ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Remarque sur l'application de la méthode des inégalités différentielles à la théorie d'une équation $P(x)=0$ dans un espace abstrait

par Z. Mikołajska (Kraków)

§ 1. Le problème de la résolution d'une équation

$$P(x) = 0\,, \tag{1,1}$$

où $P(x)$ est une opération continue dans un espace de Banach, n'est pas nouveau. On trouve, en particulier, un chapitre sur ce sujet dans le livre de L. V. Kantorovitch et G. P. Akilov [1]. Le procédé des approximations successives et la méthode de Newton (bien connue dans l'espace euclidien) sont le point de départ des auteurs dans l'espace abstrait. Mais, l'idée qui a attiré mon attention dans l'article de Kantorovitch-Akilov, c'est l'introduction de l'inégalité

$$\|S'(x)\| \leqslant \varphi'(t) \quad \text{pour} \quad \|x-x_0\| \leqslant t-t_0\,,$$

où $S'(x)$ est la dérivée de Fréchet de l'opération $S(x)$, dans le théorème concernant l'existence d'une solution de l'équation

$$x = S(x)$$

et la convergence de la suite des approximations successives

$$x_n = S(x_{n-1})\,.$$

Les autres résultats de Kantorovitch se déduisent de ce théorème (aussi pour des équations $P(x) = 0$). Les résultats de Kantorovitch semblent indiquer qu'il existe certains liens entre la théorie de la solution de l'équation (1,1) et celle des inégalités différentielles. On le verra mieux en prenant une fonction continue $x(t)$ (dépendant d'un paramètre numérique t) telle que

$$P\big(x(t)\big) \to 0 \quad \text{pour} \quad t\to\infty, \tag{1,2}$$

au lieu de la suite $\{x_n\}$ convergente vers la solution de l'équation (1,1). On trouve un tel procédé dans le travail de M. K. Gavurin [2]. Mais, cet auteur n'introduit dans son travail que des inégalités linéaires dans l'espace de Hilbert. Sa méthode est *la méthode de Newton continue*, c'est-à-dire il trouve la solution de l'équation (1,1) comme la limite d'une solution de l'équation différentielle (1,3)

$$x' = [P'(x)]^{-1} P(x)\,, \qquad x(0) = x_0$$

pour $t\to\infty$. Pourtant, son raisonnement ne peut être utilisé que dans le cas où le point initial x_0 de la courbe $x = x(t)$ est tel qu'à chaque point y du segment $\langle 0, P(x_0)\rangle$ appartienne un point x pour lequel $y = P(x)$. On obtient l'équation (1,3) en supposant que

$$u(t) = P\big(x(t)\big) = s(t)\cdot P(x_0)\,,$$

où $s(t)$ est une fonction scalaire, $s'(t) = -s(t)$, $s(0) = 1$.

Dans le présent travail nous nous occupons d'un cas plus général, où le segment $\langle 0, P(x_0)\rangle$ peut contenir des points y n'appartenant pas à l'ensemble des valeurs de l'opération $P(x)$.

§ 2. THÉORÈME 1. *Admettons les hypothèses* A:

1° $P(x)$ *est une opération continue dans la sphère fermée* $\bar{S}$

$$(\bar{S}) \qquad \|x-x_0\| \leqslant R\,,$$

de l'espace abstrait X *de Banach, à valeurs appartenant à un ensemble de l'espace* Y *de Banach.*

2° *Dans la sphère ouverte* S

$$(S) \qquad \|x-x_0\| < R$$

la dérivée $P'(x)$ *de Fréchet (cf.* [1]) *et l'opération inverse* $[P'(x)]^{-1}$ *existent.*

3° *Dans l'espace* Y *on a défini une opération* $\Phi(y)$ *telle que par chaque point* y_0 *de l'espace* Y *passe une intégrale unique de l'équation*

$$(2,1) \qquad y' = \Phi(y)\,,$$

et chaque solution $y(t)$ *de l'équation* (2,1) *tende vers zéro pour* $t\to\infty$:

$$(2,2) \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0\,.$$

4° *L'opération* $[P'(x)]^{-1}\Phi\big(P(x)\big)$ *est continue dans* S *et telle qu'une condition quelconque suffisante pour l'existence des solutions de l'équation différentielle*

$$(2,3) \qquad x' = [P'(x)]^{-1}\Phi\big(P(x)\big)$$

pour chaque point initial $\bar{x}$ *soit satisfaite* (1).

