We shall formulate one of these theorems, namely

THEOREM 3. *If the functions $\varphi_n(s, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ subject to the same assumption as $\varphi(s, t)$ (given in §1), in $[1; 1]$, and if*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{[a;\gamma]} \varphi_n(s, t)\, ds dt = 1$$

and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi_n(a, 0) < \infty\,, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi_n(0, \gamma) < \infty\,,$$

with any positive a and γ $(a, \gamma \leqslant 1)$, then for every function $f \in L_1^*$ we have

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = f(0, 0)\,.$$

Similar theorems hold when φ (or φ_n) is non-negative and non-decreasing in $[b; d]$ with respect to each variable separately, and such that the difference $\varphi(s, t') - \varphi(s, t'')$ is non-decreasing with respect to s for any pair $t' < t''$; in this case the function φ (or φ_n) attains its maximum at the point (b, d) (formerly at (a, c)). It is also evident how to formulate theorems of this type, when the maximum-points of φ (or φ_n) are the remaining vertices of the rectangle $[a, b; c, d]$.

References

[1] M. Biernacki, *Sur le 2 théorème de la moyenne et sur l'inégalité de Tchebycheff*, Annales Univ. M. Curie-Skłodowska, IV, 12 (1950), pp. 123-130.

[2] И. Карамата, *Теория и пракса Stieltjes-ова интеграла*, Београд 1949.

[3] Ch. N. Moore, *Summable series and convergence factors*, New York 1938.

[4] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Москва-Ленинград. 1950.

Reçu par la Rédaction le 27. 6. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Démonstration du théorème de Carathéodory par la méthode des points extrémaux

par W. Kleiner (Kraków)

1. Les éléments frontières. Rappelons brièvement la théorie des éléments frontières, en principe sous sa forme classique (Carathéodory [1]). Soit D un domaine plan simplement connexe, dont la frontière $D^{\cdot}$ contient plus d'un point. Pour chaque $n = 0, 1, 2, \ldots$ soit g_n une *coupure* de D, c'est-à-dire: 1) un arc simple contenu dans D sauf ses extrémités, situées sur $D^{\cdot}$, ou bien 2) une courbe fermée, contenue dans D, peut-être à l'exception d'un point. Une coupure partage D en deux domaines; soit g_n l'un d'eux. On dit que les g_n forment une *chaîne*, si pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$g_{n+1} \subset g_n\,,$$

$$q_{n+1} \text{ et } q_n \text{ sont disjoints, extrémités comprises}\,.$$

Une chaîne $\{g'_n\}$ est *plus fine* que $\{g_n\}$, si pour tout n il existe un k tel que $g'_k \subset g_n$. Deux chaînes, dont chacune est plus fine que l'autre, sont *équivalentes*; une chaîne qui équivaut à toute chaîne plus fine est dite *élémentaire*.

Soit $\{g_n\}$ une chaîne élémentaire. La classe des chaînes équivalentes est dite — ou bien: elle définit — un *élément sur D*, noté G. On dit que $\{g_n\}$ représente G, ce qu'on écrit: $g_n \to G$. Si $G \neq H$, $g_n \to G$, $h_n \to H$, les g_n et h_n sont disjoints pour n suffisamment grands.

L'ensemble de tous les éléments sur D sera noté D^*.

Soit $g_n \to G$. Considérons, pour un n fixé quelconque, l'ensemble V des éléments H tels que pour chaque $h_k \to H$ il existe un $h_{k'} \subset g_n$. V est dit *voisinage* de G. D^* devient ainsi une espace connexe de Hausdorff.

À tout élément G on peut faire correspondre l'ensemble $G' = \bigcap \bar{g}_n$, où $g_n \to G$. G' sera dit projection de G (fig. 1). La projection est une application continue [1]; il peut pourtant arriver que les projections de deux éléments distincts ne soient pas disjointes. G' peut d'ailleurs être un

[1] C'est-à-dire, si $G' \subset B$ et B est un ensemble ouvert, il existe un voisinage U de G tel que $H' \subset B$ pour $H \subset U$.

continu. Ces circonstances peuvent se présenter seulement sur la frontière de D: si la projection G' contient un point $z \in D$, elle se réduit à ce point. L'ensemble de tels G: $D^{*0} = \{G\colon G' \subset D\}$, sera dit (un peu incorrectement) *intérieur* de D^*; dans cet ensemble, la projection est une homéomorphie. Les éléments de $D^* - D^{*0}$ sont dits ***éléments frontières*** de D^*, ou, par abus de langage, de D.

