Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA 1955

Nakład 1440 egz. + 184 egz. Podpisano do druku 29. IX. 1955.
Ark. wyd. 10, druk. 9. Druk ukończono w październiku 1955 r.
Papier druk. sat. kl. III, 100 g, 70×100 Zamówienie nr 217/55
Cena zł 20.–

Wrocławska Drukarnia Naukowa – Wrocław, ul. Świerczewskiego 19.

Problème non linéaire d'Hilbert pour le système de fonctions

par W. Pogorzelski (Warszawa)

Introduction. Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble de p lignes fermées de Jordan $L_1, L_2, \ldots, L_p$ n'ayant pas de points communs et entourant les domaines disjoints $S_1, S_2, \ldots, S_p$ (Fig. 1).

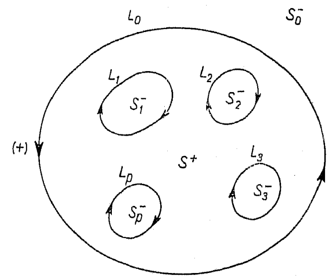

Fig. 1.

Soit en outre une ligne fermée de Jordan L_0 entourant toutes les lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$ et ne les coupant pas.

Désignons par S_0^- le domaine infini, situé à l'extérieur de la ligne L_0 et par S^+ le domaine limité par la ligne L_0 et les lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$.

Le problème aux limites d'Hilbert, posé et résolu dans un cas particulier par Hilbert en 1905, consiste en la détermination d'une fonction de la variable complexe $\Phi(z)$ holomorphe à l'intérieur des domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$ *séparément* et dont les valeurs limites satisfont à la relation linéaire donnée

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t); \tag{1}$$

$\Phi^+(t)$ désigne la valeur limite de la fonction $\Phi(z)$ relativement au domaine S^+ au point t du bord

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_p \tag{2}$$

du domaine S^+; $\Phi^-(t)$ désigne la valeur limite de la fonction $\Phi(z)$ relativement à la région

$$S^- = S_0^- + S_1^- + \ldots + S_p^- \tag{3}$$

au point t du bord L. Les fonctions $G(t)$, $g(t)$ sont données et déterminées en tout point t du bord L; on suppose que $G(t) \neq 0$ partout.

Le problème était résolu dans le cas général d'une façon immédiate sans l'emploi d'équations intégrales, mais en étant basé sur les propriétés de l'intégrale du type de Cauchy, dans une suite de travaux de T. Carlemann [1], F. Gachow [2], J. Privalov [3] et B. Chvedelidzé [4].

La solution générale du problème (1) s'exprime par une intégrale du type de Cauchy de la façon suivante

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} X(z) \int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)P(z) \tag{4}$$

sous la supposition que les fonctions données $G(t)$, $g(t)$ vérifient la condition d'Hölder et que les lignes $L_0, L_1, \dots, L_p$ admettent la tangente continue en tout point. Le sens de parcours est positif sur la ligne L_0, et négatif sur les lignes $L_1, L_2, \dots, L_p$. $P(z)$ désigne un polynôme, ou plus généralement une fonction entière arbitraire, $X(z)$ désigne une solution du problème homogène d'Hilbert, dite *canonique* et exprimée par la formule

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Pi(z)} e^{\Gamma(z)}, & \text{si} \quad z \in S^+, \\ z^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & \text{si} \quad z \in S^-, \end{cases} \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\begin{gathered} \Pi(z) = (z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\dots(z-a_p)^{\lambda_p}, \\ G_0(t) = t^{-\varkappa}\Pi(t)\,G(t), \\ \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G_0(t)}{t-z}\,dt, \end{gathered} \tag{6}$$

a_ν étant un point arbitrairement choisi à l'intérieur du domaine S_ν^- $(\nu=1,2,\dots,p)$ et le point $z=0$ étant situé à l'intérieur du domaine S^+. La lettre $\varkappa$ désigne un nombre entier; elle est dite *index* du problème d'Hilbert et est égale à la somme

$$\varkappa = \sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu, \tag{7}$$

où $2\pi\lambda_\nu = [\arg G(t)]_{L_\nu}$ est l'accroissement qu'éprouve l'argument de la fonction $G(t)$ pendant le parcours total à partir du point t sur la ligne fermée L_ν (dans le sens positif pour $\nu=0$ et dans le sens négatif pour $\nu=1,2,\dots,p$).