(1) Par exemple, la condition de Lipschitz.

5° *Il existe une fonction numérique* $\gamma(s)$ *continue pour* $0 \leqslant s < R$, *telle que* $\gamma(s) > 0$ *et*

$$(2,4) \qquad \int_0^R \frac{ds}{\gamma(s)} = +\infty\,,$$

et que

$$(2,5) \qquad \Big\|[P'(x)]^{-1}\Phi\big(P(x)\big)\Big\| \leqslant \gamma(\|x-x_0\|)$$

dans la sphère S.

Dans ces conditions, il existe une fonction vectorielle $x(t)$ *telle que*

$$\lim_{t\to\infty} P\big(x(t)\big) = 0\,, \qquad x(0) = x_0\,.$$

C'est la solution de l'équation (2,3) *passant par le point* x_0.

Démonstration. Envisageons la solution de l'équation (2,3) $x(t)$, $x(0) = x_0$. Désignons par $\varrho(t)$ la distance du point $x(t)$ à x_0, c'est-à-dire

$$(2,6) \qquad \varrho(t) = \|x(t)-x_0\|\,.$$

La dérivée droite supérieure $\bar{D}_+\varrho(t)$ satisfait à l'inégalité

$$\bar{D}_+\varrho(t) \leqslant \|x'(t)\| = \Big\|[P'(x)]^{-1}\Phi\big(P\big(X(t)\big)\big)\Big\| \leqslant \gamma(\|x(t)-x_0\|) = \gamma\big(\varrho(t)\big)\,,$$

d'où, en vertu de la théorie des inégalités différentielles, il vient

$$(2,7) \qquad \varrho(t) \leqslant \sigma(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0\,,$$

où $\sigma(t)$ est une intégrale de l'équation

$$(2,8) \qquad x' = \gamma(x)$$

telle que $\sigma(0) = \varrho(0) = 0$. En vertu de (2,8)

$$\int_0^{\sigma(t)} \frac{ds}{\gamma(s)} = t$$

d'où, d'après (2,4), $\sigma(t) < R$ pour $0 \leqslant t < +\infty$ et par suite (cf. (2,7))

$$\varrho(t) < R\,.$$

Dès lors, $x(t)$ est définie pour $0 < t < +\infty$.

Envisageons la fonction $u(t) = P\big(x(t)\big)$. On a $u(0) = P(x_0) = y_0$,

$$u'(t) = P'\big(x(t)\big)\big[P'\big(x(t)\big)\big]^{-1}\Phi\Big(P\big(x(t)\big)\Big) = \Phi\big(u(t)\big)\,.$$

Cela signifie que la fonction $u(t)$ est une intégrale de l'équation (2,1), et par conséquent elle tend vers zéro pour $t\to\infty$. Nous avons donc

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} P\big(x(t)\big) = 0\,.$$

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Remarque 1. Il est évident que dans notre théorème la sphère S peut être remplacée par une région quelconque homéomorphe avec la sphère S. On doit, dans ce cas, remplacer les conditions concernant $\|x-x_0\|$ par des conditions portant sur la distance du point x à la frontière de G. On obtient ainsi, par exemple, le théorème suivant.

§ 3. Théorème 2. *Envisageons un ensemble ouvert G défini par l'inégalité*

$$f(x) < R \quad \textit{dans} \quad G, \tag{3,1}$$

où $f(x)$ est une fonctionnelle continue et différentiable (au sens de Fréchet) dans un espace X de Banach.

Supposons que

$$f(x) = R \quad \textit{sur la frontière de } G. \tag{3,2}$$

Désignons par $\bar{G}$ la fermeture de G.

