ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Évaluations des solutions de l'équation linéaire du type parabolique à coefficients non bornés

par M. KRZYŻAŃSKI (Kraków)

1. Dans un travail récent, publié en collaboration avec A. Szybiak [4] nous avons déterminé la solution fondamentale de l'équation linéaire parabolique

$$(1)\qquad \mathcal{F}[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)u''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(t, X)u'_{x_k} + c(t, X)u - u'_t = 0\,,$$

X étant un point variable de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}^m$ à m dimensions. Les coefficients $a_{ij}(t, X)$ et $b_k(t, X)$ étaient supposés bornés et assez réguliers dans une couche $\mathcal{C}$: $X \in \mathcal{E}^m$, $S < t < T$ (dans le présent travail nous supposons que $S = 0$) et, par hypothèse, il existait un nombre $A_0 > 0$ tel que

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)\lambda_i\lambda_j \geqslant A_0|\Lambda|^2$$

pour tout point $(t, X) \in \mathcal{C}$ et pour tout vecteur $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Le coefficient $c(t, X)$ était supposé continu dans $\mathcal{C}$, lipschitzien par rapport à X et on supposait l'existence des nombres constants $A > 0$ et $B > 0$ tels qu'on eût dans $\mathcal{C}$

$$|c(t, X)| \leqslant A^2|X|^2 + B\ (^1)\,, \qquad \text{où} \qquad |X| = \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Ces hypothèses concernant le coefficient $c(t, X)$ étaient appelées brièvement hypothèses (H).

La solution fondamentale $U(t, X; s, Y)$ de l'équation (1), qui a été déterminée dans [4], est continue dans un ensemble $\mathcal{S}$: $X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$, $0 \leqslant s < t < T$, $0 < t - s < T(A)$, le nombre $T(A) \leqslant T$ dépendant en général de A; elle admet des dérivées des deux premiers ordres par rapport aux variables x_i et y_i et des dérivées du premier ordre par rapport aux variables t et s continues à l'intérieur de cet ensemble. La fonction $U(t, X; s, Y)$ satisfait à l'équation adjointe à (1) en tant que fonction de s et Y.

(1) J'ai démontré qu'on peut déterminer la solution fondamentale jouissant des mêmes propriétés si l'on a $c(t, X) \leqslant A^2|X|^2 + B$. Ce résultat n'est pas encore publié.

Soit $\varphi(X)$ une fonction continue et de classe E_2 [2] dans $\mathcal{E}^m$. L'intégrale

$$u(t, X) = \int_{\mathcal{E}^m} U(t, X; 0, Y)\varphi(Y)\,dY \tag{2}$$

constitue la solution unique (voir [3]) de (1) régulière [3] dans une couche C: $0 \leqslant t < T'$, $X \in \mathcal{E}^m$ $(T' \leqslant T)$, de classe E_2 et satisfaisant à la condition initiale

$$u(0, X) = \varphi(X) \quad \text{pour} \quad X \in \mathcal{E}^m .$$

Soient $c_1(t, X)$ et $c_2(t, X)$ deux fonctions satisfaisant aux hypothèses (H). Posons

$$\mathcal{F}_0[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)\,u''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(t, X)\,u'_{x_k} - u'_t$$

et soient $U_r(t, X; s, Y)$ $(r = 1, 2)$ les solutions fondamentales des équations

$$\mathcal{F}_0[u] + c_r(t, X)u = 0 .$$

D'après le théorème 7 de [4], si $c_1(t, X) \leqslant c_2(t, X)$ dans $\mathcal{C}$, on a aussi $U_1(t, X; s, Y) \leqslant U_2(t, X; s, Y)$ dans $\mathcal{S}$. Le théorème reste valable lorsque $T = \infty$ et les fonctions $U_r(t, X; s, Y)$ existent pour $X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$ et $0 < t-s < \infty$.

Dans le présent travail nous allons établir certaines évaluations des solutions de l'équation (1) suivant l'allure du coefficient $c(t, X)$ [4].

