u^{n-1}),p^0(u^1,\dots,u^{n-1});t]$$

auf Grund der kanonischen Homogenität der G_1 und (9), q. e. d.

Anmerkung. Dieser geometrischen Konstruktion der ∞^1 transversalen Trajektorien M^t_{n-1}, die als Bilder von M^0_{n-1} durch die Transformationsgruppe G_1 erzeugt sind, entspricht physikalisch die Ausbreitung der Wellen in einem permanenten Medium. Diese Theorie in Verbindung mit der klassischen Abhandlung von Vessiot [8] zeigt den nahen Zusammenhang des Finslerschen Raumes, der 1-gliedrigen k. h. Transformationsgruppen und des Huygensschen Prinzips.

Die in § 2, § 3, entwickelten Begriffe lassen sich auf die allgemeinen differenzierbaren (nicht endlich dimmensionalen) Mannigfaltigkeiten von A. D. Michal [3], [4] übertragen, da sie nur den Begriff des kontravarianten Vektors (des Differentials dx) und des dualen Raumes erfordern. Man müßte sich nur auf die konvexen und symmetrischen statt auf die sternartigen Indikatrizen (Eichkörper) beschränken; die tangentialen Räume würden dann die reflexiven Banach-Räume bedeuten.

Zitate

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique VI*, Livre II. Algèbre. Algèbre Linéaire, Paris 1947.

[2] L. P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, Princeton 1933.

[3] A. D. Michal, *General differential geometries and related topics*, B.A.M.S. 45 (1939), S. 529-559.

[4] — *General Tensor Analysis*, B.A.M.S. 43 (1937), S. 394-401.

[5] П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, Москва-Ленинград 1947, S. 262-289.

[6] В. Вагнер, *Геометрия Финслера как теория поля локальных гиперповерхностей в X_n*, Труды Сем. по Вект. Тенс. Анал. 7 (1949), S. 65-166.

[7] O. Veblen, J. H. C. Whitehead, *The Foundations of Differential Geometry*, Cambridge 1953.

[8] E. Vessiot, *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales*, Bull. Soc. Math. 34 (1906), S. 230-269.

Sur une propriété des nombres irrationnels

par A. Turowicz (Tyniec)

Deux joueurs A et B choisissent alternativement des nombres positifs décroissants, et forment ainsi une suite $\{a_n\}$ à termes positifs, telle que $0<a_{n+1}<a_n$. Le joueur A gagnera la partie si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

converge vers une limite irrationnelle quelconque; dans le cas contraire, la partie sera gagnée par B.

Nous allons démontrer qu'il existe une méthode garantissant la victoire au joueur A, c'est-à-dire que les choix effectués par B ne sauraient empêcher l'existence d'une limite irrationelle de la série (1) pourvu que A adopte le procédé, que nous exposons dans la suite.

La démonstration découle du fait bien connu que chaque nombre positif c peut être développé en une série, dite de Cantor

$$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n!},$$

où les nombres c_n sont des entiers positifs tels que $c_n<n$ pour $n\geqslant 2$ et que l'inégalité

$$c_n<n-1$$

est satisfaite pour une infinité d'indices n[1]. Ce développement est unique pour un nombre c donné, et la condition nécessaire et suffisante[2] pour qu'un nombre c soit rationnel est qu'il y ait un nombre N tel que $c_n=0$ pour $n\geqslant N$. Une série de Cantor est toujours convergente.

Supposons que B commence le jeu (ce qui est d'ailleurs sans importance); par conséquent, c'est B qui choisit tous les termes a_{2k-1} de la série (1). Posons

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

[1]) Cf. par exemple O. Perron, *Irrationalzahlen*, Berlin 1939, p. 113.

[2]) Cf. Perron, l. c., p. 115.