[4] M. Krzyżański et A. Szybiak, *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, Note I e II, Atti Accad. Naz. Lincei, cl. Sc. fis., mat. e natur., ser. VIII, 27 (1959), p. 1-10.

[5] A. Szybiak, *On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Equation* $\Delta u - \partial u/\partial t + c(x)u = 0$, Bull. Acad. Polon. Sc., Sér. des sc. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 183-186.

Reçu par la Rédaction le 25. 11. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

par T. Dłotko (Katowice)

Il existe une classe d'équations différentielles ordinaires du second ordre de la forme

$$(1)\qquad u''(t)+g\big(t, u(t)\big) = 0\,,$$

possédant de nombreuses propriétés de l'équation différentielle linéaire $u''(t)+a(t)u(t) = 0$.

Je vais démontrer dans cette note les propriétés que voici: les solutions de l'équation (1) existent dans tout l'intervalle $\langle t_0, \infty)$, elles sont bornées, oscillantes ou non oscillantes, elles possèdent des asymptotes, les suites de leurs extrêmes sont monotones, etc.

En particulier, dans le cas où $g(t, u) = a(t)f(u)$, je généralise les résultats obtenus à l'équation différentielle $\big(k(t)u'\big)' + l(t)/k(t)f(u) = 0$.

En outre, les théorèmes demontrés entraînent, comme propositions, certains théorèmes établis par les auteurs [1], [2], [7], [8], [9], [12], [13], [15], [16].

Le trait caractéristique de cette note sera l'emploi de simples et brèves méthodes de démonstration.

J'ai l'honneur de remercier M. A. Bielecki pour ses précieuses remarques et suggestions, et M. Z. Opial pour son aide dans la rédaction de cette note.

I. Dans cette partie de la note nous allons démontrer un théorème qui, entre autres, assure l'existence des solutions de l'équation (1) dans l'intervalle $t \geqslant t_0$.

Théorème 1. *Considérons le système d'équations différentielles*

$$(2)\qquad x_i'(t) = f_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

dans lequel les fonctions f_i sont définies et continues dans le domaine $D\{t \geqslant t_0, -\infty < x_i < +\infty, i = 1, \ldots, n\}$. Nous supposons qu'il existe une fonction $w(t, u)$ définie, continue et non négative dans le domaine $D_1\{t \geqslant t_0, u \geqslant 0\}$ et telle que l'équation différentielle

$$(3)\qquad u'(t) = w\big(t, u(t)\big)\,,$$

ait toutes ses solutions $u(t)$ définies dans tout l'intervalle $t \geqslant t_0$.

Si $\|f(t,x)\| \leqslant w(t,\|x\|)$, *où* $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ *désigne un vecteur dont la norme est* $\|x(t)\|$ *chaque solution du système* (2), *satisfaisant aux conditions initiales* $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$, *définie dans l'intervalle* $\langle t_0, \beta)$, $\beta < +\infty$, *peut être prolongée sur tout l'intervalle* $t \geqslant t_0$.

Démonstration. En vertu du théorème classique sur l'existence des solutions du système d'équations différentielles (2), il existe une solution de ce système, vérifiant les conditions initiales, définie dans le plus grand intervalle $\langle t_0, \beta)$, où $\beta > t_0$. Nous allons démontrer que l'hypothèse $\beta < +\infty$ conduit à l'absurde.

On sait que lorsque les fonctions f_i sont continues dans le domaine D et la solution $x_i(t, t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$ existe seulement dans le plus grand intervalle $\langle t_0, \beta)$ et $\beta < +\infty$, alors $\|x(t, t_0, \ldots, x_{n0})\|$ tend vers $+\infty$, quand $t \to \beta - 0$ ([3], p. 3).

Les fonctions $x_i(t, t_0, \ldots, x_{n0})$ $(t_0 \leqslant t < \beta)$ sont continues dans cet intervalle. Il s'ensuit que la fonction $\|x(t, t_0, \ldots, x_{n0})\|$ est continue quand $t_0 \leqslant t < \beta$. Choisissons un point (t_0, u_0) tel que $u_0 > \|x_{i0}\|$, $i = 1, \ldots, n$. Désignons par $\varphi(t)$ l'intégrale supérieure de l'équation (3), définie par la condition initiale (t_0, u_0). Par hypothèse, la fonction $\varphi(t)$ est définie pour $t \geqslant t_0$. Il existe donc un dernier point τ tel que $\|x(t, t_0, \ldots, x_{n0})\| = \varphi(\tau)$ et

$$\|x(t, t_0, \ldots, x_{n0})\| > \varphi(t) \quad \text{pour} \quad t > \tau . \tag{3'}$$