On voit, d'après les formules (5) et (6), que la solution canonique X *n'a pas de zéro* dans tout le plan.

Enoncé du problème. Nous appellerons *problème non linéaire d'Hilbert pour un système de fonctions* la recherche d'un système de fonctions de la variable complexe

$$\Phi_1(z),\ \Phi_2(z),\ \dots,\ \Phi_m(z) \tag{8}$$

dont chacune serait holomorphe dans les domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, \dots, S_p^-$ séparément et dont les valeurs limites $\Phi_a^+(t)$, $\Phi_a^-(t)$ satisferaient en tout point t de l'ensemble $L = L_0 + L_1 + \dots + L_p$ aux relations

$$\Phi_a^+(t) = G_a(t)\Phi_a^-(t) + \lambda F_a[t, \Phi_1^+(t), \dots, \Phi_m^+(t), \Phi_1^-(t), \dots, \Phi_m^-(t)] \qquad (a=1,2,\dots,m) \tag{9}$$

où $F_a(t, u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{2m})$ sont des fonctions données de $2m+1$ arguments et λ un paramètre. La difficulté du problème, résultant de la présence de termes non linéaires dans les relations (9), exige de faire pour les fonctions données $G_a(t)$ et F_a des suppositions moins générales que pour le problème linéaire.

Nous supposons notamment que chacune des fonctions données $G_1(t), G_2(t), \dots, G_m(t)$ soit définie dans l'ensemble des bandes fermées

$$\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_1, \dots, \bar{\Omega}_p \tag{10}$$

comprenant les lignes correspondantes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_p$, et qu'à l'intérieur de chacune des bandes séparément elle soit holomorphe. En outre nous supposons toujours que $G_a(t) \neq 0$ sur les lignes L_ν. Nous admettons que les bandes (10) n'ont pas de points communs. Nous supposons ensuite que chacune des fonctions données

$$F_a(z, u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{2m}) \qquad (a=1,2,\dots,m) \tag{11}$$

soit définie pour tout point z à l'intérieur d'un ensemble de bandes (10) et pour les valeurs des variables complexes $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{2m}$ dans les cercles de rayon positif R,

$$|u_a| \leqslant R \qquad (a=1,2,\dots,2m). \tag{12}$$

Nous admettons en outre que les fonctions (11) soient holomorphes par rapport à la variable z à l'intérieur de chacune des bandes $\bar{\Omega}_\nu$ *séparément* et aussi holomorphes par rapport à chacune des variables $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{2m})$ dans le domaine (12).

Résolution du problème. D'après la formule (4), représentant la solution générale du problème linéaire d'Hilbert, nous pouvons affirmer que, si la solution

$$\Phi_1(z),\ \Phi_2(z),\ \dots,\ \Phi_m(z) \tag{13}$$

du problème non linéaire d'Hilbert (9) existe, les fonctions (13) vérifient le système d'équations

$$\Phi_a(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} X_a(z) \int_L \frac{F_a[\tau, \Phi_1^+(\tau), \dots, \Phi_m^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \dots, \Phi_m^-(\tau)]\,d\tau}{X_a^+(\tau)(\tau - z)} + X_a(z)P_a(z) \qquad (a=1,2,\dots,m) \tag{14}$$

en tout point intérieur z des domaines $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$. $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_p(z)$ étant les solutions canoniques données par les formules (5) et (6) pour les fonctions $G_1, G_2, \ldots, G_m$, nous avons donc partout $X_a(z) \neq 0$. $P_1(z), \ldots$ $\ldots, P_m(z)$ sont de certaines fonctions entières.

D'après Plemelj, les valeurs limites $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$, correspondant au domaine S^+ et S^- au point t des lignes L, de l'intégrale du type de Cauchy

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau - z} \tag{15}$$

sont les suivantes:

(16)
$$\Psi^+(t) = \frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \qquad \Psi^-(t) = -\frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau - t},$$

où l'intégrale impropre a la valeur principale de Cauchy et $\psi(\tau)$ est une fonction arbitraire vérifiant la condition d'Hölder sur L. Il en résulte que si la solution $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_m(z)$ du problème non linéaire d'Hilbert (9) existe, alors les fonctions limites