2. Dans le cas particulier de l'équation

$$\Delta w - w'_t + (\alpha^2 |X|^2 + \beta)w = 0 \tag{3}$$

$\left(\Delta w = \sum_{i=1}^{m} w''_{x_ix_i}\right)$, $\alpha > 0$ et β étant deux nombres constants, la solution fondamentale a été déterminée effectivement par A. Szybiak (voir [4]), à savoir

$$W(t, X; s, Y) = \left[\frac{2\pi}{\alpha}\sin 2\alpha(t-s)\right]^{-m/2} \exp\Big[-\frac{\alpha}{2}(|X|^2 + |Y|^2)\operatorname{ctg} 2\alpha(t-s) + \\ + \alpha X\cdot Y \sin^{-1} 2\alpha(t-s) + \beta(t-s)\Big] \quad (X \in \mathcal{E}^m,\ Y \in \mathcal{E}^m,\ 0 < t-s < \pi/2\alpha)$$

(où $X\cdot Y = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k$). Soit μ un nombre positif. La fonction

$$w_\mu(t, X) = \mu \int_{\mathcal{E}^m} W(t, X; 0, Y)\,dY$$

constitue, d'après la formule (2), la solution (unique) de (3) régulière et de classe E_2 dans la couche $0 \leqslant t < \pi/4\alpha$, $X \in \mathcal{E}^m$ et satisfaisant à la condition initiale $w_\mu(0, X) = \mu$. En effectuant des calculs convenables, on obtient pour $w_\mu(t, X)$ l'expression suivante

$$w_\mu(t, X) = \mu(\cos 2\alpha t)^{-m/2} \exp\left[\frac{\alpha}{2}|X|^2 \operatorname{tg} 2\alpha t + \beta t\right]. \tag{4}$$

Considérons l'équation

$$\Delta u - u'_t + c(t, X)u = 0 , \tag{5}$$

où la fonction $c(t, X)$ est définie dans une couche $0 \leqslant t < t_0$, $X \in \mathcal{E}^m$ (il peut arriver que $t_0 = \infty$) et y satisfait aux hypothèses (H). Supposons que l'on ait

$$c(t, X) \geqslant \alpha^2 |X|^2 + \beta$$

$\alpha > 0$ et β étant des nombres constants. Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (5) régulière et de classe E_2 dans une couche $0 \leqslant t < T''$, $X \in \mathcal{E}^m$ $(T'' \leqslant \min(t_0, \pi/4\alpha))$ et telle que $u(0, X) \geqslant \mu$. Il résulte du théorème 7 de [4] (que nous venons de citer) et de la formule (2) qu'on a $u(t, X) \geqslant w_\mu(t, X)$; par conséquent, il existe deux nombres positifs $\overline{M}$ et $\overline{K}$ tels que l'on a

$$u(t, X) \geqslant \overline{M} \exp(\overline{K}|X|^2 \operatorname{tg} 2\alpha t) \quad (t \in (0, T''),\ X \in \mathcal{E}^m) .$$

3. Il en est tout autrement, si le coefficient $c(t, X)$ de l'équation (5) vérifie (outre les hypothèses (H)) l'inégalité

$$c(t, X) \leqslant -\alpha^2 |X|^2 + \beta , \tag{6}$$

$\alpha > 0$ et β étant des nombres constants. Dans le cas particulier $c(t, X) = -\alpha^2 |X|^2 + \beta$ la solution fondamentale de (5) a été déterminée effectivement par A. Szybiak dans la note [5], à savoir

$$V(t, X; s, Y) = \left[\frac{2\pi}{\alpha}\sinh 2\alpha(t-s)\right]^{-m/2} \times \\ \times \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(|X|^2 + |Y|^2)\operatorname{ctgh} 2\alpha(t-s) + \alpha X\cdot Y \sinh^{-1} 2\alpha(t-s) + \beta(t-s)\right] \tag{7}$$

et cette solution fondamentale est définie dans l'ensemble $0 < t-s < \infty$, $X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$. La solution $v_\mu(t, X)$ de (5), régulière et de classe E_2 pour

---

[2] Nous appelons E_a une classe de fonctions $f(X)$ qui sont définies dans $\mathcal{E}^m$ (ou dans un ensemble non borné de $\mathcal{E}^m$) et y satisfont à l'inégalité

$$|f(X)| \leqslant M \exp(K|X|^a) ,$$

où M et K sont deux nombres constants positifs qui dépendent de la fonction $f(X)$. Dans la suite nous appelerons aussi fonction de classe E_a une fonction de X et de t qui est de classe E_a en tant que fonction de X, les nombres M et K ne dépendant pas de t.