Si l'on identifie chaque élément „intérieur" (de D^{*0}) à sa projection $(z) \subset D$, on obtient la définition suivante:

Définition. Soit $g_n \to G$. Nous écrirons $z_k \to G$, si pour chaque n il existe un N tel que $z_k \in g_n$ pour $k \geqslant N$.

C. Carathéodory a montré que chaque suite $\{G_n\} \subset D^*$ contient une suite partielle qui converge vers un $G \in D^*$. D^* est ainsi une des

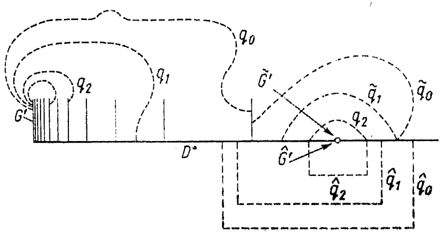

Fig. 1

compactifications de D. Observons encore que, pour un domaine D dont la frontière est une courbe simple fermée, la projection est une homéomorphie de D^* sur $\bar{D}$ tout entier. Dans ce cas, D^* peut être identifié à $\bar{D}$.

Une fonction $w = f^*(G)$, $G \in D^{*0}$, sera dite analytique, si sa projection $f(z)$ — définie par la relation $f(G') = f^*(G)$ — est analytique dans D. Une f^* qui est en outre univalente est appelée représentation conforme de D^{*0} sur $f^*(D^{*0})$. Nous allons considérer seulement le cas fondamental où $f^*(D^{*0})$ est l'extérieur d'un cercle.

Une représentation conforme de D n'est pas prolongeable sur $\bar{D}$ comme fonction continue dans le cas général. Ses propriétés frontières sont déterminées par le célèbre

Théorème de Carathéodory. *La représentation conforme de D^{*0} sur un cercle est prolongeable sur D^* comme une homéomorphie de D^* sur le cercle fermé.*

Nous donnons ici une démonstration nouvelle de ce théorème, basée sur la méthode de M. Leja qui lui a servi à démontrer l'existence de la représentation conforme [2].

Conventions. D est un domaine simplement connexe dont la frontière $D^{\cdot}$ contient plus d'un point. Nous supposons $\infty \in D$. Nous pouvons nous passer de cette hypothèse en effectuant une homographie, celle-ci transformant les chaînes en chaînes. Nous désignons un élément intérieur et sa projection par la même lettre z. La lettre ζ sera réservée aux points de la frontière $D^{\cdot}$, les lettres G, H — aux éléments frontières, g_n, h_n aux chaînes qui les représentent respectivement. Un arc L dont on a écarté les extrémités sera noté L^0. Nous écrivons η_k au lieu de $\eta_k^{(n)}$ (voir (1)).

2. La méthode des points extrémaux de Leja. Soit

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}\} \tag{1}$$

un système de *points extrémaux* de $D^{\cdot}$ de rang n, c'est-à-dire un système de $n+1$ points de $D^{\cdot}$ tel que le produit

$$V(\eta^{(n)}) = V(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} |\eta_i - \eta_k|$$

soit le plus grand. On peut supposer que

$$\prod_{k=1}^{n} |\eta_0 - \eta_k| \leqslant \prod_{k \neq i,\, k=0}^{n} |\eta_i - \eta_k|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Posons

$$f_n(z) = e^{i\theta_n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{z - \eta_k}{\eta_0 - \eta_k}}, \tag{2}$$

où les nombres réels θ_n et les racines sont choisis de manière que $f_n(a) > 0$ pour un point fixe $a \in D$. M. F. Leja [2] a démontré que la suite (2) converge dans D vers une limite $f(z)$, et que $f(z)$ donne la représentation conforme du domaine D sur le „cercle" $K = \{w\colon |w| > 1\}$, de manière que $f(\infty) = \infty$. Le problème de l'application de la suite (2) à l'étude des propriétés frontières de $f(z)$ a aussi été posé par M. Leja.

3. Lemmes. On sait que $d_n = V(\eta^{(n)})^{2/n(n+1)} \to d = d(D^{\cdot})$, qui est dit diamètre transfini (ou écart par rapport à la fonction génératrice $|z-\zeta|$) de $D^{\cdot}$; on a $d > 0$.