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} \Phi_a^+(t), & \text{si} \quad a = 1, 2, \ldots, m, \\ \Phi_a^-(t), & \text{si} \quad a = m+1, m+2, \ldots, 2m \end{cases} \tag{17}$$

vérifient en tout point t de L le système d'équations intégrales

(18)
$$\varphi_a(t) = \frac{1}{2}\lambda F_a[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t), \varphi_{m+1}(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)] +$$
$$+ \frac{\lambda}{2\pi i} X_a^+(t) \int_L \frac{F_a[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{X_a^+(\tau)(\tau - t)}\,d\tau +$$
$$+ X_a^+(t) P_a(t) \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\varphi_a(t) = -\frac{1}{2}\lambda \frac{X_{a-m}^-(t)}{X_{a-m}^+(t)} F_{a-m}[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)] +$$
$$+ \frac{\lambda}{2\pi i} X_{a-m}^-(t) \int_L \frac{F_{a-m}[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{X_{a-m}^+(\tau)(\tau - t)}\,d\tau +$$
$$+ X_{a-m}^-(t) P_{a-m}(t) \qquad (a = m+1, m+2, \ldots, 2m)$$

où $X_a^+(t)$ et $X_a^-(t)$ désignent les valeurs limites aux points t des lignes L des fonctions $X(z)$ déterminées par les formules (5) et (6). Réciproquement, si le système de fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{2m}(t)$ satisfaisant à la con-

dition d'Hölder sur L, forme une solution du système d'équations intégrales (18), les fonctions entières $P_a(z)$ étant arbitrairement choisies, alors le système de fonctions

$$\Phi_a(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} X_a(z) \int_L \frac{F_a[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{X_a^+(\tau)(\tau - z)}\,d\tau + X_a(z) P_a(z) \tag{19}$$
$$(a = 1, 2, \ldots, m)$$

qui sont holomorphes dans les domaines $S^+, S_0^-, \ldots, S_p^-$ *séparément*, vérifie les équations (9) et, par conséquent, représente la solution du problème proposé.

Nous sommes donc amené à résoudre le système d'équations intégrales (18), qui sont non linéaires et à forte singularité à cause de la présence des intégrales impropres au sens de Cauchy.

D'abord nous allons démontrer une propriété auxiliaire de l'intégrale du type de Cauchy

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\nu} \frac{f(t)}{t - z}\,dt, \tag{20}$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans la bande $\overline{\Omega}_\nu$ (Fig. 2) qui contient la ligne fermée L_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, p)$. La fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans tout le domaine S limité par la ligne L_ν, mais n'est pas nécessairement égale à la fonction $f(z)$ dans la partie commune du domaine S et de la bande $\overline{\Omega}_\nu$. Soit maintenant une ligne fermée L'_ν, située à l'intérieur de la partie commune de la bande $\overline{\Omega}_\nu$ et du domaine S; nous pouvons écrire alors, d'après le théorème de Cauchy, l'égalité suivante

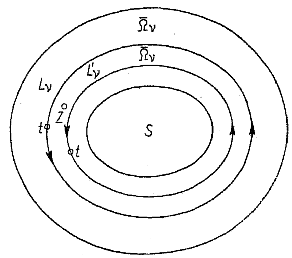

Fig. 2

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+)L_\nu} \frac{f(t)}{t - z}\,dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{(-)L'_\nu} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,$$

qui est vraie pour tout point z situé entre les lignes L_ν et L'_ν. Donc, pour tout point z entre les lignes L_ν et L'_ν, est vraie l'égalité

$$\varphi(z) = f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(+)L'_\nu} \frac{f(t)}{t - z}\,dt. \tag{21}$$

Il en résulte que la fonction $\varphi(z)$, déterminée par l'intégrale (20) et holomorphe dans le domaine S, peut être prolongée analytiquement par tout point t de la ligne L_ν. Il existe, par conséquent, une fonction holomorphe dans la bande Ω_ν contenant la ligne L_ν et étant située dans la bande $\overline{\Omega}_\nu$, qui est égale à l'intégrale du type de Cauchy (20) dans la partie commune de la bande Ω_ν et du domaine S. Nous en concluons qu'il existe des fonctions différentes de zéro $f_a(z), f_a^*(z)$ $(a=1,2,\ldots,m)$, holomorphes *séparément* dans toute bande Ω_ν $(\nu=0,1,\ldots,p)$, située dans la bande $\overline{\Omega}_\nu$ et contenant la ligne L_ν, qui sur les lignes L_ν prennent les valeurs

$$f_a(t)=X_a^+(t), \qquad f_a^*(t)=X_a^-(t) \qquad (a=1,2,\ldots,m) \tag{22}$$

où $X_a(z)$ est la solution canonique, déterminée par les formules (5) et (6).