Admettons les hypothèses B:

1° *$P(x)$ est une opération continue dans l'ensemble $\bar{G}$. Les valeurs de $P(x)$ appartiennent à l'espace de Banach Y.*

2° *$P(x)$ est différentiable (au sens de Fréchet, cf.* [1]) *dans G et l'opération $[P'(x)]^{-1}$ inverse de l'opération $P'(x)$ dans G existe.*

3° *Il existe une opération $\Phi(u)$ définie dans l'espace Y, continue, telle que par chaque point $y_0 \in Y$ passe une intégrale unique de l'équation différentielle*

$$u' = \Phi(u), \quad u(0) = y_0 \tag{3,3}$$

et que chaque solution de l'équation (3,3) *tende vers zéro pour $t\to\infty$:*

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0. \tag{3,4}$$

4° *L'opération $[P'(x)]^{-1}\Phi\big(P(x)\big)$ est continue dans G, où elle satisfait à des conditions quelconques suffisantes pour l'existence des solutions de l'équation*

$$x' = [P'(x)]^{-1}\Phi\big(P(x)\big), \tag{3,5}$$

avec la condition $x(0) = \xi$ pour chaque $\xi \in G$.

5° *Il existe une fonction $\gamma(s)$ telle que*

$$f'(x)[P'(x)]^{-1}\Phi\big(P(x)\big) \leqslant \gamma\big(f(x)\big) \quad \textit{pour} \quad x \in G,\ f(x) \geqslant r, \tag{3,6}$$

où $\gamma(s)$ est continue pour $r \leqslant s < R$, $\gamma(s) > 0$ pour $r \leqslant s < R$

$$\int_r^R \frac{ds}{\gamma(s)} = +\infty.$$

6° *$x_0 \in G$ (c'est-à-dire $f(x_0) < R$).*

Ceci posé, il existe une fonction $x(t)$ telle que

$$\lim_{t\to\infty} P\big(x(t)\big) = 0, \quad x(0) = x_0. \tag{3,7}$$

La condition (3,7) *est en particulier satisfaite pour l'intégrale $x(t)$ de l'équation* (3,5) *issue du point* $(0, x_0)$,

La démonstration du théorème 2 est tout à fait analogue à celle du théorème 1. Envisageons la fonction

$$\varrho(t) = f\big(x(t)\big), \tag{3,8}$$

où $x(t)$ est une solution de l'équation (3,5), $x(0) = x_0$. La fonction vectorielle $x(t)$ n'étant pas définie, par hypothèse, dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$, il existe une suite de points t_v, $t_v \geqslant 0$, $t_v\to t_0 < +\infty$ telle que

$$\lim_{v\to\infty} \varrho(t_v) = R. \tag{3,9}$$

Pour des v suffisamment grands on a donc

$$\max\big(r, f(x_0)\big) = \bar{r} \leqslant \varrho(t_v) < R \quad (\text{pour } v \geqslant N).$$

A cause de la continuité de la fonction $\varrho(t)$ pour chaque v ($v \geqslant N$) il existe des $\bar{t}_v < t_v$ ($0 \leqslant \bar{t}_v < +\infty$) tels que

$$\varrho(\bar{t}_v) = \bar{r}, \quad \varrho(t) \geqslant \bar{r} \quad \text{pour} \quad \bar{t}_v < t < t_v. \tag{3,10}$$

De l'inégalité (3,6) il s'ensuit donc que

$$\varrho'(t) = f'\big(x(t)\big)[P'\big(x(t)\big)]^{-1}\Phi\Big(P\big(x(t)\big)\Big) \leqslant \gamma\Big(f\big(x(t)\big)\Big) = \gamma\big(\varrho(t)\big)$$
$$\text{pour} \quad \bar{t}_v \leqslant t \leqslant t_v, \quad v \geqslant N,$$

et par conséquent

$$\varrho(t) \leqslant w(t-\bar{t}_v) \quad \text{pour} \quad \bar{t}_v \leqslant t \leqslant t_v, \tag{3,11}$$

où $w(t)$ est une intégrale de l'équation différentielle

$$u' = \gamma(u), \quad w(0) = r.$$

Mais, pour $w(t)$, on a

$$\int_{w(0)}^{w(t)} \frac{ds}{\gamma(s)} = t \leqslant t_0 \quad \text{pour chaque } t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

d'où $w(t) < R$ pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$, et par suite $w(t-t_v) < R$ pour $\bar{t}_v \leqslant t \leqslant t_0$. Nous obtenons ainsi une contradiction avec la relation (3,9) et $x(t)$ est donc bien définie dans tout l'intervalle $\langle 0, +\infty)$. Pour obtenir la condition (3,7) pour l'intégrale $x(t)$ de l'équation (3,5), il suffit de répéter le raisonnement de la démonstration du théorème 1. Le théorème 2 est donc démontré.