On peut démontrer la formule $D\|x(t)\| \leqslant \|x'(t)\|$, où $D\|x(t)\|$ désigne un nombre dérivé arbitraire de la fonction continue $\|x(t, t_0, \ldots, x_{n0})\|$ pour $t \geqslant t_0$. En particulier $\underline{D}_+\|x(t)\|$ et $\underline{D}_-\|x(t)\|$ ne surpassent pas $\|x'(t)\|$. Ainsi donc, d'après les hypothèses admises,

$$\underline{D}_+\|x(t)\| \leqslant w\big(t, \|x(t)\|\big) \quad \text{pour} \quad t > \tau ,$$
$$\underline{D}_-\|x(t)\| \leqslant w\big(t, \|x(t)\|\big) \quad \text{pour} \quad t > \tau .$$

En vertu de [14], p. 124, nous avons

$$\|x(t, t_0, \ldots, x_{n0})\| \leqslant \varphi(t) \quad \text{pour} \quad t > \tau . \tag{3''}$$

Les relations (3') et (3'') sont contradictoires, on ne peut donc pas avoir $\beta < +\infty$, ce qui démontre la conclusion du théorème.

Remarque 1. Si, dans le théorème 1, nous admettions encore que la fonction $w(t, u)$ était croissante par rapport à la variable u $(u \geqslant 0)$, nous pourrions obtenir une condition suffisante pour que toutes les solutions du système (2) existent dans tout l'intervalle $\langle t_0, \infty)$. Ce théorème a été démontré par A. Bielecki et cité par J. Kisyński [7].

Remarque 2. Si l'on admet $w(t, u) = A(t)u + B(t)$ $(A(t) \geqslant 0$, $B(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0)$, on déduit du théorème 1 une condition suffisante pour que toutes les solutions du système (2) existent dans l'intervalle $\langle t_0, \infty)$. Cette condition a été démontrée par A. Wintner [15].

Nous énoncerons maintenant quelques hypothèses qui interviendront dans nos théorèmes.

Hypothèse H_1. La fonction $a(t) > 0$ est définie et continue et possède une dérivée $a'(t)$ continue pour $t \in \langle 0, a)$. La fonction $a'(t)$ satisfait pour $t \in \langle 0, a)$ à l'une au moins des conditions:

1° $a'(t) \geqslant 0$, ou

2° $a(t) \geqslant \delta > 0$ et $\int_0^a |a'(t)|\,dt < \infty$.

La fonction $f(u)$ est définie et continue pour $u \in (-\infty, +\infty)$ et telle que

$$F(u) = \int_0^u f(x)\,dx \to +\infty , \quad \text{pour} \quad |u| \to +\infty .$$

Dans l'hypothèse H_1, la fonction $F(u)$ est continue et tend vers $+\infty$, quand $u \to +\infty$ ou bien $u \to -\infty$. Il en résulte l'existence de $\min F(u) = F(p) = -\mu \leqslant 0$ et $G(u) = F(u) + \mu = \int_p^u f(x)\,dx \geqslant 0$, pour $u \in (-\infty, +\infty)$. Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + a(t) f(u) = 0 , \tag{4}$$

dans laquelle les fonctions $a(t)$ et $f(u)$ satisfont à l'hypothèse H_1. Soit $u(t)$ une solution de l'équation (4), déterminée par les conditions initiales $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$. Multiplions l'équation (4) par $2u'(t)$ et intégrons dans l'intervalle $\langle 0, t\rangle$, dans lequel cette solution existe. Nous aurons l'égalité

$$\big(u'(t)\big)^2 + 2a(t) G\big(u(t)\big) = v_0^2 + 2a(0) G(u_0) + 2\int_0^t a'(\tau) G\big(u(\tau)\big)\,d\tau , \tag{4'}$$

d'où

$$a(t) G\big(u(t)\big) \leqslant \frac{C}{2} + \int_0^t \frac{|a'(\tau)|}{a(\tau)} G\big(u(\tau)\big) a(\tau)\,d\tau, \quad \text{où} \quad C = v_0^2 + 2a(0) G(u_0) , \tag{5}$$

$$\big(u'(t)\big)^2 \leqslant C + 2\int_0^t |a'(\tau)| G\big(u(\tau)\big)\,d\tau . \tag{6}$$

Nous pouvons appliquer à l'inégalité (5) le lemme de Bellman-Niemyckij ([10], p. 19)

$$G\big(u(t)\big) \leqslant \frac{C}{2a(t)} \exp\Big(\int_0^t \frac{|a'(\tau)|}{a(\tau)}\,d\tau\Big). \tag{5'}$$

En vertu des inégalités (5') et (6) nous pouvons formuler le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Considérons l'équation différentielle* (4) *et admettons l'hypothèse* H_1. *Alors chaque solution* $u(t)$ *existe dans tout l'intervalle* $\langle 0, a)$. *Cette solution est bornée, ainsi que sa dérivée* $u'(t)$, *dans l'intervalle* $\langle 0, a)$.

Remarque 1. De l'inégalité (5') nous tirons pour $t \in \langle 0, a)$ l'inégalité $G(u(t)) \leqslant \text{const} = c_1$, d'où $-\mu \leqslant F(u) \leqslant c_1 - \mu$. Puisque $\lim F(u) = +\infty$ quand $|u| \to +\infty$, il existe donc deux nombres u_1 et u_2 tels que $F(u_1) = c_1 - \mu$ et $F(u) > c_1 - \mu$ pour $u < u_1$, et $F(u_2) = c_1 - \mu$ et $F(u) > c_1 - \mu$ pour $u > u_2$. Ainsi, pour l'intégrale $u(t)$, satisfaisant aux conditions initiales $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$, on a l'inégalité $u_1 \leqslant u(t) \leqslant u_2$ pour $t \in \langle 0, a)$.

