ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Sur l'équation des courbes sphériques

par Z. Moszner (Kraków)

§ 1. Dans les dernières années, on rencontre de plus en plus souvent, dans la littérature mathématique, des travaux consacrés aux démonstrations de théorèmes classiques de la géométrie différentielle moyennant un affaiblissement des hypothèses de régularité (voir le travail de M. Gołąb [1]). Une grande impulsion dans ce sens a été donnée par une série de travaux de M. M. Hartman et Wintner (voir la bibliographie à la fin du travail [1]). La présante note a précisément pour objet un théorème de ce type.

Une équation classique de la géométrie différentielle est celle des courbes sphériques, de la forme suivante:

$$\frac{1}{\varkappa^2}+\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right]^2=c^2 \qquad (c=\mathrm{const}) \tag{1}$$

où $\varkappa$ désigne la première courbure, τ la deuxième courbure (torsion) de la courbe C, sur laquelle la longueur de l'arc s constitute le paramètre.

Parmi les nombreuses démonstrations des théorèmes qui concernent l'équation (1), l'une des plus précises est celle qui est donnée dans le livre de M. Hoborski (voir [2], p. 23). Je donne ci-dessous les énoncés des deux théorèmes qui s'y rapportent.

Théorème 1. *Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(2) *la courbe C, d'équation paramétrique vectorielle $r=r(t)$, où $t\in\langle a,b\rangle$, est de classe C_3 dans $\langle a,b\rangle$ et $\dfrac{dr}{dt}\times\dfrac{d^2r}{dt^2}\neq\vec{0}$ dans $\langle a,b\rangle$,*

(3) *la courbe C est sphérique, c'est-à-dire elle est située sur une sphère,*

(4) *la deuxième courbure τ de cette courbe est différente de zéro dans $\langle a,b\rangle$,*

alors ses courbures satisfont à l'équation (1).

Théorème 2. *Si l'on suppose vérifiées les conditions suivantes:*

(5) *la courbe C d'équation $r=r(t)$, où $t\in\langle a,b\rangle$, est de classe C_4 et $\dfrac{dr}{dt}\times\dfrac{d^2r}{dt^2}\neq\vec{0}$ dans $\langle a,b\rangle$,*

(6) *ses courbures* $\varkappa$ *et* τ *satisfont à la relation* (1),

(7) $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) \neq 0$ *dans* $\langle a, b\rangle$,

alors C *est une courbe sphérique* (¹).

Comme on le voit, l'hypothèse de régularité (5) dans le théorème 2 est plus forte que dans le théorème 1. On peut donc se demander si dans quelle mesure il est possible d'affaiblir cette hypothèse de régularité (²).

La raisonnement donné ci-dessous montre qu'il suffit de remplacer l'hypothèse de régularité de classe C_4 par une hypothèse de régularité de classe C_3 (comme dans le théorème 1). On peut aussi affaiblir l'hypothèse (7), en la remplaçant par (10).

§ 2. THÉORÈME 3. *Si:*

(8) *la courbe* C *satisfait aux conditions de régularité formulées dans* (2), *dont le résultat est tel qu'on peut la paramétriser naturellement, c'est-à-dire la représenter par l'équation* $r = r(s)$, *où* s *est la longueur de l'arc de la courbe* C *qui varie dans l'intervalle* $\langle 0, \lambda\rangle$, *lec hamp* $r(s)$ *est de classe* C_3 *dans* $\langle 0, \lambda\rangle$ *et* $\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2} \neq \vec{0}$ *dans* $\langle 0, \lambda\rangle$,

(9) *la courbure* $\varkappa$ *et la torsion* τ *de la courbe* C *satisfont à la condition* (1) *pour* $s \in \langle 0, \lambda\rangle$,

(10) *l'ensemble* $\alpha = \underset{s}{E}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = 0\right)$ *est au plus dénombrable*,

alors C *est une courbe sphérique.*

Démonstration. Comme $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$ est, en vertu des hypothèses (8) et (9), une fonction continue du paramètre s dans l'intervalle $\langle 0, \lambda\rangle$, l'ensemble α est fermé. Alors l'ensemble $\beta = \alpha \cup \{0\} \cup \{\lambda\}$, composé des nombres de l'ensemble α et des nombres 0 et λ, est fermé, donc l'ensemble $\gamma = \langle 0, \lambda\rangle \setminus \beta$ est ouvert et par conséquent il est la somme d'une suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ d'intervalles ouverts et disjoints.

Dans l'intervalle γ_n nous avons pour n naturel quelconque

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) \neq 0\,, \tag{11}$$

donc

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) \neq 0 \quad \text{pour} \quad s \in \gamma_n\,. \tag{12}$$

(¹) L'auteur appelle le théorème 2 inverse dans un certain sens par rapport au théorème 1.

(²) Cette question a été posée par M. S. Gołąb.