[3] C'est-à-dire continue dans C et admettant des dérivées du second ordre par rapport aux variables x_i et une dérivée du premier ordre par rapport à la variable t, continues à l'intérieur de C.

[4] Ces évaluations ont été prévues par A. Szybiak, mais il n'a pas précisé les hypothèses permettant de les établir.

$t \geqslant 0$, satisfaisant à la condition initiale $v_\mu(0, X) = \mu$, μ étant un nombre constant positif, calculée d'après la formule (2), s'exprime alors par la formule

$$(8)\qquad v_\mu(t, X) = \mu(\cosh 2at)^{-m/2}\exp\left[-\frac{a}{2}|X|^2 \operatorname{tgh} 2at + \beta t\right]$$

et on a $\lim_{|X|\to\infty} v_\mu(t, X) = 0$ (exponentiellement) pour $t > 0$ fixé.

Observons que, la fonction $\operatorname{tgh} 2at$ étant bornée, l'allure de $v_\mu(t, X)$ pour $t\to\infty$, lorsque X est fixé, est la même que celle de l'expression

$$v^{(0)}(t, X) = (\cosh 2at)^{-m/2}e^{\beta t} = e^{(\beta - ma)t}\left[\frac{1+e^{-4at}}{2}\right]^{-m/2};$$

or l'allure de $v^{(0)}(t, X)$ pour $t\to\infty$ dépend du signe de la différence $\beta - ma$ [5].

Supposons maintenant que le coefficient $c(t, X)$ de l'équation (5) soit une fonction satisfaisant aux hypothèses (H) et à l'inégalité (6). Il résulte du théorème 7 de [4] et des formules (2) et (8) que, $u(t, X)$ étant une solution de l'équation (5) régulière et de classe E_2 pour $t \geqslant 0$, $X \in \mathcal{E}^m$ et telle que la fonction $\varphi(X) = u(0, X)$ soit bornée dans $\mathcal{E}^m$, on a l'inégalité

$$(9)\qquad |u(t, X)| \leqslant M(\cosh 2at)^{-m/2}\exp\left[-\frac{a}{2}|X|^2 \operatorname{tgh} 2at + \beta t\right]$$

où M est la borne supérieure de $|\varphi(X)|$ dans $\mathcal{E}^m$.

4. Nous allons voir qu'on peut démontrer un théorème beaucoup plus général. Considérons une équation parabolique de la forme (1) et supposons que ses coefficients soient définis pour $t > 0$, $X \in \mathcal{E}^m$, les coefficients $a_{ij}(t, X)$ $(i, j = 1, \dots, m)$ y étant bornés et la forme

$$\mathcal{A}[\Lambda] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)\lambda_i\lambda_j$$

y étant définie positive. Quant aux coefficients $b_k(t, X)$, nous supposons l'existence des nombres $A_1 \geqslant 0$ et $B_1 \geqslant 0$ tels que l'on ait

$$(10)\qquad |b_k(t, X)| \leqslant A_1|X| + B_1 \quad \text{pour} \quad t > 0, \quad X \in \mathcal{E}^m.$$

Enfin, nous supposons que le coefficient $c(t, X)$ satisfait à l'inégalité

$$(11)\qquad c(t, X) \leqslant -a^2|X|^2 + \beta \quad \text{pour} \quad t > 0, \quad X \in \mathcal{E}^m.$$

[5] L'influence de l'expression $\beta - ma$ sur l'allure de la solution fondamentale de l'équation de la forme (5), avec $c(t, X) = -a^2|X|^2 + \beta$, a été discutée dans le travail [5] de A. Szybiak.