Soit C_r la partie de $D^{\cdot}$ contenue dans le cercle $\{z\colon |z-\zeta| < r\}$, où $\zeta \in D^{\cdot}$; en ne changeant que l'ordre des points $\eta^{(n)}$, supposons que

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu \in C_r, \qquad \eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_n \in D^{\cdot} - C_r. \tag{3}$$

Quelque petit que soit $r > 0$, on a

$$\varliminf_{n\to\infty} \nu/n > 0 \tag{4}$$

(Leja [4]). D'autre part, nous allons démontrer que la quantité

(5) $$\theta_r = \varlimsup_{n\to\infty} \nu/n$$

tend vers 0 lorsque $r \to 0$. En effet,

$$d_n^{n(n+1)/2} = V(\eta_1, \ldots, \eta_\nu) \cdot \prod{}^* |\eta_i - \eta_k|$$

où le produit $\prod^*$ renferme tous les facteurs de $V(\eta^{(n)})$ qui n'entrent pas dans $V(\eta_1, \ldots, \eta_\nu)$; ces facteurs étant bornés par un nombre $R \geqslant 1$, on a

$$d_n \leqslant (2r)^{\nu(\nu+1)/n(n+1)} R\,, \qquad d(D^\cdot) \leqslant (2r)^{\theta_r^2} R\,,$$

et par suite

$$\theta_r^2 \leqslant -\frac{\log R/d}{\log 2r} \qquad \text{pour} \qquad 2r < 1\,,$$

donc $\theta_r \to 0$ lorsque $r \to 0$ (²).

Lemme de Carathéodory [1]. *Tout élément (frontière) G peut être représenté par une chaîne $g_n \to G$, dont les coupures q_n sont des arcs circulaires concentriques, de centre $\zeta \in G' \subset D^\cdot$ et de rayons $r_n \to 0$.*

Une telle chaîne sera dite *circulaire*; nous les employerons seulement pour éviter quelques difficultés techniques.

4. Démonstration du théorème. Il résulte du théorème de Riemann que $|f(z)| \to 1$ pour $z \to \zeta \in D^\cdot$, donc aussi pour $z \to G$. Il reste à examiner le comportement de l'argument de $f(z)$ dans les mêmes conditions.

Choisissons $\zeta \in D^\cdot$ et $\varepsilon > 0$. Pour un $r > 0$ on a $\theta_r < \varepsilon$ (voir (5)). Soit Q la circonférence $\{z\colon |z-\zeta| = \varrho\}$, $2\varrho < r$, et L^0 un arc ouvert de Q, contenu dans D (fig. 2). Pour des branches quelconques de $\arg f_n(z)$ et $\arg(z-\eta_i)$ sur L^0 on a, d'après (2),

(6) $$\arg f_n(z_2) - \arg f_n(z_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} [\arg(z_2-\eta_i) - \arg(z_1-\eta_i)]$$

pour $z_1, z_2 \in L^0$. Désignons par C_r la partie de $D^\cdot$ dans le cercle $|z-\zeta| < r$, et supposons (3). On a

(7) $$|\arg f_n(z_2) - \arg f_n(z_1)|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu} |\arg(z_2-\eta_i) - \arg(z_1-\eta_i)| + \frac{1}{n}\sum_{i=\nu+1}^{n} |\arg(z_2-\eta_i) - \arg(z_1-\eta_i)|\,.$$

(²) Nos lemmes, améliorés, résultent immédiatement de la théorie du potentiel, mais nous nous bornons aux résultats de la méthode des points extrémaux.

Désignons les sommes dans (7) respectivement par s et S. Pour la première

(8) $$\frac{1}{n}s \leqslant \frac{1}{n}\nu \cdot 2\pi\,,$$

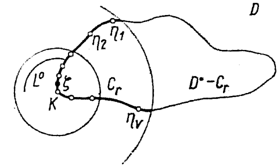

Fig. 2

ce qui résulte de la possibilité de joindre η_i à ∞ par un rayon disjoint de L^0; remarquons, que

(9) $$2\pi\nu/n < 2\pi\theta_r + \varepsilon < 8\varepsilon$$

pour n suffisamment grands.