Remarque 2. Si l'on admet dans le théorème (2) $a'(t) \geqslant 0$, alors on obtient un théorème établi par J. A. Klokoff ([8], p. 190). Des résultats plus généraux ont été donnés dans la note [6].

Passons maintenant à l'équation différentielle

$$(k(t)u')' + l(t)/k(t) f(u) = 0 . \tag{7}$$

Nous admettons que les fonctions $k(t)$ et $l(t)$ sont positives et continues dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$. La transformation

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{k(\tau)} d\tau \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, \infty) \tag{7'}$$

change l'équation (7) en

$$v''(s) + l(t(s)) f(v(s)) = 0 , \tag{8}$$

où $t(s)$ est la fonction inverse de $s(t)$. La solution de cette dernière équation est la fonction $v(s) = u(t(s))$ si, et seulement si, la fonction $u(t)$ est solution de l'équation (7). La fonction $s(t)$ est positive et croissante pour $t \in \langle 0, \infty)$. L'ensemble des valeurs de la fonction $s(t)$ constitue un intervalle $\langle 0, \beta)$, où

$$\beta = \int_0^\infty \frac{1}{k(t)} dt .$$

Si, pour $t \geqslant 0$, $u(t)$ est intégrale de l'équation (7), alors $v(s) = u(t(s))$ pour $0 \leqslant s < \beta$ est intégrale de l'équation (8) et inversement. L'ensemble des valeurs de la fonction $u(t)$ pour $t \in \langle 0, \infty)$ est identique à celui des valeurs de la fonction $v(s) = u(t(s))$ pour $s \in \langle 0, \beta)$. Il en résulte que les ensembles des valeurs des fonctions $F(u(t))$ pour $t \in \langle 0, \infty)$ et $F(v(s))$ pour $s \in \langle 0, \beta)$ sont identiques. On peut observer que, si $u(t)$ est une fonction croissante (décroissante), alors la fonction correspondante $v(s)$ est croissante (décroissante), puisque la fonction $s(t)$ est croissante.

HYPOTHÈSE H_1^*. Les fonctions $k(t)$ et $l(t)$ sont positives et continues dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$; la dérivée $l'(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et satisfait à l'une au moins des conditions:

1° $l'(t) \geqslant 0$ pour $t \in \langle 0, \infty)$,

2° $l(t) \geqslant \delta > 0$ et $\int_0^\infty |l'(t)| k(t)\, dt < +\infty$ pour $t \in \langle 0, \infty)$.

La fonction $f(u)$ satisfait aux mêmes conditions que dans l'hypothèse H_1.

THÉORÈME 3. *Admettons que les fonctions* $k(t), l(t)$ *et* $f(u)$ *satisfassent à l'hypothèse* H_1^*. *Alors chaque solution* $u(t)$ *de l'équation différentielle* (7) *existe dans tout l'intervalle* $\langle 0, \infty)$. *Cette solution est bornée, ainsi que sa dérivée* $u'(t)$, *dans l'intervalle* $\langle 0, \infty)$.

La démonstration de ce théorème est basée sur les propriétés de transformation de (7') et sur le théorème 2.

II. Dans la seconde partie de cette note, je me propose de donner une condition suffisante pour que toutes les solutions de l'équation différentielle (1) soient non oscillantes.

HYPOTHÈSE H_2. La fonction $g(t, u)$ est définie et continue dans le domaine $D_2\{t \geqslant t_0, -\infty < u < +\infty\}$ et elle y satisfait à la condition $g(t, u)u > 0$ pour $u \neq 0$.

THÉORÈME 4. *Admettons que la fonction* $g(t, u)$ *satisfasse à l'hypothèse* H_2. *Alors chaque solution* $u(t)$ *de l'équation différentielle*

$$u''(t) - g(t, u(t)) = 0 , \tag{9}$$

ne s'annulant pas (1) *dans un intervalle tout entier, définie pour* $t \geqslant t_0$, *possède tout au plus un zéro* (*exactement: le produit* $u(t)u'(t)$ *s'annule une fois tout au plus pour* $t \geqslant t_0$).

Démonstration. Soit $u(t)$ une solution de l'équation (9) telle que nous avons considérée plus haut. Prenons la fonction $\varphi(t) = u(t)u'(t)$. Alors $\varphi'(t) = g(t, u(t))u(t) + (u'(t))^2 \geqslant 0$. Cela veut dire que le produit $u(t)u'(t)$ est une fonction non décroissante, il peut donc admettre tout au plus un zéro. Les solutions de l'équation (9) sont donc, au moins à partir d'un certain point, monotones.