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème. *Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation* (1) *régulière et de classe E_2 pour $t \geqslant 0$, $X \in \mathcal{E}^m$, telle que la fonction $\varphi(X) = u(0, X)$ soit bornée dans $\mathcal{E}^m$. On a l'inégalité*

$$(12)\qquad |u(t, X)| \leqslant M\exp[-\lambda|X|^2 \operatorname{tgh}\gamma t + \nu t],$$

M étant la borne supérieure de $|\varphi(X)|$ dans $\mathcal{E}^m$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$ et ν étant des nombres dépendant des coefficients $a_{ij}(t, X)$, des nombres A_1 et B_1 qui interviennent dans l'inégalité (10) *et des nombres a et β.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}$ le plus petit nombre positif tel que l'on ait

$$(13)\qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)\lambda_i\lambda_j \leqslant \mathfrak{A}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2$$

pour $t > 0$, $X \in \mathcal{E}^m$ et pour tout vecteur $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Il résulte de (10) que l'on peut déterminer un nombre non négatif $\mathfrak{B}$ de sorte que l'on ait

$$(14)\qquad \left|\sum_{k=1}^{m} b_k(t, X)x_k\right| \leqslant \mathfrak{B}(m + |X|^2) \quad \text{pour} \quad t > 0, \quad X \in \mathcal{E}^m;$$

supposons que $\mathfrak{B}$ soit le plus petit de tels nombres.

Nous introduisons une nouvelle fonction inconnue $v(t, X)$ en posant

$$u(t, X) = v(t, X)\exp[-\vartheta(t)|X|^2 + \omega(t)],$$

$\vartheta(t)$ et $\omega(t)$ étant deux fonctions non négatives et de classe C^1 pour $t \geqslant 0$, s'annulant pour $t = 0$, la fonction $\vartheta(t)$ y étant en outre bornée. Ces fonctions seront choisies convenablement dans la suite. La fonction $v(t, X)$ constitue pour $t > 0$, $X \in \mathcal{E}^m$ une solution de l'équation de la forme

$$(15)\qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)v''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{m}\bar{b}_k(t, X)v'_{x_k} + \bar{c}(t, X)v - v'_t = 0,$$

où l'on a

$$\bar{b}_k(t, X) = b_k(t, X) - 4\vartheta(t)\sum_{i=1}^{m} a_{ik}(t, X)x_i,$$

$$\bar{c}(t, X) = \vartheta'(t)|X|^2 + 4\big(\vartheta(t)\big)^2\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)x_ix_j -$$

$$-2\vartheta(t)\sum_{j=1}^{m} a_{jj}(t, X) - 2\vartheta(t)\sum_{k=1}^{m} b_k(t, X)x_k - \omega'(t) + c(t, X).$$

Il en résulte qu'il existe deux nombres $\bar{A}_1$ et $\bar{B}_1$ tels que

$$(16)\qquad |\bar{b}_k(t, X)| \leqslant \bar{A}_1|X| + \bar{B}_1 \quad \text{pour} \quad t > 0, \quad X \in \mathcal{E}^m \quad (k = 1, \dots, m).$$

D'autre part, en posant

$$a_0 = \min_{j\leqslant m}\Big[\inf_{t>0,\,X\in\mathcal{E}^m} a_{jj}(t,X)\Big],$$

on a, en vertu de (13) et (14)

$$(17)\qquad \bar{c}(t,X) \leqslant \big[\vartheta'(t)+4\mathfrak{A}\big(\vartheta(t)\big)^2+2\mathfrak{B}\vartheta(t)-a^2\big]|X|^2+ \\ +2m(\mathfrak{B}-a_0)\vartheta(t)+\beta-\omega'(t).$$

Nous allons choisir les fonctions $\vartheta(t)$ et $\omega(t)$ de façon à obtenir l'inégalité $\bar{c}(t,X)\leqslant 0$, ce qui permettra d'appliquer le théorème 2 de [3] à la fonction $v(t,X)$. Nous posons

$$(18)\qquad \vartheta(t) = \lambda \operatorname{tgh} 4\mathfrak{A}\lambda t \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0,$$