Soit $K = \{z\colon |z-\zeta| \leqslant \frac{1}{2}r\}$. Comme la fonction $\arg(z-\eta)$ est uniformément continue sur l'ensemble fermé $K \times (D^\cdot - C_r)$, il existe un $\delta' > 0$ tel que

(10) $$|\arg(z_2-\eta_i) - \arg(z_1-\eta_i)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad z_1, z_2 \in K\,,$$
$$|z_1 - z_2| < \delta'\,, \quad i = \nu+1, \ldots, n;$$

donc, pour $\varrho < \delta = \min(r/2, \delta'/2)$,

(11) $$\frac{1}{n}S < \frac{1}{n}(n-\nu)\varepsilon\,, \qquad z_1, z_2 \in L^0\,.$$

À la limite on a

$$|\arg f(z_2) - \arg f(z_1)| < 9\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad z_1, z_2 \in L^0\,, \qquad \varrho < \delta:$$

l'oscillation de l'argument de f sur L^0 tend vers zéro avec ϱ.

Soit maintenant $L^0 \subset D$ un arc circulaire quelconque, dont une extrémité ζ appartient à $D^\cdot$. Posons $C_r = D^\cdot \cap \{z\colon |z-\zeta| < r\}$ et reprenons le raisonnement précédent jusqu'à la conclusion (9). $\arg(z-\eta)$ sera uniformément continu sur $\overline{L^0} \times (D^\cdot - C_r)$, il existe donc un $\delta_0 > 0$ tel que (10) et (11) pour $z_1, z_2 \in L^0$, $|z_1 - z_2| < \delta_0$, $\eta \in D^\cdot - C_r$; or

$$|\arg f(z_2) - \arg f(z_1)| < 9\varepsilon\,, \qquad |z_1 - z_2| < \delta_0\,, \qquad z_1, z_2 \in L^0\,.$$

Nous en déduisons l'existence de la limite de $\arg f(z)$ — et de $f(z)$ — pour $z \to \zeta$, $z \in L^0$.

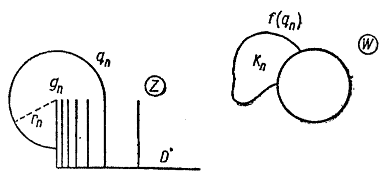

Fig. 3

Soit G un élément frontière, représenté par une chaîne circulaire. Conservons les notations du lemme de Carathéodory. Nous pouvons considérer la fonction $f(z)$ comme continue sur chaque $\overline{q}_n$; les images $f(\overline{q}_n) = l_n$ sont des arcs simples ou des courbes simples fermées. q_n partage D en g_n et $D - \overline{g}_n$, l_n partage donc $K = \{w\colon |w| > 1\}$ en $K_n = f(g_n)$ et un domaine complémentaire (fig. 3). $K_{n+1} \subset K_n$.

Pour n suffisamment grands l'oscillation de l'argument (et de la valeur absolue) de $f(z)$ sur q_n est arbitrairement petite, car $r_n \to 0$; donc le diamètre λ_n de K_n, égal au diamètre de l_n, tend vers zéro. La partie commune des $\overline{K_n}$ se compose alors d'un seul point $w_0 \in K^\cdot$. On a $|f(z)-w_0| \leqslant \lambda_n$, $z \in g_n$, donc $f(z) \to w_0$ pour $z \to G$.

Nous posons alors: $f(G) = w_0$. $f(G)$ est maintenant définie pour $G \in D^*$, et pour tout $\{G_n\} \subset D^{*0}$, $G_n \to G \in D^*$ on a $f(G_n) \to f(G)$. Mais, D^{*0} est partout dense dans D^*, donc $f(G)$ est continue dans D^*.

Comme les valeurs de f à l'intérieur de D^* (de D) diffèrent en valeur absolue des valeurs sur les éléments frontières, la démonstration de l'univalence peut être bornée à ces derniers. Soit $G_1 \neq G_2$, $g_{n1} \to G_1$, $g_{n2} \to G_2$; on peut supposer g_{n1} et g_{n2} disjoints. Soit l_{n1} un arc simple dans g_{n1}, qui coupe q_{n+1} en un point seulement, n'ayant qu'une extrémité commune