Remarque. On peut aussi appliquer le théorème précédent à l'équation différentielle

$$(k(t)u')' - l(t)/k(t) f(u) = 0 , \tag{10}$$

dans laquelle les fonctions $k(t) > 0$ et $l(t) \geqslant 0$ sont continues pour $t \geqslant t_0$, et la fonction $f(u)$ est continue pour $u \in (-\infty, +\infty)$ et satisfait à la con-

(1) Au lieu de supposer que les solutions ne s'annulent pas dans un certain intervalle, on peut admettre la condition d'unicité des solutions pour l'équation différentielle (9).

dition $f(u)u > 0$ pour $u \neq 0$. Cela résulte des propriétés de transformation de (7') et du théorème précédent.

La dernière remarque généralise la condition connue de non oscillation des solutions de l'équation différentielle

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

(voir [12], vol I, chap. IV, § 2) qu'on obtient de l'équation (10) en posant $f(u) = u$.

III. Dans cette partie, nous étudions l'oscillation de toutes les solutions de l'équation différentielle (1) dans l'intervalle $t \geqslant t_0$.

HYPOTHÈSE H_3. La fonction $g(t, u)$ satisfait à l'hypothèse H_2 et on a en outre $\int^{\infty} g\big(t, v(t)\big)\,dt = +\infty$ $(-\infty)$, où $v(t) > 0$ (< 0) est une fonction arbitraire, définie et continue pour $t \geqslant t_0$ et $v(t)$ est non décroissante (non croissante) dans cet intervalle.

Remarque. L'hypothèse H_3 est vérifiée, par exemple, quand $g(t, u) = a(t)f(u)$ $(a(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$ et $f(u)u > 0$ pour $u \neq 0)$ et ces fonctions satisfont au moins à l'une des conditions

a) $\int^{\infty} a(t)\,dt = +\infty$ et $\liminf |f(u)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ pour $|u| \to +\infty$,

b) $a(t) \geqslant \delta > 0$ et $\lim\limits_{|u|\to\infty} F(u) = +\infty$, où $F(u) = \int_0^u f(x)\,dx$.

THÉORÈME 5. *Admettons que la fonction $g(t, u)$ satisfasse à l'hypothèse H_3. Alors chaque solution $u(t)$ de l'équation* (1), *définie pour $t \geqslant t_0$, oscille autour de la droite $u = 0$, et l'ensemble des zéros n'est pas borné.*

Démonstration. Admettons qu'il existe une solution $u(t) > 0$ (< 0) pour $t \geqslant t_0$. Donc $u'(t)$ n'est pas croissante pour $t \geqslant t_1$. Si l'on avait $u'(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_1$ alors

$$u'(t) = u'(t_1) - \int_{t_1}^{t} g\big(\tau, u(\tau)\big)\,d\tau\,, \tag{11}$$

d'où, en vertu des propriétés de la fonction $g(t, u)$ nous aurions $\lim u'(t) = -\infty$ quand $t \to +\infty$. Mais $u(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$, donc il est impossible que $\lim u'(t) = -\infty$ quand $t \to +\infty$. Il existe un tel $t_2 \geqslant t_1$, que $u'(t_2) < 0$. De l'égalité

$$u'(t) = u'(t_2) - \int_{t_2}^{t} g\big(\tau, u(\tau)\big)\,d\tau\,, \tag{11'}$$

nous déduisons que $u'(t)$ pour $t \geqslant t_2$ est négative et décroissante, donc la fonction $u(t)$ devrait s'annuler, ce qui est absurde.

La contradiction achève la démonstration du théorème.

Remarque 1. Pour que le théorème précédent soit vrai, il ne suffit pas que $g(t, u)u > 0$ pour $u \neq 0$. La condition $\int^{\infty} g\big(t, v(t)\big)\,dt = +\infty$ $(-\infty)$ est essentielle, parce que l'équation différentielle $u'' + \frac{1}{4}\big(1 + (u^2 - t)^2\big)u^{1/3}t^{-5/3} = 0$ $(t > 0$, u arbitraire) satisfait à la condition $g(t, u)u > 0$ pour $u \neq 0$. Si l'on admet $v(t) = t^{1/2}$, alors $\int^{\infty} g(t, t^{1/2})\,dt < +\infty$, la dernière équation possède une solution non oscillante $u(t) = t^{1/2}$.

Remarque 2. Du dernier théorème résulte aussi le corollaire suivant (voir les propriétés de transformation de (7')): Admettons que les fonctions $k(t)$ et $l(t)$ soient positives et continues pour $t \geqslant t_0$, $\int^{\infty} 1/k(t)\,dt = +\infty$. La fonction $f(u)$ est définie et continue pour $u \in (-\infty, +\infty)$, et $f(u)u > 0$ pour $u \neq 0$. Si l'une au moins des deux conditions

a) $\int^{\infty} l(t)/k(t)\,dt = +\infty$ et $\liminf\limits_{|u|\to\infty} |f(u)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$,

b) $l(t)/k(t) \geqslant \delta > 0$ et $\lim\limits_{|u|\to\infty} F(u) = +\infty$ quand $F(u) = \int_0^u f(x)\,dx$,

est vraie, alors chaque solution $u(t)$ de l'équation différentielle (7), définie pour $t \geqslant t_0$, oscille autour de $u = 0$ et possède un ensemble des zéros non borné supérieurement. Le dernier théorème généralise dans un certain sens le théorème connu relatif à l'équation différentielle linéaire ([13], p. 254).