Nous écrivons donc le système d'équations intégrales (18) de la façon suivante:

$$\varphi_a(t)=\lambda F_a^*[t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{2m}(t)]+ \\ +\lambda\int_L \frac{F_a^{**}[t,\tau,\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{2m}(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau+f_a^{**}(t) \qquad (a=1,2,\ldots,2m) \tag{23}$$

où les fonctions $F_a^*, F_a^{**}, f_a^{**}$ sont déterminées par les formules

(24)

$$F_a^*(z,u_1,u_2,\ldots,u_{2m})=\begin{cases}\dfrac{1}{2}F_a(z,u_1,u_2,\ldots,u_{2m}), & \text{si } a=1,2,\ldots,m,\\[2mm] -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f_{a-m}(z)}{f_{a-m}^*(z)}F_{a-m}(z,u_1,\ldots,u_{2m}), & \text{si } a=m+1,\ldots,2m,\end{cases}$$

$$F_a^{**}(z,\zeta,u_1,u_2,\ldots,u_{2m})=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{f_a(z)}{f_a(\zeta)}F_a(\zeta,u_1,\ldots,u_{2m}), & \text{si } a=1,2,\ldots,m,\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{f_{a-m}^*(z)}{f_{a-m}(\zeta)}F_{a-m}(\zeta,u_1,\ldots,u_{2m}), & \text{si } a=m+1,\ldots,2m,\end{cases}$$

$$f_a^{**}(z)=\begin{cases}f_a(z)P_a(z), & \text{si } a=1,2,\ldots,m,\\ f_{a-m}^*(z)P_{a-m}(z), & \text{si } a=m+1,\ldots,2m.\end{cases}$$

Les fonctions (24) sont donc holomorphes par rapport aux variables z,ζ dans les bandes $\Omega_0,\Omega_1,\ldots,\Omega_p$ *séparément* et aussi holomorphes par rapport aux variables $u_1,u_2,\ldots,u_{2m}$ dans les cercles $|u_\nu|\leqslant R$ $(\nu=1,2,\ldots,2m)$.

Les équations intégrales (23) à forte singularité ne peuvent pas être régularisées; nous résoudrons donc ces équations par l'application directe de la méthode des approximations successives.

Dans ce but considérons, dans chacune des bandes Ω_ν $(\nu=0,1,2,\ldots,p)$, deux suites de lignes fermées $\{A_\nu^m\}$ et $\{B_\nu^n\}$ satisfaisant aux conditions suivantes (Fig. 3):

1° La ligne A_ν^n entoure la ligne A_ν^{n+1} et n'a pas avec elle de points communs,

2° la ligne B_ν^{n+1} entoure la ligne B_ν^n et n'a pas avec elle de points communs,

3° les lignes A_ν^n tendent vers la ligne limite A_ν (si $n\to\infty$) qui entoure la ligne d'intégration L_ν et n'a pas avec elle de points communs,

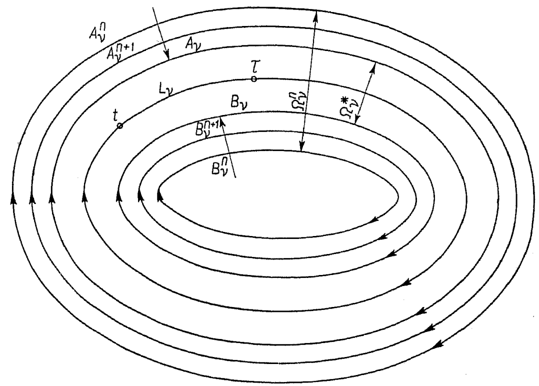

Fig. 3

4° les lignes B_ν^n tendent vers la ligne limite B_ν (si $n\to\infty$) qui est entourée par la ligne L_ν et n'a pas avec elle de points communs,

5° toutes les lignes précédentes ont les *tangentes continues* et l'ensemble de leurs longueurs *admet une borne supérieure déterminée.*