λ étant la racine positive de l'équation

$$4\mathfrak{A}\lambda^2+2\mathfrak{B}\lambda = a^2;$$

on a alors

$$(19)\qquad \vartheta'(t)+4\mathfrak{A}\big(\vartheta(t)\big)^2+2\mathfrak{B}\vartheta(t) = 4\mathfrak{A}\lambda^2+2\mathfrak{B}\lambda \operatorname{tgh} 4\mathfrak{A}\lambda \leqslant a^2 \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0.$$

Nous posons ensuite

$$(20)\qquad \omega(t) = \beta t+2m(\mathfrak{B}-a_0)\int_0^t \vartheta(\tau)\,d\tau = \beta t+\frac{m}{2\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}-a_0)\log\cosh 4\mathfrak{A}\lambda t;$$

on a alors, d'après (17) et (19), l'inégalité $\bar{c}(t,X)\leqslant 0$ pour $t>0$, $X\in\mathcal{E}^m$.

Comme $v(0,X)=u(0,X)$ et par suite $|v(0,X)|\leqslant M$ pour $X\in\mathcal{E}^m$, il résulte du théorème 2 de [3] que l'on a

$$|v(t,X)|\leqslant M \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0, \quad X\in\mathcal{E}^m.$$

On en déduit, en tenant compte de la définition de la fonction $v(t,X)$, l'inégalité

$$(21)\qquad |u(t,X)|\leqslant M(\cosh 4\mathfrak{A}\lambda t)^{\varrho}\exp[-\lambda|X|^2 \operatorname{tgh} 4\mathfrak{A}\lambda t+\beta t],$$

avec

$$\varrho = \frac{m}{2\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}-a_0).$$

Comme $\cosh y\leqslant e^y$ pour $y\geqslant 0$, on en tire l'évaluation (12) avec

$$\nu = \beta+2m\lambda(\mathfrak{B}-a_0), \qquad \gamma = 4\mathfrak{A}\lambda.$$

De l'inégalité (21) on déduit certaines conséquences concernant l'allure de la fonction $u(t,X)$ pour $t\to\infty$, notamment on a $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,X)=0$, si $\nu=\beta+2m\lambda(\mathfrak{B}-a_0)<0$.

Lorsque $b_k(t,X)\equiv 0$ $(k=1,\ldots,m)$ et par suite $\mathfrak{B}=0$, il vient

$$\lambda = \frac{a}{2\sqrt{\mathfrak{A}}};$$

alors l'inégalité (21) prend la forme

$$(22)\qquad |u(t,X)|\leqslant M(\cosh 2\sqrt{\mathfrak{A}}\,at)^{-ma_0/2\mathfrak{A}}\exp\Big[-\frac{a}{2\sqrt{\mathfrak{A}}}|X|^2 \operatorname{tgh} 2\sqrt{\mathfrak{A}}\,at+\beta t\Big].$$

En particulier si $a_{ij}(t,X)=0$ pour $i\neq j$ et $a_{ii}(t,X)=1$ $(i,j=1,\ldots,m)$, on a $\mathfrak{A}=1$ et l'inégalité (22) se réduit à l'inégalité (9) du n° 3.

5. Nous avons établi certaines évaluations des solutions de l'équation parabolique en admettant leur existence.

Si les coefficients de l'équation (1) satisfont aux hypothèses faites au n° 4 et si $c(t,X)\leqslant a^2|X|^2+\beta$ dans C, où a et β sont deux nombres constants, on peut démontrer l'existence d'une solution de l'équation (1) régulière et de classe E_2 dans une couche $0\leqslant t\leqslant\tilde{T}$, $X\in\mathcal{E}^m$ et satisfaisant à la condition initiale $u(0,X)=\varphi(X)$, où $\varphi(X)$ est une fonction continue, de classe E_2 dans $\mathcal{E}^m$, en appliquant le procédé exposé dans les travaux [1] et [2]. Cependant, il est alors nécessaire de faire l'hypothèse suivante: D étant un domaine cylindrique, séparé de l'intérieur de C par une surface $|X|=R$ (R étant un nombre positif), il existe une solution de l'équation (1) régulière dans la fermeture $\bar{D}$ de D et prenant des valeur données sur la surface latérale de D et pour $t=0$.