IV. Nous passons maintenant à la démonstration de quelques théorèmes sur les solutions monotones de l'équation différentielle (7) et sur les limites finies de ces solutions.

THÉORÈME 6. *Considérons l'équation différentielle* (7) *dans laquelle la fonction $k(t)$ est positive et continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$. Admettons de plus que $\beta = \int^{\infty} 1/k(t)\,dt < +\infty$ et que $\lim l(t) = l$ existe quand $t \to +\infty$ et $0 < l < +\infty$. Si l'on peut appliquer le théorème* 2, *à l'équation différentielle*

$$v''(s) + \gamma(s) f\big(v(s)\big) = 0\,, \tag{12}$$

dans laquelle

$$\gamma(s) = \begin{cases} l\big(t(s)\big) & \textit{pour} \quad s \in \langle 0, \beta)\,, \\ l & \textit{pour} \quad s \geqslant \beta\,, \end{cases}$$

alors l'intégrale $u(t)$ de l'équation (7), *définie dans l'intervalle $t \geqslant 0$, tend vers une constante, quand $t \to +\infty$.*

Démonstration. En vertu des hypothèses admises, l'intégrale $v(s)$ existe et elle est bornée dans l'intervalle $t \geqslant 0$. Il existe donc un $\lim v(s) = g$ quand $s \to \beta - 0$, c'est-à-dire pour chaque $\varepsilon > 0$ on a un intervalle $\langle s_1, \beta)$

tel que si $s \in \langle s_1, \beta)$, alors $|v(s)-g| < \varepsilon$. A l'intervalle $\langle s_1, \beta)$ correspond, par la transformation inverse de la transformation (7'), l'intervalle $\langle t_1, \infty)$. Comme l'ensemble des valeurs $v(s)$ pour $s \in \langle s_1, \beta)$ soit égal à l'ensemble des valeurs de l'intégrale correspondante $u(t)$ de l'équation différentielle (7) pour $t \in \langle t_1, \infty)$, l'intégrale $u(t)$ tend vers une constante, quand $t \to +\infty$.

Définition 1. Nous dirons que la fonction $u(t) \not\equiv \mathrm{const}$ est *oscillante* autour de $u = u_0$, quand $t \to a$, s'il existe une suite infinie de nombres t_n, $n = 1, 2, \ldots$ telle que $t_n \to a$ et $u(t_n) = u_0$.

Lemme 1. *La fonction $f(u)$, définie comme dans le théorème 2, doit changer de signe au moins une fois.*

Démonstration. Si $f(u)$ ne changeait pas de signe pour $u \in (-\infty, +\infty)$, on n'aurait pas $F(u) \to +\infty$ quand $|u| \to +\infty$.

Définition 2. Un zéro de la fonction $f(u)$, dans le voisinage duquel cette fonction change de signe, sera dit *zéro essentiel* de cette fonction.

Lemme 2. *Considérons l'équation différentielle* (7), *dans laquelle les fonctions $k(t)$ et $l(t)$ sont positives et continues dans l'intervalle $t \geqslant 0$. La fonction $f(u)$ satisfait aux mêmes conditions que dans le théorème* 2. *Admettons que la fonction $u(t)$, satisfaisant aux conditions initiales données $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_0'$, soit une intégrale de l'équation* (7), *définie et bornée dans l'intervalle $t \geqslant 0$.*

Nous allons démontrer:

a) *qu'il existe un l tel que $\lim\big(u(t)-l\big) = 0$ quand $t \to +\infty$, ou bien*

b) *que $\lim u(t)$ n'existe pas pour $t \to +\infty$ et alors il existe un nombre u^* qui est un zéro essentiel de la fonction $f(u)$ et la solution $u(t)$ oscille autour de $u = u^*$ pour $t \to \infty$. Si $\lim u(t) = l$ existe, quand $t \to +\infty$, et si le nombre l n'est pas un zéro essentiel de la fonction $f(u)$, alors $u(t)$ tend vers l d'une façon monotone, lorsque $t \to +\infty$.*