Formons maintenant $2m$ suites infinies de fonctions

$$\varphi_a^1(z),\ \varphi_a^2(z),\ldots,\ \varphi_a^n(z),\ \ldots \qquad (a=1,2,\ldots,2m) \tag{25}$$

à l'aide des relations de récurrence

$$\varphi_a^{n+1}(z)=\lambda F_a^*[z,\varphi_1^n(z),\ldots,\varphi_{2m}^n(z)]+ \\ +\frac{1}{2}\lambda\int_{A^{n+1}+B^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\varphi_1^n(z),\ldots,\varphi_{2m}^n(z)]}{\tau-z}\,d\tau+f_a^{**}(z) \\ (a=1,2,\ldots,2m) \tag{26}$$

où A^{n+1} et B^{n+1} désignent les sommes de lignes A_ν^{n+1} et B_ν^{n+1}

$$A^{n+1}=A_0^{n+1}+A_1^{n+1}+\ldots+A_p^{n+1}, \qquad B^{n+1}=B_0^{n+1}+B_1^{n+1}+\ldots+B_p^{n+1}. \tag{27}$$

Pour démontrer l'existence des fonctions (25), supposons que les fonctions $\varphi_a^n(z)$ $(a=1,2,\ldots,2m)$ soient définies dans la région

$$\Omega^n=\Omega_0^n+\Omega_1^n+\ldots+\Omega_p^n, \tag{28}$$

où Ω_ν^n $(\nu=0,1,\ldots,p)$ désigne la bande limitée par les lignes A_ν^n et B_ν^n (Fig. 3); on admet que ces fonctions soient holomorphes dans chacune des bandes Ω_ν^n séparément et vérifient les inégalités

$$|\varphi_a^n(z)|\leqslant R \qquad (a=1,2,\ldots,2m). \tag{29}$$

Il en résulte, d'après les relations (26), que les fonctions $\varphi_a^{(n+1)}(z)$ $(a=1,2,\ldots,2m)$ sont définies dans la région

$$\Omega^{n+1}=\Omega_0^{n+1}+\Omega_1^{n+1}+\ldots+\Omega_p^{n+1} \tag{30}$$

et chacune d'elles est holomorphe dans les bandes $\Omega_0^{n+1},\Omega_1^{n+1},\ldots,\Omega_p^{n+1}$ séparément.

Cherchons la borne supérieure du module des fonctions $\varphi_a^{(n+1)}(z)$ dans la région (30), sous la supposition (29). Remarquons d'abord qu'existent les bornes supérieures M_1 et M_2 des modules des fonctions (24) dans la région $z\in\Omega_0+\Omega_1+\ldots+\Omega_p$, $|u_\nu|\leqslant R$, donc

$$|F_a^*(z,u_1,u_2,\ldots,u_{2m})|\leqslant M_1, \qquad |F_a^{**}(z,u_1,u_2,\ldots,u_{2m})|\leqslant M_2. \tag{31}$$

Observons ensuite que, d'après le théorème de Cauchy, nous avons l'égalité

$$\int\limits_{A_\nu^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_{2m}(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau-\int\limits_{B_\nu^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_{2m}(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau =2\pi i F_a^{**}[z,z,\psi_1(z),\ldots,\psi_{2m}(z)], \tag{32}$$

qui est vraie en tout point z à l'intérieur de la bande Ω_ν^{n+1} et pour tout le système de fonctions $\psi_1(z),\psi_2(z),\ldots,\psi_{2m}(z)$ holomorphes dans cette bande et vérifiant l'inégalité $|\psi_\beta(z)|\leqslant R$ $(\beta=1,2,\ldots,2m)$.

Si le point z est situé entre les lignes B_ν^{n+1} et L_ν (et τ sur A_ν^{n+1}) la distance $|\tau-z|$ des points τ et z admet la borne inférieure ϱ_ν' différente de zéro et nous avons

$$\Bigg|\int\limits_{A_\nu^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1,\ldots,\psi_{2m}]}{\tau-z}\,d\tau\Bigg|<\frac{M_2 A_\nu}{\varrho_\nu'}, \tag{33}$$

A_ν étant la borne supérieure de la longueur des lignes A_ν^n, B_ν^n dans Ω_ν. Par analogie nous avons l'inégalité

$$\Bigg|\int\limits_{B_\nu^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1,\ldots,\psi_{2m}]}{\tau-z}\,d\tau\Bigg|<\frac{M_2 A_\nu}{\varrho_\nu''} \tag{33'}$$

si z est situé entre la ligne L_ν et A_ν^{n+1}, ϱ_ν'' désignant la borne inférieure (différente de zéro) de la distance des points de la ligne L_ν et de la ligne B_ν^{n+1}.