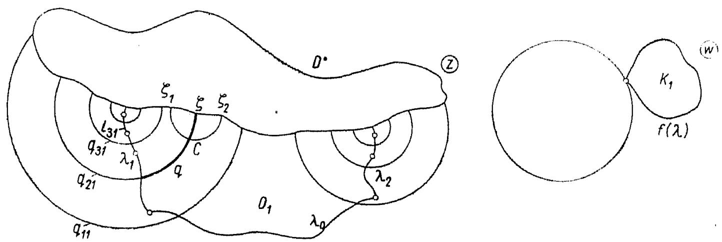

Fig. 4

avec $l_{n-1,1}$ et l'autre avec $l_{n+1,1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (fig. 4). $\lambda_1 = \bigcup l_{n1}$ ne sera peut-être pas un arc; mais $f(\lambda_1)$ le sera, si nous le terminons par le point $f(G_1)$. Nous construisons ainsi λ_2 et joignons les extrémités de λ_1 et λ_2 par un arc convenable $\lambda_0 \subset D$. λ_1, λ_0 et λ_2 forment un „arc généralisé" λ; $f(\lambda)$ est un arc proprement dit, ou une courbe simple fermée, qui partage K en deux domaines K_1 (borné) et K_2. Soit $K_1 = f(D_1)$.

q_{21} est partagé par λ en deux arcs, dont l'un est contenu dans D_1; désignons-le par la lettre q. Menons la circonférence $|z-\zeta| = r$, où ζ est le point d'intersection de q avec $D^\cdot$, et le rayon r est assez petit pour qu'elle ne coupe q_{11} ni q_{31}. Soit C l'arc de cette circonférence ayant un point commun avec q et contenu dans D_1, sauf ses extrémités. Si $f(G_1) = f(G_2)$, $f(\lambda)$ est une courbe fermée et $\overline{K}_1$ a un seul point w_0 sur $K^\cdot$. Si $z_1 \in q^0$, $z_1 \to \zeta_1$, nous avons $|f(z_1)| \to 1$, $f(z_1) \in K_1$, donc $f(z_1) \to w_0$; si $z_2 \in q^0$, $z_2 \to \zeta_2$, on a aussi $f(z_2) \to w_0$. Nous allons montrer que ces limites sont bien distinctes, donc $f(G_1) \neq f(G_2)$.

La démonstration se trouverait facilitée, si C était un „intervalle" da l'axe réel, contenant le point à l'infini. Cette situation pouvant être obtenue de la précédente par une homographie, supposons que ζ_1 et ζ_2

soient les points d'intersection de $D^\cdot$ avec l'axe réel, le premier et le dernier respectivement en suivant cet axe (fig. 5). Soient $z_1 < \zeta_1$, $z_2 > \zeta_2$ deux points de l'axe réel. Joignons-les par un arc $L \subset D$, contenu dans le demi-plan intérieur. On a sur L la relation (6) pour des branches uniformes et continues des arguments. Je dis que, pour $\eta \in D^\cdot$,

$$(12) \quad 0 < \arg(z_2-\eta) - \arg(z_1-\eta) < 2\pi\,.$$

En effet, pour $\eta = \zeta_1$ ces inégalités sont satisfaites. Pour qu'une d'elles devienne fausse, la différence (12) doit être égale à 0 ou 2π pour un $\eta' \in D^\cdot$, comme fonction continue sur un ensemble connexe. Mais ce η' devrait alors être réel et situé en dehors de l'intervalle (z_1, z_2), donc $\eta' \notin D^\cdot$.

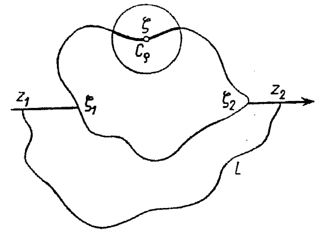

Fig. 5

Choisissons maintenant un $\zeta \in D^\cdot$ pour lequel $|\mathrm{im}\,\zeta| = 2\varrho > 0$ (le cas trivial exclu), et soit $C_\varrho = D^\cdot \cap \{z\colon |z-\zeta| \leqslant \varrho\}$. Pour $\eta \in C_\varrho$ et $z_1 \in \langle \zeta_1 - 1, \zeta_2 \rangle$, $z_2 \in \langle \zeta_2, \zeta_2 + 1 \rangle$ (donc dans un ensemble fermé) la différence (12) est continue et elle y atteint un maximum M et un minimum m. Ces extrêmes satisfont à (12), il existe donc un $\alpha > 0$ tel que pour $\eta \in C_\varrho$

$$\alpha \leqslant \arg(z_2-\eta) - \arg(z_1-\eta) \leqslant 2\pi - \alpha\,.$$

Soit, comme au début, $\eta_1, \ldots, \eta_\nu \in C_\varrho$; on a alors, en tenant compte de (12):

$$\frac{\alpha\nu}{n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \arg(z_2-\eta_i) - \arg(z_1-\eta_i) \leqslant 2\pi - \frac{\alpha\nu}{n}\,.$$

On sait que $\nu/n \geqslant \theta > 0$ pour n suffisamment grands (cf. (4)); à la limite on aura

$$\alpha\theta \leqslant \arg f(z_2) - \arg f(z_2) \leqslant 2\pi - \alpha\theta\,, \qquad \alpha\theta > 0\,.$$

Pour $z_1 \to \zeta_1$, $z_2 \to \zeta_2$ nous concluons que $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$.