Démonstration. En vertu des propriétés de transformation de (7') il suffit, au lieu de la solution $u(t)$, de considérer une solution correspondante $v(s)$ de l'équation (8). Supposons que $\lim v(s)$ pour $s \to \beta - 0$ n'existe pas. Alors $\limsup v(s) = M$ et $\liminf v(s) = m$ existent quand $s \to \beta - 0$ et $M > m$. S'il existait un zéro essentiel v_1 de la fonction $f(v)$ tel que $m < v_1 < M$, alors $v(s)$ oscillerait autour de $v = v_1$. Admettons que dans l'intervalle (m, M) il n'existe pas de zéro essentiel de la fonction $f(v)$.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, m ou M sont des zéros essentiels de la fonction $f(v)$. Dans le cas où ni m, ni M ne serait pas un zéro essentiel de la fonction $f(v)$, il devrait exister des nombres $\varepsilon > 0$ et $s_1 < \beta$, tels que pour $s \in \langle s_1, \beta)$ on ait l'inégalité $m - \varepsilon < v(s) < M + \varepsilon$ et que l'intervalle $(m-\varepsilon, M+\varepsilon)$ ne contienne plus de zéros essentiels de la fonction $f(v)$. Il résulte de l'équation (8) que pour $s \in \langle s_1, \beta)$ la dérivée $v''(s)$ ne change pas de signe, c'est-à-dire $v(s)$ est monotone, au moins à partir d'un s_2 $(\beta > s_2 \geqslant s_1)$. Donc, pour $\beta > s \geqslant s_2$, la fonction $v(s)$ est monotone et bornée. Il existe donc $\lim v(s) = l$ quand $s \to \beta - 0$. Il en résulte que le nombre m ou M est un zéro essentiel de la fonction $f(v)$.

L'intégrale $v(s)$ doit osciller au moins autour d'une constante $v = m$ ou $v = M$, qui est un zéro essentiel de la fonction $f(v)$. Si $v(s)$ n'oscillait pas autour de $v = m$ ni $v = M$, $v''(s)$ ne changerait pas de signe, donc $v(s)$ devrait être monotone à partir d'un certain point.

Du dernier lemme et du théorème 2 résulte:

Théorème 7. *Admettons que les fonctions $k(t)$, $l(t)$ et $f(u)$ satisfassent à l'hypothèse H_1^*. Dans ces conditions, l'ensemble des solutions de l'équation* (7), *définies pour $t \geqslant 0$, peut être divisé en deux classes A et B, définies comme suit: $u(t) \in A$, s'il existe un nombre l tel que $\lim\big(u(t)-l\big) = 0$, quand $t \to +\infty$. $u(t) \in B$, si $u(t)$ n'appartient pas à la classe A. Il existe alors une constante $u = u^*$, qui est un zéro essentiel de la fonction $f(u)$, autour de laquelle oscille l'intégrale $u(t)$ quand $t \to +\infty$.*

Corollaire 1. Considérons l'équation différentielle $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$, dans laquelle la fonction $a(t) \in C^0$, $b(t) > 0$ et $b'(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$. En multipliant la dernière équation par $\exp\big(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\big)$ nous obtenons

$$\Big(\exp\Big(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\Big)u'\Big)' + b(t)\exp\Big(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\Big)u = 0\,. \tag{13}$$

Si pour la fonction $k(t) = \exp\big(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\big) > 0$ et $b(t)\exp\big(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\big)$ l'hypothèse H_1^* est remplie, alors, en vertu du théorème 7, toutes les solutions de l'équation (13) sont

1° bornées dans l'intervalle $t \geqslant 0$,

2° si les solutions de l'équation (13) sont non oscillantes dans l'intervalle $t \geqslant 0$, alors elles tendent vers des constantes d'une façon monotone, quand $t \to +\infty$.

On peut donner des exemples d'équations, telles que $u'' - tu' + \exp(t^2)u = 0$, auxquelles on peut appliquer le corollaire cité ci-dessus, mais auxquelles ne s'applique pas le théorème donné par Z. Opial [11]. On peut aussi appliquer la dernière remarque aux équations $u'' + tu' + \exp(\frac{1}{2}t^2)u = 0$ et $u'' + (t-3)^4(t-1)^{-4}u = 0$, auxquelles ne se rapportent pas les théorèmes, donnés par M. Matell [9] et généralisés par M. Zlámal ([16], th. 6 et th. 7).

Corollaire 2. En vertu du dernier corollaire on peut généraliser les théorèmes 3 et 4, donnés par M. Zlámal ([16], p. 80 et 81). Notamment

M. Zlámal démontre le théorème suivant: *Si* $\int^{\infty} a(s)^{-1}ds < +\infty$ *et* $a'(t)a(t)^{-2} \leqslant \delta < 1$, *alors l'équation*

$$u'' + a(t)u' + u = 0\,, \tag{14}$$

dans laquelle $a(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$ *possède une solution, tendant vers une constante différente de zéro.* En vertu du corollaire 1 on peut obtenir, avec les mêmes hypothèses sur la fonction $a(t)$, que chaque solution $u(t)$ de l'équation (14) tende vers une constante d'une façon monotone, quand $t \to +\infty$.

Dans la même note, M. Zlámal démontre aussi le théorème suivant (p. 81): *Si* $a'(t) \geqslant 1$ *et* $\int^{\infty} \big(a(s)\big)^{-1}ds < \infty$, *alors l'équation* (14) *possède une solution, tendant d'une façon monotone vers une constante, différente de zéro.* On peut vérifier que pour le théorème 4, donné par M. Zlámal, les hypothèses du corollaire sont vraies. En vertu de ce fait chaque intégrale tend d'une façon monotone vers une constante, quand $t \to +\infty$.