Si les coefficients $a_{ij}(t,X)$ et $b_k(t,X)$ $(i,j,k=1,\ldots,m)$ sont bornés pour $t>0$, $X\in\mathcal{E}^m$, la forme $\mathcal{A}[\Lambda]$ étant supposée définie positive, et si le coefficient $c(t,X)$ est borné supérieurement, on démontre de même l'existence d'une solution de l'équation (1) régulière et de classe E_1 dans ce demi-espace et satisfaisant à la condition initiale $u(0,X)=\varphi(X)$, où $\varphi(X)$ est une fonction de classe E_1, à condition de modifier l'hypothèse précédente en admettant pour D un domaine cylindrique séparé du demi-espace $t>0$, $X\in\mathcal{E}^m$ par une surface $X=R$. À cet effet, on reprend le même procédé en appliquant la fonction introduite au n° 9 de [1] au lieu du diviseur amortissant H (voir [1] et [2]).

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Ann. Soc. Polon. Math. 18 (1945), p. 145-156.

[2] — *Sur les solutionss de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales (note complémentaire)*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 7-9.

[3] — *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sc., Sér. des sc. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 131-135.

[4] M. Krzyżański et A. Szybiak, *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, Note I e II, Atti Accad. Naz. Lincei, cl. Sc. fis., mat. e natur., ser. VIII, 27 (1959), p. 1-10.

[5] A. Szybiak, *On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Equation* $\Delta u - \partial u/\partial t + c(x)u = 0$, Bull. Acad. Polon. Sc., Sér. des sc. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 183-186.

Reçu par la Rédaction le 25. 11. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

par T. Dłotko (Katowice)

Il existe une classe d'équations différentielles ordinaires du second ordre de la forme

$$u''(t) + g\big(t, u(t)\big) = 0, \tag{1}$$

possédant de nombreuses propriétés de l'équation différentielle linéaire $u''(t) + a(t)u(t) = 0$.

Je vais démontrer dans cette note les propriétés que voici: les solutions de l'équation (1) existent dans tout l'intervalle $\langle t_0, \infty)$, elles sont bornées, oscillantes ou non oscillantes, elles possèdent des asymptotes, les suites de leurs extrêmes sont monotones, etc.

En particulier, dans le cas où $g(t, u) = a(t)f(u)$, je généralise les résultats obtenus à l'équation différentielle $\big(k(t)u'\big)' + l(t)/k(t)f(u) = 0$.

En outre, les théorèmes demontrés entraînent, comme propositions, certains théorèmes établis par les auteurs [1], [2], [7], [8], [9], [12], [13], [15], [16].

Le trait caractéristique de cette note sera l'emploi de simples et brèves méthodes de démonstration.

J'ai l'honneur de remercier M. A. Bielecki pour ses précieuses remarques et suggestions, et M. Z. Opial pour son aide dans la rédaction de cette note.

I. Dans cette partie de la note nous allons démontrer un théorème qui, entre autres, assure l'existence des solutions de l'équation (1) dans l'intervalle $t \geq t_0$.

Théorème 1. *Considérons le système d'équations différentielles*

$$x_i'(t) = f_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

dans lequel les fonctions f_i sont définies et continues dans le domaine $D\{t \geq t_0, -\infty < x_i < +\infty, i = 1, \ldots, n\}$. Nous supposons qu'il existe une fonction $w(t, u)$ définie, continue et non négative dans le domaine $D_1\{t \geq t_0, u \geq 0\}$ et telle que l'équation différentielle

$$u'(t) = w\big(t, u(t)\big), \tag{3}$$

ait toutes ses solutions $u(t)$ définies dans tout l'intervalle $t \geq t_0$.