Il reste à prouver que chaque point de $K^\cdot$ est l'image d'un élément frontière $G \in D^* - D^{*0}$. Soit $w_0 \in K^\cdot$, $w_n \to w_0$, $w_n \in K$. w_n sont des valeurs de f, $w_n = f(z_n)$. Prenons une suite partielle z_{n_k} convergente vers un élément G sur D. L'élément G ne peut pas être intérieur (on aurait $f(z_{n_k}) \to w \in K$), il est donc un élément frontière et $f(G) = w_0$. La démonstration est ainsi achevée.

Travaux cités

[1] C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Bereiche*, Math. Ann. 73 (1913), p. 323-370.

[2] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. de Math. 12 (1933), p. 57-71.

[3] — *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle*, Ann. Soc. Pol. de Math. 14 (1935), p. 116-134.

[4] — *Sur les suites de polynômes et la fonction de Green généralisée I*, Ann. Soc. Pol. de Math. 18 (1945), p. 4-11.

[5] S. Mazurkiewicz, *Über die Definition der Primenden*, Fund. Math. 26 (1936), p. 273-279.

Reçu par la Rédaction le 31. 10. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Remark on a certain theorem of H. J. Bremermann

by J. Górski (Kraków)

In paper [1] H. J. Bremermann proved the following theorem:

Let D be a bounded pseudo-convex domain in the space of n complex variables $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ of the form $D = \{z \,|\, V(z) < 0\}$, $V(z)$ continuous in a neighborhood of D. Then the generalized Dirichlet problem is possible for the upper envelope $\Phi(z)$ of $L\{D, b(z)\}$ ($L\{D, b(z)\}$ is the class of functions that are plurisubharmonic in a neighborhood of D and smaller or equal to the boundary values $b(z)$ wherever these are prescribed) and arbitrary continuous boundary values $b(z)$ if and only if the boundary values $b(z)$ are prescribed on and only on the Šilov boundary $S(D)$ of D.

The Šilov boundary $S(D)$ of a domain D is the smallest closed subset of the boundary $D^{\cdot}$ such that for every function $f(z)$ holomorphic in D and continuous in $\bar{D}$ we have $|f| \leqslant M$ in D if $|f| \leqslant M$ on $S(D)$.

A real valued function $V(z)$ is plurisubharmonic in a domain D if and only if the following conditions are satisfied: (i) $-\infty \leqslant V(z) < \infty$, (ii) $V(z)$ is upper semi-continuous, (iii) the restriction of $V(z)$ to any analytic plane $E = \{z \,|\, z = z_0 + \lambda a\}$ is subharmonic in the intersection ED.

The present note is the generalization of the theorem mentioned above when D is an arbitrary bounded domain and $S^*(D)$ is the smallest closed subset of the boundary of D such that for every function $V(z)$ plurisubharmonic in D and continuous in $\bar{D}$ is $V(z) \leqslant M$ in $\bar{D}$ if $V(z) \leqslant M$ on $S^*(D)$. The existence and uniqueness of $S^*(D)$ is given in [2].

For the sake of brevity we denote by $\mathfrak{M}$ the class of all plurisubharmonic functions $\psi(z)$, $z \in D$, continuous in $\bar{D} = D + D^{\cdot}$ and $\leqslant b(z)$ on $D^{\cdot}$, where $b(z)$ is an arbitrary continuous function defined on $D^{\cdot}$.

From the definition of $S^*(D)$ the proposition follows immediately:

(P) For every point $z_0 \in S^*(D)$ and for every neighborhood $O(z_0)$ of z_0 there exists a function plurisubharmonic in D, continuous in $\bar{D}$ such that $V(z) < M$ in $\bar{D} - O(z_0)$ and $V(z) \geqslant M$ in some points of $D^{\cdot} O(z_0)$.