COROLLAIRE 3. Considérons l'équation différentielle

$$\varepsilon(t)u'' + u' + u = 0\,, \tag{15}$$

dans laquelle $\varepsilon(t) > 0$ et possède une dérivée $\varepsilon'(t) \leqslant 2$ pour $t \geqslant t_0$. Comme dans le corollaire 1, on peut montrer que les solutions de l'équation (15) sont bornées pour $t \geqslant t_0$. On connaît des résultats plus forts pour l'équation (15), quand $0 < \varepsilon(t) \leqslant \frac{1}{2}$ (voir [16], th. 5, et [5]).

THÉORÈME 8. *Examinons l'équation différentielle* (7), *dans laquelle la fonction* $k(t)$ *est positive et continue pour* $t \geqslant 0$ *et* $\int^{\infty} 1/k(t)\,dt < +\infty$. *Admettons que* $\lim l(t) = g$ *existe quand* $t \to +\infty$ *et* $0 < g < +\infty$. *Si le théorème* 2 *se rapporte à l'équation* (12) *et si la fonction* $f(v)$ *satisfait à la condition* $f(v)v > 0$ *pour* $v \neq 0$, *alors la solution* $u(t)$ *de l'équation différentielle* (7) *est définie pour* $t \geqslant t_0$, *elle est oscillante et tend vers zéro, quand* $t \to +\infty$.

Démonstration. Des hypothèses admises résultent les théorèmes 5 et 6, ce qui démontre la conclusion.

V. Nous passons maintenant à la démonstration de quelques théorèmes sur les solutions de l'équation différentielle

$$u''(t) + a(t)\Phi\big(u(t)\big)\Phi'_u\big(u(t)\big) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0\,, \tag{16}$$

dont les suites des extêmes sont monotones.

HYPOTHÈSE H_4. La fonction $\Phi(u)$ appartient à la classe C^1 pour $u \in (-\infty, +\infty)$ et $\Phi(u)\Phi'_u(u)u > 0$ pour $u \neq 0$. La fonction $a(t) > 0$ et il existe un $a'(t)$, ne changeant pas de signe pour $t \geqslant t_0$.

COROLLAIRE. La fonction $\big(\Phi(u)\big)^2$ est décroissante pour $u \in (-\infty, 0)$ et croissante pour $u \in (0, +\infty)$.

THÉORÈME 9. *Admettons que les fonctions* $a(t)$ *et* $\Phi(u)$ *satisfassent à l'hypothèse* H_4. *Soit* $u(t)$ *une solution de l'équation différentielle* (16), *définie et oscillante pour* $t \geqslant t_0$. *Alors les suites des maxima et minima sont monotones. Plus précisément, si* $a'(t) \geqslant 0$ *pour* $t \geqslant t_0$, *alors la suite des maxima est non croissante, et celle des minima est non décroissante, pour* $t \geqslant t_0$.

Mais si $a'(t) \leqslant 0$ *pour* $t \geqslant t_0$, *alors, inversement, la suite des maxima est non décroissante, et celle des minima est non croissante pour* $t \geqslant t_0$.

Si la fonction $\Phi(u)\Phi'_u(u)$ *était impaire,* $\Phi(u)\Phi'_u(u) = \Phi(-u)\Phi'_u(-u)$, *les modules des ectrêmes de l'intégrale* $u(t)$ *formeraient une suite monotone.*

Démonstration. Considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(t) = \Big(\Phi\big(u(t)\big)\Big)^2 + \big(u'(t)\big)^2/a(t)\,.$$

On aura

$$\varphi'(t) = -\frac{\big(u'(t)\big)^2}{\big(a(t)\big)^2}\,a'(t)\,.$$

Si $a'(t) \geqslant 0$, alors $\varphi'(t) \leqslant 0$ et $\varphi(t)$ n'est pas croissante pour $t \geqslant t_0$. Soient, par exemple, $t_1 < t_2 < \ldots$ les abscisses des maxima consécutifs de l'intégrale $u(t)$. On aura $\Phi\big(u(t_i)\big) > 0$ et $u'(t_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et la suite $\varphi(t_i) = \Big(\Phi\big(u(t_i)\big)\Big)^2$ est non croissante, d'où il résulte que la suite $u(t_i)$ est aussi non croissante. Les autres parties de la démonstration sont analogues.

Le dernier théorème reste en étroit rapport avec certains théorèmes, donnés dans [12], vol. II, chap. VII, § 4.

Remarque. Admettons que la fonction $l(t) = a(t)$ et $\Phi(u)$ satisfasse à l'hypothèse H_4. La fonction $k(t) > 0$ est continue pour $t \geqslant t_0$ et $\int^{\infty} 1/k(t)\,dt = +\infty$. Dans ces hypothèses les suites des maxima et des minima d'une solution arbitraire $u(t)$ de l'équation différentielle

$$\big(k(t)u'\big)' + l(t)\Phi(u)\Phi'_u(u) = 0\,, \tag{17}$$

définie et oscillante pour $t \geqslant t_0$, sont monotones. Plus précisément: quand $l'(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0$, la suite des maxima est non croissante et celle des minima est non décroissante. Quand $l'(t) \leqslant 0$, la suite des maxima est non décroissante et celle des minima est non croissante.