Remarque 2. On vérifie facilement que les hypothèses A et B ne sont pas suffisantes pour l'existence de $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Il peut arriver, par exemple, que l'ensemble des points de condensation de $x(t)$ (pour $t\to\infty$) soit tout l'ensemble $\|x-x_0\| = R$.

Remarque 3. De la continuité de l'opération $P(x)$ dans l'ensemble fermé $\bar{G}$ résulte que chaque point de condensation (pour $t\to+\infty$) de la fonction $x(t)$ est une solution de l'équation

$$P(x) = 0\,. \tag{3,12}$$

En effet, en supposant que $t_v\to\infty$ et $x(t_v)\to x^*$, on obtient

$$P\big(x(t_v)\big)\to P(x^*)$$

et d'autre part $P\big(x(t_v)\big)\to 0$, d'où $P(x^*)=0$.

Les théorèmes 1 et 2 peuvent donc être envisagés comme des théorèmes sur l'existence d'une solution au moins de l'équation (3,12). On peut les formuler comme suit:

Théorème 3. *Dans le cas où les hypothèses* A *ou* B *sont satisfaites, il existe une solution au moins de l'équation* (3,12). *Chaque suite convergente* $x(t_v)$ ($t_v\to\infty$) *de points situés sur une intégrale* $x(t)$ *de l'équation différentielle* (3,5) *tend vers une solution de* (3,12).

Remarque 4. Dans le cas où sur la frontière de G sont situées exclusivement des solutions isolées de l'équation (3,12) (et $\bar{G}$ est compact dans X) chaque solution $x(t)$ de l'équation (3,5) possède une limite pour $t\to+\infty$ et c'est une solution de (3,12). Ceci résulte du fait que l'opération $P'(x)$ est inversible dans G et que pour chaque intégrale d'une équation différentielle dynamique (cf. [3]) l'ensemble de condensation (pour $t\to\infty$) est connexe. La fonction $x(t)$ peut donc être considérée comme approximation d'une solution de l'équation (3,12). En connaissant la vitesse de convergence des intégrales de l'équation $u'=\Phi(u)$ vers zéro et en connaissant de $[P'(x)]^{-1}$ on est conduit à une limitation de $\|x(t)-x^*\|$, où

$$x^* = \lim_{t\to+\infty} x(t)\,.$$

On a

$$\|x(t)-x^*\| \leqslant \int_t^{\infty} \|u'(s)\|\cdot \Big\|\big[P'\big(x(s)\big)\big]^{-1}\Big\|\,ds\,,$$

et, par exemple, dans le cas du théorème 1 on a

$$\|x(t)-x_0\| \leqslant \sigma(t) < R\,,\qquad \sigma=\gamma(\sigma)\,,\ \sigma(0)=0\,.$$

Il suffit donc de connaître une limitation de $\|[P'(x)]^{-1}\|$ pour $\|x-x_0\|\leqslant\sigma(t)$ (cf. [1]). Par exemple, si

$$\|[P'(x)]^{-1}\| \leqslant m(t)\qquad \text{pour}\qquad \|x-x_0\|\leqslant\sigma(t)\,,$$

on obtient

$$\|x(t)-x^*\| \leqslant \int_t^{+\infty} \|u'(s)\|\,m(s)\,ds\,.$$

Dans le cas envisagé par Gavurin [2] on a $\Phi(u)=-u$ et par suite $u(t) = u(0)\,e^{-t}$, $\|[P'(x)]^{-1}\|\leqslant A$, donc