Il en résulte, en vertu de l'hypothèse (9):

$$\left[\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right]^2 = c^2 - \frac{1}{\varkappa^2} > 0 \quad \text{pour} \quad s \in \gamma_n\,. \tag{13}$$

Comme la fonction $\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$ est continue dans l'intervalle γ_n, d'après (12), nous obtenons

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) > 0 \quad \text{dans} \quad \gamma_n$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) < 0 \quad \text{dans} \quad \gamma_n\,.$$

De là, d'après la relation (13), nous tirons:

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = \sqrt{c^2 - \frac{1}{\varkappa^2}} \quad \text{dans} \quad \gamma_n$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = -\sqrt{c^2 - \frac{1}{\varkappa^2}} \quad \text{dans} \quad \gamma_n\,,$$

d'où en vertu de (13) et des hypothèses de régularité (8):

(14) la fonction $\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$ admet une dérivée en tout point de l'intervalle γ_n.

En dérivant les deux membres de la relation (1) par rapport à s, nous aurons en tout point de l'intervalle γ_n:

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)^2\right] = 2\cdot\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) + \frac{2}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\left\{\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)\right\} \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \gamma_n\,,$$

d'où, d'après (11):

$$\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right] \equiv 0 \quad \text{pour} \quad s \in \gamma_n\,. \tag{15}$$

Considérons le champ vectoriel:

$$r_1(s) \overset{\text{df}}{=} r(s) + \frac{1}{\varkappa}\vec{n} - \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\vec{b} \quad \text{pour} \quad s \in \langle 0, \lambda\rangle\,, \tag{16}$$

où $\vec{n} = n(s)$ est le vecteur normal principal de courbe C et $\vec{b} = b(s)$ est le vecteur binormal.

Pour $s \in \gamma_n$ nous avons, d'après (14):

$$\frac{dr_1(s)}{ds} = \frac{dr(s)}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\vec{n} + \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)\vec{b} - \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot\frac{d\vec{b}}{ds}$$

ce qui donne, avec les formules de Frenet,

$$\frac{dr_1(s)}{ds} = -\left\{\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right]\right\}\vec{b},$$

ou bien, d'après (15):

$$\frac{dr_1(s)}{ds} \equiv \vec{0} \quad \text{dans} \quad \gamma_n .$$

Le champ vectoriel $r_1(s)$ est donc stable dans chaque intervalle γ_n. Il en résulte que, dans l'ensemble $\gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty}\gamma_i$, le champ $r_1(s)$ admet un ensemble au plus dénombrable de valeurs différentes, et puisque, d'après l'hypothèse (10), l'ensemble β est au plus dénombrable, et $\alpha \cup \beta = \langle 0, \lambda\rangle$ on a

(17) le champ $r_1(s)$ admet dans l'intervalle $\langle 0, \lambda\rangle$ un ensemble au plus dénombrable de valeurs différentes.

Je vais démontrer que le champ $r_1(s)$ est stable dans tout l'intervalle $\langle 0, \lambda\rangle$.

Supposons qu'il existe deux valeurs du paramètre s, soit s_1 et s_2, pour lesquelles: $s_1 \neq s_2$ et $r_1(s_1) \neq r_2(s_2)$. Comme le champ $r_1(s)$ est continu, les valeurs d'une de ses coordonnées doivent remplir un intervalle, donc le champ $r_1(s)$ admet une quantité indénombrable de valeurs différentes, ce qui est impossible d'après (17). Nous avons donc: $r_1(s) = r_2$ (r_2 — champ vectoriel constant) dans $\langle 0, \lambda\rangle$, ce qui donne, d'après (16):

$$r(s) - r_2 = -\frac{1}{\varkappa}\vec{n} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\vec{b},$$

d'où:

$$[r(s)-r_2]^2 = \left[-\frac{1}{\varkappa}\vec{n} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\vec{b}\right]^2 = \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)^2,$$

et, d'après l'hypothèse (9):

$$[r(s)-r_2]^2 = c^2,$$

donc la courbe C est une courbe sphérique.

§ 3. Il n'est pas possible d'écarter l'hypothèse (10) dans le théorème 3, comme le prouve l'exemple de l'hélice simple: la première et la deuxième courbure sont constantes, elles vérifient donc la relation (1). et les conditions de régularité (8) sont satisfaites, tandis que l'hélice n'est pas une courbe sphérique.

La question suivante se pose:

Peut-on affaiblir l'hypothèse (10) en supposant seulement que l'ensemble α est non dense dans l'intervalle $\langle 0, \lambda\rangle$?

Travaux cités

[1] S. Gołąb, *Géométrie différentielle vis-à-vis des hypothèses d'une faible régularité*, Revue de mathématiques pures et appliquées, 1956, Académie de la République Populaire Roumaine, Tome I, no 3, p. 99-112.

[2] A. Hoborski, *Teoria krzywych*, tom II, Kraków 1933.

Reçu par la Rédaction le 26. 1. 1961