D'après (32), (33), (33'), l'inégalité

$$\Bigg|\int\limits_{A_\nu^{n+1}+B_\nu^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_{2m}(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau\Bigg|<2M_2\left(\frac{A_\nu}{\varrho_\nu}+2\pi\right) \tag{34}$$

est vraie pour tout point z à l'intérieur de la bande Ω_ν^{n+1}, ϱ_ν étant le plus petit des nombres ϱ_ν', ϱ_ν''. Si le point z est situé dans la bande Ω_ν^{n+1}, nous avons en outre l'inégalité

$$\Bigg|\int\limits_{A_\beta^{n+1}+B_\beta^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_{2m}(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau\Bigg|<2M_2\frac{A_\beta}{\varrho} \tag{35}$$

pour $\beta\neq\nu$, ϱ désignant la borne inférieure, différente de zéro, de la distance des points des lignes A_a' et A_β' si $a\neq\beta$. Il en résulte que l'inégalité

$$\Bigg|\int\limits_{A^{n+1}+B^{n+1}}\frac{F_a^{**}[z,\tau,\psi_1(\tau),\ldots,\psi_{2m}(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau\Bigg|<2\left(\frac{pA}{\varrho}+\frac{A}{\varrho^*}+2\pi\right)M_2 \tag{36}$$

$$(a=1,2,\ldots,2m)$$

est vraie en tout point z à l'intérieur de la région

$$\Omega_0^{n+1}+\Omega_1^{n+1}+\ldots+\Omega_p^{n+1}$$

et pour tout le système de fonctions $\psi_1,\ldots,\psi_{2m}$ holomorphes séparément dans cette région et vérifiant la condition $|\psi_\nu|\leqslant R$; A désigne le plus grand des nombres A_ν et ϱ^* le plus petit des nombres ϱ_ν.

Donc si les fonctions entières $P_a(z)$ sont choisies de manière qu'on ait

$$|f^{**}(z)|\leqslant R_1<R, \qquad \text{si} \quad z\in\Omega=\Omega_0+\Omega_1+\ldots+\Omega_p \tag{37}$$

et si les fonctions $\varphi_a^n(z)$ satisfont au condition (29), alors d'après l'inégalité (36) les fonctions $\varphi_a^{n+1}(z)$ vérifient les inégalités

$$|\varphi_a^{n+1}(z)|\leqslant R \qquad (a=1,2,\ldots,2m) \tag{38}$$

dans la région $\Omega^{n+1}=\Omega_0^{n+1}+\ldots+\Omega_p^{n+1}$ à condition qu'on ait

$$|\lambda|M_1+|\lambda|\left(\frac{pA}{\varrho}+\frac{A}{\varrho^*}+2\pi\right)M_2\leqslant R-R_1. \tag{39}$$

Finalement nous concluons par induction que si:

1° les premières fonctions $\varphi'_a(z)$ des suites (25), arbitrairement choisies, sont holomorphes séparément dans la région Ω' et vérifient les inégalités

$$|\varphi'_a(z)| \leqslant R,$$

2° les fonctions $P_a(z)$ sont choisies pour que les inégalités (37) soient vraies,

3° le module du paramètre λ est suffisamment petit:

$$(40)\qquad |\lambda| \leqslant \frac{R-R_1}{M_1+\left(\frac{pA}{\varrho}+\frac{A}{\varrho^*}+2\pi\right)M_2},$$

alors les fonctions $\varphi^n_a(z)$ des suites (25) seront définies et holomorphes dans la région Ω^n (séparément) pour toute valeur de n et satisferont aux inégalités

$$(41)\qquad |\varphi^n_a(z)| \leqslant R.$$

D'après la propriété connue de la valeur principale de l'intégrale de Cauchy et la relation (26), les fonctions φ^n_a des suites (25) prennent aux points t des lignes L_ν les valeurs qui vérifient les égalités

$$(42)\qquad \varphi^{n+1}_a(t) = \lambda F^*_a[t, \varphi^n_1(t), \varphi^n_2(t), \ldots, \varphi^n_{2m}(t)] +$$
$$+\lambda \int_L \frac{F^{**}_a[t, \tau, \varphi^n_1(\tau), \varphi^n_2(\tau), \ldots, \varphi^n_{2m}(\tau)]}{\tau - t}\, d\tau + f^{**}_a(t)$$
$$(a=1,2,\ldots,2m).$$

Pour démontrer la convergence des suites (25), étudions les différences entre les fonctions (25).