La démonstration résulte des propriétés de transformation de (7').

Travaux cités

[1] R. Bellman, *Stability theory of differential equation*, New York 1953.

[2] Z. Butlewski, *Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre*, Mathematica, Cluj, 12 (1936), p. 36-48.

[3] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Berlin 1959.

[4] N. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, New York 1955.

[5] T. Dłotko, *O zachowaniu się całek równania różniczkowego* $a(t)u''+b(t)u'+k^2u^a = \Phi(t)$, Zeszyty Nauk. W.S.P. w Katowicach, Nr 2 (1959), p. 11-18.

[6] — *Quelques théorèmes sur les intégrales bornees de certaines équations différentielles ordinaires*, Ann. Pol. Math. 10 (1961), p. 151-159.

[7] J. Kisyński, *Remarque sur l'existence des solutions en large de l'équation* $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, Ann. UMCS 13 (1959), p. 25-32.

[8] J. A. Klokoff (Ю. А. Клоков), *Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Успехи Мат. Наук, T. XIII, вып. 2 (80), 1958, p. 189-194.

[9] M. Matell, *Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differentialgleichungen*, Uppsala 1924, Appelbergs Boktryckeri Aktiebolag.

[10] W. W. Niemyckij, W. W. Stiepanow (В. В. Немыцкий и В. В. Степанов), *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва 1949.

[11] Z. Opial, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle* $u''+a(t)u'+b(t)u = 0$, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 5 (1957), p. 847-853.

[12] G. Sansone, *Equazioni Differenziali Nel Campo Reale*, Parte Prima, Bologna 1948, Parte Seconda, Bologna 1949.

[13] W. W. Stiepanow (В. В. Степанов), *Курс дифференциальных уравнений*, Москва 1953.

[14] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 112-167.

[15] A. Wintner, *The nonlocal existence problem of ordinary differential equations*, Amer. J. Math. 67 (1945), p. 277-284.

[16] M. Zlámal, *Über Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Czechoslovak. Math. J. 6 (81) (1956), p. 75-91.

Reçu par la Rédaction le 22. 6. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Existence of Lyapunov functions

by J. Dugundji * (Los Angeles, Calif.)

1. Introduction. We consider here the stability of the solutions of a non-autonomous system of differential equations $\dot{x} = X(x, t)$, where (1) X is continuous on $H\times J_0$, $H\subset E^n$ being a connected open set. There is no loss of generality to assume that the solution whose stability is being considered is $x = 0$, so that $X(0, t)\equiv 0$. We moreover assume throughout this article: for each $(x_0, t_0)\in H\times J_0$ there exists a unique solution $x = x(t; x_0, t_0)$ in H which depends continuously on (x_0, t_0), equals x_0 for $t = t_0$, and is defined for all $t\geqslant 0$; thus, we can take $H = E^n$ with no loss in generality.

The definition of uniform stability of $x = 0$ can be stated in the following (normalized (2)) way [1]: For each cylinder $C_n\equiv S(0, 1/n)\times\mathring{J}_{1-1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$, there exists a C_m, $m\geqslant n$, such that every trajectory entering C_m remains thereafter in C_n; this type of stability is characterized by special properties of a Lyapunov function on $E^n\times J_0$, that is, a non-negative continuous real-valued function on $E^n\times J_0$ vanishing on $0\times J_1$, bounded positively below outside each C_k, and having a continuous non-positive trajectory derivative (3) on $E^n\times J_0$. Now, if instead of cylinders, one is given a sequence $\{U_n\}$ of connected open sets in $E^n\times J_0$ with $0\times J_1 = \bigcap_n U_n$, then, replacing C_n by U_n in each of the above state-

* The author was partially supported by the National Science Foundation, under contract G-5251, during the period that this work was done.

(1) Throughout this article, E^n denotes Euclidean n-space, and $J_a\subset E^1$ the subspace $\{t \mid t\geqslant a\}$. Vector notation is used. $S(x, \varepsilon)$ is the spherical neighborhood (nbd) of x with radius ε; $\dot{A}$ = boundary of A; $\mathring{A}$ = interior of A; $\complement A$ = complement of A; $(x\,\bar{\epsilon}\,A)\equiv(x\,\varepsilon\,\complement A)$.

(2) The normalization consists in having the cylinders pinch down on $0\times J_1$ rather than on some other $0\times J_a$.

(3) For each $(x_0, t_0)\in E^n\times J_0$, the trajectory derivative $V'(x_0, t_0)$ is the derivative $\frac{d}{dt}V[x(t; x_0, t_0), t]$ evaluated at $t = t_0$. We call a Lyapunov function *proper* (or simply "Lyapunov function") if $V'(x_0, t_0)$ is continuous on $E^n\times J_0$; it is called "split" if $V'(x_0, t_0)$ is continuous only on $\complement(0\times J_0)$.