$$\|x(t)-x^*\| \leqslant A\|u(0)\|e^{-t}\,.$$

Remarque 5. La vitesse de convergence vers zéro de $\|x(t)-x^*\|$ peut être modifiée arbitrairement. Il suffit de remplacer t par $\lambda(t)$, $\lambda(0)=0$, $\lambda(t)\to+\infty$ pour $t\to+\infty$, dans l'intégrale $x(t)$ de l'équation (3,5). Posons $\xi(t)=x\big(\lambda(t)\big)$. On a donc

$$\lim_{t\to+\infty} P\big(\xi(t)\big) = \lim_{t\to+\infty} P\Big(x\big(\lambda(t)\big)\Big) = 0\,,$$

$$\xi'(t) = \lambda'(t)\,x'\big(\lambda(t)\big) = \lambda'(t)\Big[P'\big(\xi(t)\big)\Big]^{-1}\Phi\Big(P\big(\xi(t)\big)\Big)$$

et par suite

$$\|\xi(t)-x^*\| \leqslant \int_t^{+\infty} \lambda'(s)\|u'(s)\|\,m(s)\,ds\,.$$

Supposons qu'une fonction $g(t)$ soit donnée d'avance, $g(t)>0$, $g'(t)<0$ pour $0\leqslant t<+\infty$, $g(t)\to 0$ pour $t\to+\infty$. Posons

$$\lambda'(s) = \begin{cases} \dfrac{-g'(s)}{\|u'(s)\|\,m(s)} & \text{si}\quad \|u'(s)\|\,m(s)\geqslant 1\,,\\ -g'(s) & \text{si}\quad \|u'(s)\|\,m(s) < 1 \end{cases}$$

$(\lambda(s)$ continue pour $0\leqslant s<+\infty)$.

On a donc

$$\|\xi(t)-x^*\| \leqslant \int_t^{+\infty} \big(-g'(s)\big)\,ds = g(t)\qquad \text{pour}\qquad 0\leqslant t<+\infty\,.$$

Remarque 6. Dans le cas où l'ensemble G est défini par les inégalités

$$f\big(P(x)\big) < R\qquad \text{dans}\quad G\quad (G\ \text{ouvert})\,,$$

$$f\big(P(x)\big) = R\qquad \text{sur la frontière de } G\,,$$

on obtient une modification du théorème 2 en remplaçant la condition (3,6) par

$$f'(y)\,\Phi(y) \leqslant \gamma\big(f(y)\big)\qquad \text{dans}\quad P(G)\,.$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.

Travaux cités

[1] Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, Москва 1959.

[2] М. К. Гаврин, *Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов*, Известия высших учебных заведений (Математика) 5 (6) (1958), p. 18-30.

[3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1949.

Reçu par la Rédaction le 30. 12. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

A connection between two certain methods of successive approximations in differential equations

by C. Olech (Kraków)

1. The methods we are going to consider are that of Picard and the following one.

Suppose we have a system of ordinary differential equations

$$x' = F(t, x) \tag{1}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $F(t, x) = \big(f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x)\big)$ is a continuous vector-function.

Let $x_0(t)$ be the solution of (2)

$$x' = A(t)x \tag{2}$$

satisfying the initial condition

$$x_0(0) = c \quad (c \text{ is a constant vector}), \tag{3}$$

and let $x_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ fulfill the conditions

$$x_m'(t) = A(t)x_m(t) + F\big(t, x_{m-1}(t)\big) - A(t)x_{m-1}(t), \qquad x_m(0) = c. \tag{4}$$

$A(t)$, in (2) and (4), is a square matrix and it may be arbitrary.

The sequence

$$x_0(t), x_1(t), \ldots \tag{5}$$

defined here is the sequence of successive approximations of the solution of (1) and if it is uniformly convergent in $\langle 0, T)$ then, owing to (4), it tends to the solution of (1) satisfying the initial condition (3).

Notice that if each element of $A(t)$ is identically equal to zero, then the method just defined becomes the well-known Picard method of successive approximations. Thus the method given above may be considered as a generalization or a modification of Picard's method. We will use the abbreviations M.P.M. (modified Picard's method) if we speak about the scheme defined above and P.M. (Picard's method) if we have in mind the classical method.