Nous avons, d'après les relations (26),

(43)
$$\varphi^{n+1}_a(z) - \varphi^n_a(z) = \lambda\{F^*_a[z, \varphi^n_1(z), \ldots, \varphi^n_{2m}(z)] - F^*_a[z, \varphi^{n-1}_1(z), \ldots, \varphi^{n-1}_{2m}(z)]\} +$$
$$+\frac{1}{2}\lambda \int_{A^n+B^n} \frac{F^{**}_a[z, \tau, \varphi^n_1(\tau), \ldots, \varphi^n_{2m}(\tau)] - F^{**}_a[z, \tau, \varphi^{n-1}_1(\tau), \ldots, \varphi^{n-1}_{2m}(\tau)]}{\tau - z}\, d\tau.$$

En désignant par $b^{(n)}_a$ les bornes supérieures du module des différences $\varphi^n_a(z) - \varphi^{n-1}_a(z)$ dans la région Ω^n et par $\varkappa_1, \varkappa_2$ les bornes supérieures du module des dérivées

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta} F^*_a(z, u_1, \ldots, u_{2m}), \qquad \frac{\partial}{\partial u_\beta} F^{**}_a(z, \zeta, u_1, \ldots, u_{2m})$$

dans la région

$$(44)\qquad z \in \Omega, \qquad \zeta \in \Omega, \qquad |u_\beta| \leqslant \beta \quad (\beta=1,2,\ldots,2m)$$

nous avons les inégalités

(45)
$$\left|F^*_a[z, \varphi^n_1(z), \ldots, \varphi^n_{2m}(z)] - F^*_a[z, \varphi^{n-1}_1(z), \ldots, \varphi^{n-1}_{2m}(z)]\right| \leqslant \varkappa_1 \sum_{\beta=1}^{2m} b^{(n)}_\beta,$$
$$\left|F^{**}_a[z, \tau, \varphi^n_1(\tau), \ldots, \varphi^n_{2m}(\tau)] - F^{**}_a[z, \tau, \varphi^{n-1}_1(\tau), \ldots, \varphi^{n-1}_{2m}(\tau)]\right| \leqslant \varkappa_2 \sum_{\beta=1}^{2m} b^{(n)}_\beta.$$

Par analogie avec l'inégalité (36), nous pouvons écrire pour les intégrales dans la relation (43) les inégalités

$$(46)\qquad \left|\frac{1}{2}\int_{A^n+B^n} \frac{F^{**}_a[z, \tau, \varphi^n_1(\tau), \ldots, \varphi^n_{2m}(\tau)] - F^{**}_a[z, \tau, \varphi^{n-1}_1(\tau), \ldots, \varphi^{n-1}_{2m}(\tau)]}{\tau - z}\, d\tau\right|$$
$$\leqslant k\varkappa_2 \sum_{\beta=1}^{2m} b^{(n)}_\beta \qquad (a=1,2,\ldots,2m)$$

qui sont vraies en tout point z à l'intérieur de Ω^n; nous avons désigné pour abréger

$$(47)\qquad k = \frac{pA}{\varrho} + \frac{A}{\varrho^*} + 2\pi.$$

Il en résulte, d'après (43), (45), (46), que les différences entre les fonctions (25) satisfont dans la région Ω^n aux inégalités

$$(48)\qquad |\varphi^{n+1}_a(z) - \varphi^n_a(z)| \leqslant (\varkappa_1 + k\varkappa_2)|\lambda| \sum_{\beta=1}^{2m} b^{(n)}_\beta \qquad (a=1,2,\ldots,2m)$$

donc aux inégalités

$$(49)\qquad |\varphi^{n+1}_a(z) - \varphi^n_a(z)| \leqslant [2m(\varkappa_1 + k\varkappa_2)|\lambda|]^{n-1} 2R.$$

Nous en concluons que les suites (25) convergent uniformément vers les fonctions limites

$$(50)\qquad \varphi_a(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n_a(z) \qquad (a=1,2,\ldots,2m)$$

holomorphes dans les bandes Ω^*_ν séparément (limitées par les lignes A_ν, B_ν) si le module du paramètre λ est suffisamment petit, notamment

$$(51)\qquad |\lambda| \leqslant \frac{R-R_1}{M_1 + kM_2}, \qquad |\lambda| < \frac{1}{2m(\varkappa_1 + k\varkappa_2)}.$$

D'après les relations (42), le système de fonctions limites (50) représente la solution du système d'équations intégrales (23) aux points t des lignes L_ν. En substituant les fonctions obtenues (50) dans les formules (19) nous obtenons un système de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_{2m}(z)$ holomorphes séparément dans les domaines $S^+, S^-_0, S^-_1, \ldots, S^-_p$, qui est la solution du problème non linéaire d'Hilbert proposé.

Nous allons montrer encore que la solution obtenue du système d'équations intégrales (23) est unique, les fonctions entières $P_a(z)$ étant choisies. Supposons que le système d'équations (23) admette l'autre solution $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_{2m}(t)$, où les fonctions $\psi_a(t)$ sont holomorphes dans les bandes Ω_ν^* séparément. Nous aurons alors dans Ω^* les égalités

$$\tag{52} \begin{aligned} \varphi_a(z) &= \lambda F_a^*[z, \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{2m}(z)] + f_a^{**}(z) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\lambda \int_{A^n+B^n} \frac{F_a^{**}[z, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2m}(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \\ \psi_a(z) &= \lambda F_a^*[z, \psi_1(z), \ldots, \psi_{2m}(z)] + f_a^{**}(z) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\lambda \int_{A^n+B^n} \frac{F_a^{**}[z, \tau, \psi_1(\tau), \ldots, \psi_{2m}(\tau)]}{\tau - z} d\tau \qquad (a = 1, 2, \ldots, 2m), \end{aligned}$$

d'où résultent les inégalités

$$|\varphi_a(z) - \psi_a(z)| \leqslant (\varkappa_1 + k\varkappa_2)|\lambda| \sum_{a=1}^{2m} \text{borne sup } |\varphi_a - \psi_a| \qquad (a = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Mais nous avons supposé que $2m(\varkappa_1 + k\varkappa_2)|\lambda| < 1$, donc il doit être $\varphi_a(z) = \psi_a(z)$ $(a = 1, 2, \ldots, 2m)$ dans la région Ω^* et la solution obtenue est unique.

D'après les expressions (5) et (6), si tous les index $\varkappa_a = \sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu^a$ correspondant aux fonctions $G_a(t)$ sont *positifs* ou nuls, alors pour que les fonctions $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_m(z)$ données par les formules (19) soient *nulles à l'infini* il faut et il suffit de choisir pour les fonctions $P_a(z)$ des polynômes arbitraires de dégré $\varkappa_a - 1$ au plus, ou $P_a(z) = 0$ si $\varkappa_a = 0$.

Si tous les index $\varkappa_a$ sont négatifs, alors pour obtenir la solution du problème d'Hilbert composée des fonctions $\Phi_a(z)$ $(a = 1, 2, \ldots, m)$ pour lesquelles le point à l'infini est un *point régulier ou un pôle d'ordre* $-\varkappa_a - 1$ *au plus*, il faut et il suffit de poser $P_a(z) = 0$. Dans ce cas $(\varkappa_a < 0)$ la solution du problème d'Hilbert, qui vérifie la condition précisée à l'infini, est évidemment unique, d'après l'unicité de la solution du système d'équations intégrales (23).

Publications citées

[1] T. Carleman, *Sur la résolution de certaines équations intégrales*, Arkiv för Matematik, Bd. 16, No 26 (1922).

[2] Ф. Гахов, *Линейные краевые задачи теории функции комплексного переменного*, Известия Казанского Университета, 3 сер., Т. X (1938), p. 39-79.

[3] И. Привалов, *Об одной граничной задаче*, Математический сборник 41 (1934), p. 519-526.

[4] Б. Хведелидзе, *Об одной граничной задаче Римана*, Сообщения Акад. Наук Грузинской ССР 4 (1943), p. 289-296.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES