ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1962)

Sur l'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour d'un domaine plan

par Z. Szmydt (Kraków)

En 1948 G. Fichera a démontré que le système des polynômes harmoniques est complet dans un espace de Hilbert des fonctions définies sur la frontière S d'un domaine D (cf. [1], théorème 18) tandis que le système des dérivées de ces polynômes dans la direction de la normale à S ne l'est pas (cf. [1], théorème 19). En 1959 G. Fichera m'a proposé de démontrer que le système des polynômes harmoniques est complet dans un espace de Banach de fonctions définies sur la frontière Σ d'un domaine plan. Cet espace, dont la définition va être énoncée ci-dessous (cf. § 1), sera appelé espace $D_m(\Sigma)$.

Nous allons démontrer que le système des polynômes harmoniques est complet dans l'espace $D_m(\Sigma)$ (Théorème 1*), tandis que celui des dérivées de ces polynômes dans la direction de la normale à Σ ne l'est pas (Théorème 3). Le Théorème 1* équivaut à un théorème d'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour Σ (cf. § 2, Théorème 1).

C'est l'article [1] de G. Fichera qui m'a suggéré l'idée de baser la démonstration du théorème d'approximation sur certaines propriétés du potentiel. En effet, c'est une propriété du potentiel logarithmique de double couche, établie par le Théorème 2 de la présente note, qui nous servira à démontrer le Théorème 1*, tandis qu'une propriété de la dérivée normale du potentiel de simple couche (cf. Théorème 4) nous sera utile dans la démonstration du Théorème 3. Dans les démonstrations nous utiliserons aussi des lemmes que nous avons établis dans [5].

§ 1. Notations. Une courbe située dans le plan de la variable complexe z ($z = x+iy$) sera désignée par Σ et appelée courbe simple fermée lorsqu'elle admet la représentation paramétrique

$$z = z(s) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant L, \tag{1}$$

où

(i) $z(s)$ est une fonction périodique, de période L ($L > 0$),

(ii) $|z'(s)| = 1$ lorsque $0 \leqslant s \leqslant L$,

(iii) $z(s_1) = z(s_2)$ avec $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$ si, et seulement si, $s_1 = 0$ et $s_2 = L$.

Σ sera dite courbe de classe C^n lorsque la fonction périodique $z(s)$ est de classe C^n.

Nous dirons que la représentation paramétrique $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, de la courbe simple fermée de classe C^n est normale, lorsque $z(s)$ est une fonction de classe C^n satisfaisant aux conditions (i)-(iii).

Soit Ω le domaine limité par la courbe Σ, n_z le vecteur normal au point z de Σ dirigé vers l'intérieur de Ω et ν_z le vecteur-unité ayant le même sens.

Dans la suite on désignera par ϱ un nombre positif, par r un nombre réel arbitraire et par n, m des nombres entiers non négatifs.

D'autre part, Σ_r désignera une courbe parallèle à Σ dont la distance à Σ est $|r|$ et qui est située à l'intérieur de Ω lorsque $r > 0$ et à l'extérieur de Ω lorsque $r < 0$. La courbe Σ_0 coïncide donc avec la courbe Σ.

La courbe Σ_r est donnée par l'équation

$$(2) \qquad z = z_r(s)\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant L\,, \quad \text{où} \quad z_r(s) = z(s) + r\nu[z(s)]\,.$$

Sans restreindre la généralité, nous admettrons dans la suite que

$$\nu[z(s)] = -y'(s) + ix'(s)\,.$$

Il en résulte que l'équation de la courbe Σ_r peut s'écrire sous la forme

$$(2^*) \qquad x = x(s) - ry'(s)\,, \quad y = y(s) + rx'(s)\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant L\,.$$

Nous dirons qu'une courbe simple fermée Σ est de classe C_h^1 lorsque, étant donnée sa représentation paramétrique (1), on a

$$|z'(s_1) - z'(s_2)| \leqslant N|s_1 - s_2|^h \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s_1 \leqslant L\,, \quad 0 \leqslant s_2 \leqslant L$$

où N et h sont des constantes, $N > 0$, $0 < h \leqslant 1$.

Remarque 1. Soit Σ une courbe simple fermée de classe C_1^1.

On vérifie facilement qu'il existe un nombre $r_0 > 0$ tel que si $|r| \leqslant r_0$, la courbe Σ_r est une courbe fermée, $z_r(0) = z_r(L)$, et telle que $z_r(s_1) = z_r(s_2)$ avec $s_1 < s_2$ si, et seulement si, $s_1 = 0$ et $s_2 = L$.

Nous nous bornerons dans la suite aux valeurs r telles que $|r| \leqslant r_0$, sans le répéter à chaque occasion.

On désignera par ds_r l'élément d'arc de la courbe Σ_r. En supposant que la courbe Σ est une courbe de classe C^2, on a

$$(3) \qquad ds_r = \{[x'(s) - ry''(s)]^2 + [y'(s) + rx''(s)]^2\}^{1/2} ds\,.$$

Il en résulte $ds_0 = ds$.

Nous dirons que $f(z)$ est une fonction de classe $C^m(\Sigma_r)$ lorsque la fonction $\varphi_r(s) = f[z_r(s)]$ (¹) est une fonction de classe C^m dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$ satisfaisant aux conditions (²)

$$(4) \qquad \varphi_r^{(k)}(0) = \varphi_r^{(k)}(L)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m\,.$$

Soit $D_m(\Sigma)$ l'espace de Banach des fonctions $u(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$, avec la norme définie par la formule

$$\|u\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{0 \leqslant s \leqslant L} \left| \frac{d^k u[z(s)]}{ds^k} \right|.$$

On désignera par F, G, H les distributions d'ordre $\leqslant m$, c'est-à-dire les éléments de l'espace $D_m^*(\Sigma)$ dual à $D_m(\Sigma)$.

§ 2. Voici un théorème d'approximation dans l'espace $D_m(\Sigma)$.

THÉORÈME 1. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2}. À chaque fonction $u(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$ correspond une suite $\{w_n(z)\}$ de polynômes harmoniques telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^k w_n[z(s)]}{ds^k} = \frac{d^k u[z(s)]}{ds^k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m\,,$$

uniformément dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$.

Le Théorème 1 peut être énoncé sous la forme équivalente que voici:

THÉORÈME 1*. *Σ étant une courbe simple fermée de classe C^{m+2}, le système des polynômes harmoniques est complet dans l'espace $D_m(\Sigma)$.*

En s'appuyant sur un théorème bien connu qui donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de points soit complet dans l'espace de Banach (cf. par exemple [2], théorème XII, p. 142) il suffit, pour démontrer notre théorème, d'établir le suivant:

THÉORÈME 1**. *Soit Σ une courbe simple fermée de la classe C^{m+2}. Chaque fonctionnelle G de l'espace $D_m^*(\Sigma)$ qui s'annule sur tous les polynômes harmoniques est forcément nulle, c'est-à-dire*

$$G[f] = 0$$

pour chaque fonction $f(z)$ de la classe $C^m(\Sigma)$.

Nous allons établir d'abord le lemme 1, dont la première partie (i) nous servira dans la démonstration du Théorème 1** et la seconde (ii) dans celle du Théorème 3, énoncé au § 3 de cette note.

(¹) On suppose que la fonction $z_r(s)$ est définie par (2) et que $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, est une représentation paramétrique normale de la courbe Σ.

(²) Pour simplifier l'écriture nous emploierons la notation $\varphi^{(k)}(c)$ au lieu de la notation plus précise $d^k\varphi(s)/ds^k|_{s=c}$.

LEMME 1. (i) *Soit* Σ *une courbe de classe* C^m *et* G *une distribution,*

$$G \in D_m^*(\Sigma)\,. \tag{5}$$

Supposons que pour chaque polynôme harmonique $w(\zeta)$ *on ait*

$$G[w] = 0\,. \tag{6}$$

Alors

$$G[\log|z-\zeta|] = 0 \quad \textit{lorsque} \quad z \notin \overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma\,. \tag{7}$$

(ii) *Dans l'hypothèse que* Σ *est une courbe de classe* C^{m+1}, $F \in D_m^*(\Sigma)$ *et que pour chaque polynôme harmonique* $w(\zeta)$

$$F\left[\frac{\partial w}{\partial n_\zeta}\right] = 0\,,$$

on a

$$F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] = 0 \quad \textit{lorsque} \quad z \notin \overline{\Omega}\,. \tag{8}$$

Démonstration. Admettons, pour fixer les idées, que la courbe Σ donnée par les équations (2*) soit située dans le premier quadrant du système de coordonnées x, y et soit $K(0, \varrho_0)$ le cercle de centre à l'origine et de rayon ϱ_0 assez grand pour contenir la courbe Σ. En désignant par ϱ et θ les coordonnées polaires du point $\zeta = \xi + i\eta$ de la courbe Σ, on a $\zeta = \varrho e^{i\theta}$, $\varrho < \varrho_0$, $\varrho^2 = \xi^2+\eta^2$, $\theta = \operatorname{arctg}(\eta/\xi)$.

Soient $v_p^{(1)}(\zeta), v_p^{(2)}(\zeta)$ des polynômes harmoniques de degré p:

$$v_p^{(1)}(\zeta) = \varrho^p\cos p\theta\,, \qquad v_p^{(2)}(\zeta) = \varrho^p \sin p\theta\,, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Soit z un point arbitraire situé à l'extérieur de $K(0, \varrho_0)$. On démontre facilement l'existence de constantes $c_p^{(k)}$ $(k = 1, 2;\ p = 0, 1, 2, \ldots)$ telles que

$$\log|z-\zeta| = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} c_p^{(k)} v_p^{(k)}(\zeta)\,, \tag{9}$$

la série qui intervient au second membre de (9) étant uniformément convergente par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Si Σ est une courbe de classe C^m on a

$$\frac{\partial^h \log|z-\zeta|}{\partial s_\zeta^h} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} c_p^{(k)} \frac{\partial^h v_p^{(k)}(\zeta)}{\partial s_\zeta^h}\,, \qquad h = 1, \ldots, m\,, \tag{10}$$

et, si elle est de classe C^{m+1}, on a en outre

$$\frac{\partial^h}{\partial s_\zeta^h}\frac{\partial \log|z-\zeta|}{\partial n_\zeta} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} c_p^{(k)} \frac{\partial^h}{\partial s_\zeta^h}\frac{\partial v_p^{(k)}(\zeta)}{\partial n_\zeta}\,, \qquad h = 0, 1, 2, \ldots, m\,, \tag{11}$$

les séries qui figurent aux seconds membres de (10) et (11) étant uniformément convergentes par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Il résulte des relations (5), (9) et (10) que

$$G[\log|z-\zeta|] = G\Big[\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} c_p^{(k)} v_p^{(k)}(\zeta)\Big] = G\Big[\lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N}\sum_{k=1}^{2} c_p^{(k)} v_p^{(k)}(\zeta)\Big]$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{p=0}^{N}\sum_{k=1}^{2} c_p^{(k)} G[v_p^{(k)}(\zeta)]\,,$$

d'où, en vertu de (6), on obtient

$$G[\log|z-\zeta|] = 0 \quad \text{lorsque} \quad |z| > \varrho_0\,. \tag{12}$$

$G[\log|z-\zeta|]$ étant une fonction harmonique à l'extérieur de Σ, de (12) résulte la relation (7). La partie (i) du lemme 1 se trouve ainsi démontrée. La démonstration de la partie (ii) est tout à fait analogue. En effet, Σ étant une courbe de classe C^{m+1}, on démontre, en s'appuyant sur la relation (11) que

$$F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] = 0 \quad \text{lorsque} \quad |z| > \varrho_0\,.$$

Il en résulte la relation (8), la fonction $F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right]$ étant une fonction harmonique à l'extérieur de Σ.

Le lemme 1 se trouve ainsi complètement démontré.

Démontrons maintenant les lemmes 2-5 qui nous permettront d'établir une propriété du potentiel logarithmique énoncée dans le Théorème 2, qui suivra les lemmes en question.

LEMME 2. *Soit* Σ *une courbe simple fermée de classe* C^k, $k \geqslant 2$. *Choisissons arbitrairement une représentation paramétrique normale* $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ *de la courbe* Σ *et soit* $\zeta = z(\sigma)$, $z_r = z_r(s)$ (*cf.* (2), § 1).

Il existe alors des constantes $A > 0$ *et* ϱ_0, $0 < \varrho_0 \leqslant r_0$ (r_0 *défini dans la Remarque* 1) *et des fonctions* $R(s, \sigma), Q(s, \sigma)$ *de classe* C^{k-2} *dans l'ensemble* $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ *telles que*

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta| = \frac{Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2 + r}{[R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2 + r^2}\,, \tag{13}$$

et que

$$R(s,\sigma) + 2Q(s,\sigma)r \geqslant A \quad \textit{lorsque} \quad |r| \leqslant \varrho_0\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant L\,, \quad L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5\,. \tag{14}$$

Les fonctions $Q(s, \sigma)(s-\sigma)^2$ *et* $R(s, \sigma)(s-\sigma)^2$ *sont périodiques, de période* L *par rapport à chacune des variables* s *et* σ *séparément.*

Démonstration. On vérifie facilement que

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta| = \frac{A(s,\sigma)+r}{B(s,\sigma)+2A(s,\sigma)r+r^2}, \tag{13*}$$

où

$$A(s,\sigma) = -y'(s)[x(s)-x(\sigma)]+x'(s)[y(s)-y(\sigma)],$$
$$B(s,\sigma) = [x(s)-x(\sigma)]^2+[y(s)-y(\sigma)]^2.$$

En vertu de la périodicité des fonctions $x(s), y(s)$, les fonctions $A(s,\sigma)$, $B(s,\sigma)$ sont aussi périodiques, de période L, par rapport à chacune des variables.

Il est aisé de démontrer l'existence d'une constante positive c et des fonctions $Q(s,\sigma), R(s,\sigma)$ de classe C^{k-2} dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ telles que (³)

$$A(s,\sigma) = Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2, \qquad B(s,\sigma) = R(s,\sigma)(s-\sigma)^2,$$
$$R(s,\sigma) \geqslant c > 0,$$

lorsque $0 \leqslant s \leqslant L$, $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$. Comme les fonctions $A(s,\sigma)$, $B(s,\sigma)$ sont périodiques, la conclusion du lemme résulte de (13*).

Nous nous appuyerons dans la suite sur le lemme suivant, démontré dans [5] (cf. [4], lemme 5).

LEMME 3. *Admettons que $q(s)$ soit une fonction de classe C^m, périodique, de période L et que les fonctions $g(s,\sigma), \gamma(s,\sigma)$ soient de classe C^m dans l'ensemble $0 \leqslant s \leqslant L$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$, $a < b$. On suppose qu'il existe une constante $B > 0$ telle que*

$$g(s,\sigma) \geqslant B \quad \textit{lorsque} \quad 0 \leqslant s \leqslant L, \quad a \leqslant \sigma \leqslant b.$$

Soit

$$\gamma_0(s,\sigma) = \gamma(s,\sigma), \qquad g_0(s,\sigma) = g(s,\sigma),$$
$$\gamma_j(s,\sigma) = \frac{\partial\gamma_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial\gamma_{j-1}}{\partial\sigma}, \qquad g_j(s,\sigma) = \frac{\partial g_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial g_{j-1}}{\partial\sigma}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Admettons que

$$\frac{\gamma_j(L,\sigma)}{g_0(L,\sigma)} = \frac{\gamma_j(0,\sigma)}{g_0(0,\sigma)}, \quad \textit{pour} \quad a \leqslant \sigma \leqslant b, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$
$$\frac{g_j(L,\sigma)}{g_0(L,\sigma)} = \frac{g_j(0,\sigma)}{g_0(0,\sigma)}, \quad \textit{pour} \quad a \leqslant \sigma \leqslant b, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

(³) Cf. [5], démonstration du lemme 7. L'expression explicite des fonctions $Q(s,\sigma)$, $R(s,\sigma)$, indiquée dans [5], ne joue aucun rôle dans cette note, c'est pourquoi nous l'omettons.

Dans ces hypothèses la fonction $\Psi(\sigma)$, définie par la formule

$$\Psi(\sigma) = \int_0^L q(s)\,\frac{\gamma(s,\sigma)}{g(s,\sigma)}\,ds,$$

admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre m. Les dérivées $d^k\Psi(\sigma)/d\sigma^k$ $(k = 1, \ldots, m)$ prennent la forme suivante

$$\frac{d^k\Psi(\sigma)}{d\sigma^k} = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}\sum_{a_1,\ldots,a_k} A^{ij}_{a_1\ldots a_k}\int_0^L \frac{d^iq}{ds^i}\cdot\frac{\gamma_j}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{g_k}{g_0}\right)^{a_k} ds, \tag{15}$$

où $A^{ij}_{a_1\ldots a_k}$ désignent des constantes (⁴), indépendantes des fonctions $q(s)$, $g(s,\sigma)$ et $\gamma(s,\sigma)$, $0 \leqslant a_i \leqslant k$, lorsque $i = 1, \ldots, k$, $a_1+2a_2+\ldots+ka_k = k-(i+j)$.

LEMME 4. *Supposons que pour chaque $|r| \leqslant r^*$ les fonctions $\beta_r(s)$ et $h_r(s)$ soient définies dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$; $\beta_r(s)$ est une fonction continue et $h_r(s)$ une fonction intégrable et bornée.*

Soit Π le rectangle: $0 \leqslant s \leqslant L$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$, où $0 \leqslant a < b \leqslant L$.

Supposons que les fonctions $g_r(s,\sigma)$, $f_{r(i)}(s,\sigma)$ $(i = 1, \ldots, j)$ soient continues dans Π lorsque $|r| \leqslant r^*$ et qu'elles y vérifient les inégalités

$$|g_r(s,\sigma)| \geqslant C_1[(s-\sigma)^2+r^2], \tag{16}$$
$$|f_{r(i)}(s,\sigma)| \leqslant C_2[(s-\sigma)^2+r|s-\sigma|+r^2], \qquad i = 1, \ldots, j, \tag{17}$$

où C_1 et C_2 désignent des constantes positives.

Supposons encore que

$$\lim_{r\to 0}\beta_r(s) = \beta_0(s), \qquad \lim_{r\to 0}h_r(s) = h_0(s), \tag{18}$$

$$\lim_{r\to 0}g_r(s,\sigma) = g_0(s,\sigma), \qquad \lim_{r\to 0}f_{r(i)}(s,\sigma) = f_{0(i)}(s,\sigma), \qquad i = 1, \ldots, j, \tag{19}$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$ et dans le rectangle Π respectivement.

Soient enfin $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ des nombres entiers non négatifs et posons (⁵)

$$\mu_r(s,\sigma) = \left[\frac{f_{r(1)}(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\right]^{\lambda_1}\ldots\left[\frac{f_{r(j)}(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\right]^{\lambda_j}.$$

(⁴) Les valeurs numériques et le nombre des constantes $A^{ij}_{a_1\ldots a_k}$ ne jouent ici aucun rôle. Il importe uniquement que les constantes soient finies et que pour chaque k le second membre de (15) contienne un nombre fini de termes.

(⁵) Si $r > 0$ la fonction $\mu_r(s,\sigma)$ est définie dans le rectangle Π tout entier. Si $r = 0$, elle peut ne pas l'être sur le segment $s = \sigma$.

Dans ces hypothèses on a

$$\lim_{r\to 0}\int_0^L h_r(s)\,\frac{r[\beta_r(s)-\beta_r(\sigma)]}{g_r(s,\sigma)}\,ds = 0\,, \tag{20}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_0^L h_r(s)\,\mu_r(s,\sigma)\,ds = \int_0^L h_0(s)\,\mu_0(s,\sigma)\,ds\,, \tag{21}$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $a \leqslant \sigma \leqslant b$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'en vertu des hypothèses (16) et (17) on a pour chaque $|r| \leqslant r^*$ les inégalités suivantes

$$\int_0^L \left|\frac{r}{g_r(s,\sigma)}\right| ds \leqslant \pi/C_1\,, \tag{22}$$

$$\left|\frac{f_{r(i)}(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\right| \leqslant 2C_2/C_1 \quad \text{lorsque} \quad s \neq \sigma\,, \quad i = 1, \ldots, j\,. \tag{23}$$

En raison des hypothèses (16), (18) et (19) on constate que pour chaque $\delta > 0$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r[\beta_r(s)-\beta_r(\sigma)]}{g_r(s,\sigma)}\,h_r(s) = 0\,, \tag{24}$$

$$\lim_{r\to 0}\mu_r(s,\sigma)\,h_r(s) = \mu_0(s,\sigma)\,h_0(s)\,, \tag{25}$$

la convergence étant uniforme dans l'ensemble $0 \leqslant s \leqslant L$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$, $|s-\sigma| \geqslant \delta$.

La relation (21) résulte immédiatement des formules (23) et (25); la relation (20) se déduit de (22), (24) et de la remarque que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe des nombres $\delta > 0$ et r_1, $0 < r_1 \leqslant r^*$ tels que $|\beta_r(s)-\beta_r(\sigma)| \leqslant \varepsilon$ lorsque $|s-\sigma| \leqslant \delta$ et $|r| \leqslant r_1$.

Le lemme 4 se trouve ainsi démontré.

LEMME 5. *Soit m un entier non négatif. Supposons que pour chaque r, $|r| \leqslant r_1$, $r_1 > 0$, les fonctions $q_r(s)$ et $a_r(s)$ soient des fonctions de classe C^m lorsque $-\infty < s < \infty$, périodiques, de période L et que les fonctions $g_r(s,\sigma)$, $\gamma_r(s,\sigma)$ de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$, où $0 < a < b < L$ soient périodiques par rapport à la variable s, de période L.*

Nous admettons en plus que (cf. le renvoi (²)*)*

$$\lim_{r\to 0} q_r^{(j)}(s) = q_0^{(j)}(s)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, m\,, \tag{26}$$

$$\lim_{r\to 0} a_r^{(j)}(s) = a_0^{(j)}(s)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, m\,, \tag{27}$$

uniformément par rapport à s dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$, et supposons qu'il existe des fonctions $M(s,\sigma)$, $N(s,\sigma)$, $P(s,\sigma)$, $Q(s,\sigma)$, $R(s,\sigma)$ de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$ et une constante $A > 0$ telles que

$$\gamma_r(s,\sigma) = M(s,\sigma)(s-\sigma)^2 + N(s,\sigma)(s-\sigma)r + P(s,\sigma)r^2 + \\ + [a_r(s)-a_r(\sigma)][Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2 + r]\,,$$

$$g_r(s,\sigma) = [R(s,\sigma) + 2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2 + r^2\,,$$

$$R(s,\sigma) + 2Q(s,\sigma)r \geqslant A \quad \textit{lorsque} \quad 0 \leqslant s \leqslant L\,, \quad a \leqslant \sigma \leqslant b\,, \quad |r| \leqslant r_1\,. \tag{28}$$

Dans ces hypothèses on a

$$\lim_{r\to 0}\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L q_r(s)\,\frac{\gamma_r(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\,ds \\ = \frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L q_0(s)\,\frac{M(s,\sigma) + [a_0(s)-a_0(\sigma)]Q(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}\,ds\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m\,,$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $a \leqslant \sigma \leqslant b$.

Démonstration. Soit

$$\gamma_{r0}(s,\sigma) = \gamma_r(s,\sigma)\,, \qquad g_{r0}(s,\sigma) = g_r(s,\sigma)\,,$$

$$\gamma_{rj}(s,\sigma) = \frac{\partial\gamma_{r,j-1}}{\partial s} + \frac{\partial\gamma_{r,j-1}}{\partial\sigma}\,, \qquad g_{rj}(s,\sigma) = \frac{\partial g_{r,j-1}}{\partial s} + \frac{\partial g_{r,j-1}}{\partial\sigma}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{29}$$

pour $|r| \leqslant r_1$, $-\infty < s < \infty$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$.

On vérifie facilement que toutes les hypothèses du lemme 3 concernant les fonctions $q(s)$, $g(s,\sigma)$, $\gamma(s,\sigma)$ sont vérifiées par les fonctions $q_r(s)$, $g_r(s,\sigma)$, $\gamma_r(s,\sigma)$ $(0 < |r| \leqslant r_1)$ respectivement. Il en résulte que, dans l'hypothèse $0 < |r| \leqslant r_1$, on a

$$\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L q_r(s)\,\frac{\gamma_r(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\,ds = \int_0^L \varphi_{rk}(s,\sigma)\,ds \qquad \text{lorsque} \qquad a \leqslant \sigma \leqslant b\,, \tag{30}$$

où

$$\varphi_{r0}(s,\sigma) = q_r(s)\,\frac{\gamma_r(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\,,$$

$$\varphi_{rk}(s,\sigma) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}\sum_{a_1,\ldots,a_k} A^{ij}_{a_1\ldots a_k}\frac{d^i q_r}{ds^i}\cdot\frac{\gamma_{rj}}{g_{r0}}\left(\frac{g_{r1}}{g_{r0}}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{g_{rk}}{g_{r0}}\right)^{a_k}, \qquad k = 1, \ldots, m\,. \tag{31}$$

Les fonctions $g_{rj}(s,\sigma)$, $\gamma_{rj}(s,\sigma)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ étant aussi définies lorsque $r = 0$, il est évident que le second membre de (31) définit pour $r = 0$ des fonctions des variables s et σ dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$, $s \neq \sigma \pm nL$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ces fonctions seront désignées dans la suite par $\varphi_{0k}(s,\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Soit

$$M_0(s,\sigma)=M(s,\sigma)\,,\quad N_0(s,\sigma)=N(s,\sigma)\,,\quad P_0(s,\sigma)=P(s,\sigma)\,,$$
$$R_0(s,\sigma)=R(s,\sigma)\,,\quad Q_0(s,\sigma)=Q(s,\sigma)\,.$$

(32)
$$M_j(s,\sigma)=\frac{\partial M_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial M_{j-1}}{\partial\sigma}\,,\quad N_j(s,\sigma)=\frac{\partial N_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial N_{j-1}}{\partial\sigma}\,,$$
$$P_j(s,\sigma)=\frac{\partial P_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial P_{j-1}}{\partial\sigma}\,,\quad j=1,\ldots,m\,,$$
$$R_j(s,\sigma)=\frac{\partial R_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial R_{j-1}}{\partial\sigma}\,,\quad Q_j(s,\sigma)=\frac{\partial Q_{j-1}}{\partial s}+\frac{\partial Q_{j-1}}{\partial\sigma}\,.$$

On vérifie aisément qu'on a, pour chaque $|r|\leqslant r_1$ (cf. (29)),

(33)
$$\begin{aligned}g_{r0}(s,\sigma)&=[R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2+r^2\\&=[R_0(s,\sigma)+2Q_0(s,\sigma)r](s-\sigma)^2+r^2\,,\\g_{rj}(s,\sigma)&=[R_j(s,\sigma)+2Q_j(s,\sigma)r](s-\sigma)^2\,,\quad j=1,\ldots,m\,,\end{aligned}$$

et qu'il existe des constantes a_{ij} telles que

(34)
$$\begin{aligned}\gamma_{rj}(s,\sigma)&=M_j(s,\sigma)(s-\sigma)^2+N_j(s,\sigma)(s-\sigma)r+P_j(s,\sigma)r^2+\\&+\sum_{i=0}^{j}a_{ij}[a_r^{(i)}(s)-a_r^{(i)}(\sigma)]Q_{j-i}(s,\sigma)(s-\sigma)^2+r[a_r^{(j)}(s)-a_r^{(j)}(\sigma)]\,,\end{aligned}$$
$$a_{jj}=1\,,\quad j=0,1,\ldots,m\,.$$

Soit

(35)
$$M_{rj}^*(s,\sigma)=M_j(s,\sigma)+\sum_{i=0}^{j}a_{ij}[a_r^{(i)}(s)-a_r^{(i)}(\sigma)]Q_{j-i}(s,\sigma)\,,\quad j=0,1,\ldots,m\,.$$

Avec ces notations, les identités (34) peuvent s'écrire

(36)
$$\begin{aligned}\gamma_{rj}(s,\sigma)&=M_{rj}^*(s,\sigma)(s-\sigma)^2+N_j(s,\sigma)(s-\sigma)r+P_j(s,\sigma)r^2+\\&+r[a_r^{(j)}(s)-a_r^{(j)}(\sigma)]\,,\quad j=0,1,\ldots,m\,.\end{aligned}$$

Les fonctions $g_{rj}(s,\sigma)$, $\gamma_{rj}(s,\sigma)$ $(j=0,1,\ldots,m;\ |r|\leqslant r_1)$, étant périodiques de période L par rapport à la variable s, il résulte des relations (33), (36) et de l'hypothèse: $a>0$, $b<L$ que

$$\frac{M_{0j}^*(L,\sigma)}{R_0(L,\sigma)}=\frac{\gamma_{0j}(L,\sigma)}{g_{00}(L,\sigma)}=\frac{\gamma_{0j}(0,\sigma)}{g_{00}(0,\sigma)}=\frac{M_{0j}^*(0,\sigma)}{R_0(0,\sigma)}\,,\quad j=0,1,\ldots,m\,,$$
$$\frac{R_j(L,\sigma)}{R_0(L,\sigma)}=\frac{g_{0j}(L,\sigma)}{g_{00}(L,\sigma)}=\frac{g_{0j}(0,\sigma)}{g_{00}(0,\sigma)}=\frac{R_j(0,\sigma)}{R_0(0,\sigma)}\,,\quad j=1,2,\ldots,m\,,$$

dans l'intervalle $a\leqslant\sigma\leqslant b$.

On voit ainsi que toutes les hypothèses du lemme 3 concernant les fonctions $q(s)$, $g(s,\sigma)$, $\gamma(s,\sigma)$ sont vérifiées respectivement par les fonctions $q_0(s)$, $R_0(s,\sigma)$ et $M_{00}^*(s,\sigma)$. Il en résulte que (cf. (30), (31), (33) et (36))

(37)
$$\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L q_0(s)\,\frac{M_{00}^*(s,\sigma)}{R_0(s,\sigma)}\,ds=\int_0^L\varphi_{0k}(s,\sigma)\,ds$$

lorsque $a\leqslant\sigma\leqslant b$ et $k=0,1,\ldots,m$.

Afin d'établir le lemme il reste à démontrer que (cf. (30), (37), (35), (32))

(38)
$$\lim_{r\to0}\int_0^L\varphi_{rk}(s,\sigma)\,ds=\int_0^L\varphi_{0k}(s,\sigma)\,ds\,,\quad k=0,1,\ldots,m\,,$$

uniformément dans l'intervalle $a\leqslant\sigma\leqslant b$. Cette démonstration sera basée sur le lemme 4.

Comme la fonction $a_r(s)$ est, par hypothèse, de classe C^m dans l'intervalle $-\infty<s<\infty$, on a

(39)
$$a_r^{(j)}(s)-a_r^{(j)}(\sigma)=(s-\sigma)\int_0^1 a_r^{(j+1)}[\sigma+\tau(s-\sigma)]\,d\tau\,,\quad j=0,1,\ldots,m-1\,.$$

Soit

(40)
$$\gamma_{rm}^*(s,\sigma)=M_{rm}^*(s,\sigma)(s-\sigma)^2+N_m(s,\sigma)(s-\sigma)r+P_m(s,\sigma)r^2\,,$$

(41)
$$N_{rj}^*(s,\sigma)=N_j(s,\sigma)+\int_0^1 a_r^{(j+1)}[\sigma+\tau(s-\sigma)]\,d\tau\,,\quad j=0,1,\ldots,m-1\,.$$

On vérifie facilement (cf. (36), (39), (41) et (40)) que

(42)
$$\gamma_{rj}(s,\sigma)=M_{rj}^*(s,\sigma)(s-\sigma)^2+N_{rj}^*(s,\sigma)(s-\sigma)r+P_j(s,\sigma)r^2\,,\quad j=0,1,\ldots,m-1\,,$$

et

(43)
$$\gamma_{rm}(s,\sigma)=\gamma_{rm}^*(s,\sigma)+r[a_r^{(m)}(s)-a_r^{(m)}(\sigma)]\,.$$

Soit C un nombre quelconque, $0<C<\infty$ tel que dans l'ensemble: $0\leqslant s\leqslant L$, $a\leqslant\sigma\leqslant b$ on ait les inégalités suivantes

(44)
$$\begin{aligned}&|M_{rj}^*(s,\sigma)|\leqslant C\quad\text{lorsque}\quad|r|\leqslant r_1\,,\quad j=0,1,\ldots,m\,,\\&|N_{rj}^*(s,\sigma)|\leqslant C\quad\text{lorsque}\quad|r|\leqslant r_1\,,\quad j=0,1,\ldots,m-1\,,\\&|N_m(s,\sigma)|\leqslant C\,,\\&|P_j(s,\sigma)|\leqslant C\,,\quad|Q_j(s,\sigma)|\leqslant C\,,\quad|R_j(s,\sigma)|\leqslant C\,,\quad j=0,1,\ldots,m\,.\end{aligned}$$

Les inégalités (44) et (28) assurent que dans l'ensemble: $0 \leqslant s \leqslant L$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$, $|r| \leqslant r_1$ les inégalités suivantes subsistent (cf. (33), (42) et (40))

$$(45)\qquad \begin{aligned} &g_{r0}(s,\sigma) \geqslant A(s-\sigma)^2 + r^2,\\ &|g_{rj}(s,\sigma)| \leqslant C(1+2r_1)(s-\sigma)^2, \qquad j = 1, 2, \dots, m,\end{aligned}$$

$$(46)\qquad \begin{aligned} &|\gamma_{rj}(s,\sigma)| \leqslant C[(s-\sigma)^2 + r|s-\sigma| + r^2], \qquad j = 0, 1, \dots, m-1,\\ &|\gamma^*_{rm}(s,\sigma)| \leqslant C[(s-\sigma)^2 + r|s-\sigma| + r^2].\end{aligned}$$

D'autre part, on voit immédiatement que (cf. (33), (34), (27), (40) et (35))

$$(47)\qquad \lim_{r\to 0} g_{rj}(s,\sigma) = g_{0j}(s,\sigma), \qquad \lim_{r\to 0}\gamma_{rj}(s,\sigma) = \gamma_{0j}(s,\sigma), \qquad j = 0, 1, \dots, m,$$
$$\lim_{r\to 0}\gamma^*_{rm}(s,\sigma) = \gamma^*_{0m}(s,\sigma),$$

uniformément dans l'ensemble $0 \leqslant s \leqslant L$, $a \leqslant \sigma \leqslant b$.

On constate aisément, en vertu de (43) et (31), que

$$(48)\qquad \varphi_{rm}(s,\sigma) = A^{0m}_{0\dots 0}\, q_r(s)\left\{\frac{\gamma^*_{rm}(s,\sigma)}{g_{r0}(s,\sigma)} + \frac{r[a_r^{(m)}(s) - a_r^{(m)}(\sigma)]}{g_{r0}(s,\sigma)}\right\} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-j}\sum_{a_1,\dots,a_m} A^{ij}_{a_1\dots a_m}\, q_r^{(i)}(s)\,\frac{\gamma_{rj}}{g_{r0}}\left(\frac{g_{r1}}{g_{r0}}\right)^{a_1}\dots\left(\frac{g_{rm}}{g_{r0}}\right)^{a_m}.$$

En rapprochant les relations (45)-(47) et (26), (27) on déduit du lemme 4 les relations (38) (cf. (31) et (48)).

Le lemme 5 se trouve ainsi démontré.

Nous allons considérer dans la suite des fonctions $p(z)$ vérifiant la condition que voici:

CONDITION $K^m(\Sigma)$. On dira que la fonction $p(z)$ vérifie la condition $K^m(\Sigma)$ lorsqu'elle possède les propriétés suivantes:

(i) $p(z)$ est une fonction de classe $C^m(\Sigma_r)$ pour chaque $|r| \leqslant r_0$ (cf. la Remarque 1);

(ii) les limites

$$(49)\qquad \lim_{r\to 0}\frac{d^j p[z_r(s)]}{ds^j} = \frac{d^j p[z(s)]}{ds^j}, \qquad j = 0, 1, \dots, m,$$

existent, la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$.

Remarque 2. Étant donnée une fonction arbitraire $p(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$, il existe toujours une fonction, vérifiant la condition $K^m(\Sigma)$, qui coïncide avec $p(z)$ sur la courbe Σ.

En effet, pour obtenir une telle fonction il suffit de poser (cf. la Remarque 1)

$$p(z_r) = p(z) \quad \text{lorsque} \quad z_r = z + r\nu(z).$$

THÉORÈME 2 [6]. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2} et $p(z)$ une fonction vérifiant la condition $K^m(\Sigma)$.*

Dans ces conditions les limites suivantes existent uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$:

$$(50)\qquad \lim_{\varrho\to 0}\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma_{\pm\varrho}} p(z_{\pm\varrho})\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_{\pm\varrho} - \zeta|\, ds_{\pm\varrho z}$$
$$= \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\, ds_z \pm \pi\frac{\partial^k p(\zeta)}{\partial s_\zeta^k}, \qquad k = 0, 1, \dots, m\ [7].$$

Démonstration. Soit ζ_0 un point arbitrairement choisi sur la courbe Σ. Il suffit évidemment d'établir que la relation (50) a lieu dans un voisinage du point ζ_0 sur la courbe Σ. Nous le démontrerons en nous servant de la représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, de la courbe Σ telle que $\zeta_0 = z(L/2)$.

Nous allons d'abord établir que le second membre de (50) a un sens. Remarquons à cet effet que $\dfrac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta| = O(1)$. Soit

$$u(\zeta) = \int_\Sigma p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\, ds_z.$$

En vertu du lemme 2 la fonction

$$\varphi(\sigma) = u[z(\sigma)] = \int_0^L p[z(s)]\frac{Q(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}\, ds$$

est une fonction de classe C^m dans l'intervalle $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$. Les dérivées $\dfrac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}u(\zeta)$ $(k = 1, \dots, m)$, existent donc dans un voisinage du point ζ_0 sur la courbe Σ.

Observons ensuite que, en vertu des relations

$$\int_{\Sigma_{-\varrho}}\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_{-\varrho} - \zeta|\, ds_{-\varrho} = -2\pi, \qquad \int_{\Sigma_\varrho}\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_\varrho - \zeta|\, ds_\varrho = 0,$$
$$\int_\Sigma\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\, ds_z = -\pi,$$

---

[6] Dans le cas où $m = 0$ l'hypothèse concernant la courbe Σ peut être affaiblie, à savoir il suffit d'admettre que Σ est une courbe simple fermée de la classe C^1_1. Une démonstration bien simple de cette propriété sera ajoutée à la fin de cette note (cf. le § 4).

[7] Les symboles ds_z et ds_{rz} introduits au lieu de ds et ds_r indiquent que c'est le point z qui varie dans l'intégration, le point $z_r \in \Sigma_r$ étant lié au point $z \in \Sigma$ par la relation $z_r = z + r\nu(z)$.

la démonstration du Théorème 2 se ramène à celle de la propriété suivante:

$$\text{(51)}\quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma_r}[p(z_r)-p(\zeta_r)]\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta|\,ds_{rz}$$

$$=\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma}[p(z)-p(\zeta)]\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z\,,\qquad k=0,1,\ldots,m\,,$$

la convergence étant uniforme par rapport à $\zeta\in\Sigma$.

La démonstration de la relation (51) sera basée sur les lemmes 2 et 5.

Soit

$$\text{(52)}\qquad w_{rk}(\zeta)=\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma_r}[p(z_r)-p(\zeta_r)]\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta|\,ds_{rz}$$

lorsque $\zeta\in\Sigma$, $|r|\leqslant r_0$, $k=0,1,\ldots,m$.

En vertu du lemme 2, on a pour chaque $|r|\leqslant\varrho_0$

$$\text{(53)}\quad w_{rk}[z(\sigma)]$$

$$=\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L\{p[z_r(s)]-p[z_r(\sigma)]\}\frac{Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2+r}{[R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2+r^2}\cdot\frac{ds_r}{ds}ds\,,$$

où ds_r est donné par (3).

Les fonctions $Q(s,\sigma)$, $R(s,\sigma)$ ayant la même signification que dans le lemme 2, on a

$$\text{(54)}\quad R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r\geqslant A>0\quad\text{lorsque}\quad |r|\leqslant\varrho_0\,,\quad 0\leqslant s\leqslant L\,,\quad L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5\,.$$

Soit

$$\text{(55)}\qquad a_r(s)=p[z_r(s)]\quad\text{lorsque}\quad 0\leqslant s\leqslant L\,,\quad |r|\leqslant\varrho_0\,,$$

$$\text{(56)}\qquad g_r(s,\sigma)=[R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2+r^2\,,$$

lorsque $0\leqslant s\leqslant L$, $0\leqslant\sigma\leqslant L$.

Comme la fonction $p(z)$ vérifie la condition $K^m(\Sigma)$, on constate immédiatement que $a_r(s)$ est une fonction de classe C^m, périodique, de période L et que

$$\text{(57)}\qquad \lim_{r\to 0}a_r^{(j)}(s)=a_0^{(j)}(s)\,,\qquad j=0,1,\ldots,m\,,$$

uniformément dans l'intervalle $0\leqslant s\leqslant L$.

Soit

$$\text{(58)}\qquad q_r(s)=\frac{ds_r}{ds}\,,$$

$$\text{(59)}\qquad \gamma_r(s,\sigma)=[a_r(s)-a_r(\sigma)][Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2+r]\,.$$

On voit bien que toutes les hypothèses du lemme 5 relativement aux fonctions $a_r(s)$, $q_r(s)$, $\gamma_r(s,\sigma)$, $g_r(s,\sigma)$, définies respectivement par les relations (55), (58), (59) et (56), sont vérifiées (cf. en particulier les relations (54) et (57)). Il en résulte que

$$\text{(60)}\quad \lim_{r\to 0}\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L\frac{[a_r(s)-a_r(\sigma)][Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2+r]}{[R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2+r^2}\cdot\frac{ds_r}{ds}ds$$

$$=\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L\frac{[a_0(s)-a_0(\sigma)]\,Q(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}ds\,,\qquad k=0,1,\ldots,m\,,$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$.

En rapprochant les relations (53), (55) et (60) on constate que

$$\text{(61)}\qquad \lim_{r\to 0}w_{rk}[z(\sigma)]=w_{0k}[z(\sigma)]\,,\qquad k=0,1,\ldots,m\,,$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$.

Cette dernière relation prouve, vu la définition (52) des fonctions $w_{rk}(\zeta)$, que les relations (51) sont vérifiées dans un voisinage du point $\zeta_0=z(L/2)$ sur la courbe Σ.

Le Théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Lemme 6. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2} et $q(\zeta)$ une fonction de classe $C^m(\Sigma)$, $m\geqslant 0$.*

Considérons les équations intégrales conjuguées

$$\text{(62)}\qquad p(\zeta)=\frac{\lambda}{\pi}\int_\Sigma p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z+q(\zeta)$$

et

$$\text{(63)}\qquad p(\zeta)=\frac{\lambda}{\pi}\int_\Sigma p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,ds_z+q(\zeta)\,.$$

Si $\lambda=1$ l'équation (62), *aussi bien que* (63), *admettent une solution de classe $C^m(\Sigma)$.*

Si $\lambda=-1$ et si la relation

$$\text{(64)}\qquad \int_\Sigma q(\zeta)\,ds=0\,,$$

est satisfaite, l'équation (63) *admet une solution de classe $C^m(\Sigma)$.*

Démonstration. Si $m=0$, le lemme 6 résulte [8] des théorèmes bien connus concernant l'existence des solutions des équations (62) et (63).

---

[8] Cette propriété a lieu même si l'on suppose seulement que Σ est une courbe simple fermée de classe C_h^1 et que $q(\zeta)$ est une fonction de classe $C^0(\Sigma)$.

Il suffit donc de démontrer que dans les hypothèses admises chaque solution continue, soit de l'équation (62) avec $\lambda = 1$, soit de (63) avec $\lambda = \pm 1$, appartient à la classe $C^m(\Sigma)$. Nous nous bornerons à démontrer que la solution $p(z)$ de l'équation (62) correspondant à la valeur $\lambda = 1$ est une fonction de classe $C^m(\Sigma)$, car la démonstration relative à la solution de l'équation (63) est tout à fait analogue.

Choisissons arbitrairement un point ζ_0 sur la courbe Σ.

Soit $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ la représentation paramétrique normale de la courbe Σ telle que $\zeta_0 = z(L/2)$. Si $p(z)$ est une solution de l'équation (62) avec $\lambda = 1$ on a, en vertu du lemme 2,

$$p[z(\sigma)] = \frac{1}{\pi}\int_0^L p[z(s)]N(s, \sigma)\,ds + q[z(\sigma)],$$

où

$$N(s, \sigma) = Q(s, \sigma)/R(s, \sigma)$$

est une fonction de classe C^m dans l'ensemble $0 \leqslant s \leqslant L$, $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$. Il en résulte que la fonction $p[z(\sigma)]$ est de classe C^m dans le voisinage $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$ du point $\sigma = L/2$, ce qui entraîne notre assertion.

LEMME 7. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C_1^1 et $f(z, \zeta)$ une fonction définie pour chaque couple (z, ζ) où $z \in \Sigma_r$ et $\zeta \in \Sigma$. Supposons que les fonctions* (cf. (2))

$$\frac{\partial^k f[z_r(s), z(\sigma)]}{\partial \sigma^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

soient continues dans l'ensemble $0 \leqslant s \leqslant L$, $0 \leqslant \sigma \leqslant L$.

Dans ces hypothèses on a, pour chaque fonction $p(z)$ de classe $C^0(\Sigma_r)$ et pour chaque fonctionnelle $H \in D_m^*(\Sigma)$, la relation

$$\int_{\Sigma_r} p(z_r)H[f(z_r, \zeta)]\,ds_{rz} = H\Big[\int_{\Sigma_r} p(z_r)f(z_r, \zeta)\,ds_{rz}\Big].$$

La démonstration de ce lemme, assez simple, peut être omise (cf. [4], lemme 1).

LEMME 8. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2}. Supposons que $G \in D_m^*(\Sigma)$ et que*

$$G[\log|z - \zeta|] = 0 \quad \textit{lorsque} \quad z \notin \bar{\Omega}. \tag{65}$$

On a alors

$$G = 0,$$

c'est-à-dire, pour chaque fonction $f \in C^m(\Sigma)$,

$$G[f] = 0.$$

Démonstration. G étant une fonctionnelle continue et linéaire, il résulte de la définition de la dérivée que

$$\frac{\partial}{\partial n_z} G[\log|z-\zeta|] = G\Big[\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\Big] \quad \text{lorsque} \quad z \notin \Sigma,$$

d'où l'on obtient, sous l'hypothèse (65),

$$G\Big[\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\Big] = 0 \quad \text{lorsque} \quad z \notin \bar{\Omega}.$$

En vertu du lemme 7, il en résulte que

$$G\Big[\int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho})\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_{-\varrho} - \zeta|\,ds_{-\varrho z}\Big] = 0 \tag{66}$$

pour chaque $0 < \varrho \leqslant r_0$ et chaque fonction $p(z)$ de classe $C^0(\Sigma_{-\varrho})$. En s'appuyant sur le Théorème 2 et sur la relation (66), on conclut que

$$G\Big[\int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z - \pi p(\zeta)\Big] = 0 \tag{67}$$

pour chaque fonction $p(z)$ vérifiant la condition $K^m(\Sigma)$ et, en vertu de la Remarque 2, pour chaque fonction $p(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$.

D'après le lemme 6, à chaque fonction $f(\zeta)$ de classe $C^m(\Sigma)$ correspond une fonction $p(\zeta)$, appartenant à la même classe, telle que

$$f(\zeta) = \int_{\Sigma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z - \pi p(\zeta).$$

Mais la relation (67) entraîne

$$G[f(\zeta)] = 0$$

pour chaque fonction $f(\zeta)$ de classe $C^m(\Sigma)$.

Le lemme 8 se trouve ainsi démontré.

Les Théorèmes 1**, 1* et 1 résultent immédiatement des lemmes 1 et 8.

§ 3. THÉORÈME 3. *Le système des dérivées des polynômes harmoniques dans la direction de la normale n'est pas complet dans l'espace $D_m(\Sigma)$.*

Plus précisément, nous allons démontrer que si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+2}, $F \in D_m^*(\Sigma)$ et $F[\partial w(\zeta)/\partial n_\zeta] = 0$ pour chaque polynôme harmonique $w(\zeta)$, il existe une constante c telle que

$$F[f] = c\int_{\Sigma} f(z)\,ds$$

pour chaque fonction $f(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$.

La démonstration du Théorème 3 sera basée sur les lemmes 9, 10 et le Théorème 4 qui suivent.

LEMME 9. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2} et $p(z)$ une fonction vérifiant la condition $K^m(\Sigma)$.*

On a

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma_r} p(z_r)\left[\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta|+\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta|\right]ds_{rz} \tag{68}$$
$$=\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma} p(z)\left[\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|+\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right]ds_z,\qquad k=0,1,\ldots,m,$$

la convergence étant uniforme relativement à $\zeta\in\Sigma$.

Démonstration. Soit

$$\omega_{rk}(\zeta)=\frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k}\int_{\Sigma_r} p(z_r)\left[\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta|+\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta|\right]ds_{rz},\qquad k=0,1,\ldots,m. \tag{69}$$

Il est évident que, si $|r|>0$, les fonctions $\omega_{rk}(\zeta)$ sont définies pour $\zeta\in\Sigma$. Lorsque $k=0$, la fonction $\omega_{0k}(\zeta)$ est aussi définie sur la courbe Σ car, comme on le sait bien (cf. [3], p. 91)

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|=O(1),\qquad \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|=O(1)$$

lorsque $z,\zeta\in\Sigma$ et Σ est une courbe de classe C_1^1.

Il sera démontré dans la suite que les fonctions $\omega_{0k}(\zeta)$ $(k=1,\ldots,m)$ sont aussi définies sur la courbe Σ.

Soit ζ_0 un point arbitrairement choisi sur la courbe Σ et soit $z=z(s)$ la représentation paramétrique normale de la courbe Σ telle que $z(L/2)=\zeta_0$. Il est évident que pour démontrer les propriétés qui nous intéressent il suffit de se borner au voisinage $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$ du point $\sigma=L/2$.

On vérifie facilement (cf. (2*), § 1 et (13*), § 2) que

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta|=\frac{[x(s)-x(\sigma)]y'(\sigma)-[y(s)-y(\sigma)]x'(\sigma)+r[Z(s,\sigma)-1]}{B(s,\sigma)+2A(s,\sigma)r+r^2} \tag{70}$$

où

$$Z(s,\sigma)=y'(s)[y'(s)-y'(\sigma)]+x'(s)[x'(s)-x'(\sigma)], \tag{71}$$

et les fonctions $A(s,\sigma)$, $B(s,\sigma)$ coïncident avec les fonctions introduites dans la démonstration du lemme 2.

Comme les fonctions $x(s), y(s)$ sont de classe C^{m+2} par hypothèse, il existe des fonctions $R(s,\sigma)$, $Q(s,\sigma)$, $U(s,\sigma)$, $W(s,\sigma)$ de classe C^m dans l'ensemble $-\infty<s<\infty$, $-\infty<\sigma<\infty$ telles que

$$A(s,\sigma)=Q(s,\sigma)(s-\sigma)^2,\qquad B(s,\sigma)=R(s,\sigma)(s-\sigma)^2, \tag{72}$$
$$Z(s,\sigma)=W(s,\sigma)(s-\sigma),$$

$$[x(s)-x(\sigma)][y'(\sigma)-y'(s)]+[y(s)-y(\sigma)][x'(s)-x'(\sigma)]=U(s,\sigma)(s-\sigma)^2. \tag{73}$$

Les fonctions $R(s,\sigma)$, $Q(s,\sigma)$ vérifient l'inégalité (14).

Il résulte des relations (13*), (70), (72) et (73) que

$$\omega_{rk}[z(\sigma)]=\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L q_r(s)\frac{h_r(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}ds,\qquad k=0,1,\ldots,m, \tag{74}$$

où

$$q_r(s)=p[z_r(s)]\frac{ds_r}{ds},\qquad h_r(s,\sigma)=U(s,\sigma)(s-\sigma)^2+W(s,\sigma)(s-\sigma)r,$$
$$g_r(s,\sigma)=[R(s,\sigma)+2Q(s,\sigma)r](s-\sigma)^2+r^2,$$

et

$$0<|r|\leqslant\varrho_0 \text{ si } k=1,\ldots,m\quad\text{ et }\quad |r|\leqslant\varrho_0 \text{ si } k=0.$$

Les fonctions $g_r(s,\sigma)$, $q_r(s)$ et $h_r(s,\sigma)$ sont périodiques, de période L par rapport à chacune des variables s et σ séparément.

On constate facilement que la fonction

$$\varphi(\sigma)=\omega_{00}[z(\sigma)]=\int_0^L p[z(s)]\frac{U(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}ds$$

est de classe C^m dans l'intervalle $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$. En conséquence les fonctions $\omega_{0k}(\zeta)$ $(k=1,\ldots,m)$ sont aussi définies sur la courbe Σ dans un voisinage du point ζ_0. On a

$$\omega_{0k}[z(\sigma)]=\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L p[z(s)]\frac{U(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}ds,\qquad k=0,1,\ldots,m. \tag{75}$$

Remarquons ensuite qu'en vertu du lemme 5, dans lequel $\gamma_r(s,\sigma)=h_r(s,\sigma)$ $(M(s,\sigma)=U(s,\sigma)$, $N(s,\sigma)=W(s,\sigma)$, $P(s,\sigma)=0$, $a_r(s)=0)$, on a

$$\lim_{r\to 0}\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L q_r(s)\frac{h_r(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}ds=\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L p[z(s)]\frac{U(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}ds,\qquad k=0,1,\ldots,m, \tag{76}$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$.

Il résulte immédiatement des relations (74), (76) et (75) que

$$\lim_{r\to 0}\omega_{rk}[z(\sigma)]=\omega_{0k}[z(\sigma)]$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$.

Cette dernière relation prouve, vu la définition (69) des fonctions $\omega_{rk}(\zeta)$, que lorsque $\zeta \in \Sigma$ les relations (68) sont vérifiées dans un voisinage du point $\zeta_0 = z(L/2)$.

Le lemme 9 se trouve ainsi démontré.

THÉORÈME 4. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2} et $p(z)$ une fonction vérifiant la condition $K^m(\Sigma)$. On a*

$$(77)\quad \lim_{\varrho\to 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma_{\pm\varrho}} p(z_{\pm\varrho}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z_{\pm\varrho}-\zeta|\,ds_{\pm\varrho} = \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z-\zeta|\,ds_z \mp \pi \frac{\partial^k p(\zeta)}{\partial s_\zeta^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

uniformément par rapport à $\zeta \in \Sigma$.

Le Théorème 4 est une conséquence immédiate du Théorème 2 et du lemme 9.

Remarque 3. Le Théorème 4 dans le cas particulier où $m = 0$ est intimement lié avec un résultat établi par G. Fichera dans l'article [4] (théorème V, formule (4.1)). Il en est de même avec le Théorème 2 et un autre résultat du type intégral mentionné dans [4] (p. 9).

LEMME 10. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+2}. Supposons que $F \in D_m^*(\Sigma)$ et que*

$$(78)\quad F\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] = 0 \quad \textit{lorsque} \quad z \notin \bar{\Omega}.$$

Il existe alors une constante c telle que $F[f] = c\int_\Sigma f(z)\,ds$ pour chaque fonction $f(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$.

Démonstration. En vertu du lemme 7 et de l'hypothèse (78), on a

$$F\left[\int_{\Sigma_{-\varrho}} p(z_{-\varrho}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_{-\varrho}-\zeta|\,ds_{-\varrho}\right] = 0$$

pour chaque fonction $p(z)$ de classe $C^0(\Sigma_{-\varrho})$, d'où, en tenant compte du Théorème 4 et de la Remarque 2, on obtient

$$(79)\quad F\left[\int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,ds_z + \pi p(\zeta)\right] = 0$$

pour chaque fonction $p(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$.

Soit $f(\zeta)$ une fonction arbitraire de classe $C^m(\Sigma)$. On constate facilement que la fonction

$$(80)\quad g(\zeta) = f(\zeta) - \frac{1}{L}\int_\Sigma f(z)\,ds$$

est une fonction de classe $C^m(\Sigma)$ vérifiant la condition

$$\int_\Sigma g(\zeta)\,ds = 0.$$

En vertu du lemme 6 il existe donc une fonction $p(z)$ de classe $C^m(\Sigma)$ telle que

$$(81)\quad g(\zeta) = \pi p(\zeta) + \int_\Sigma p(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,ds_z.$$

Les relations (79) et (81) entraînent

$$F[g(\zeta)] = 0$$

d'où, en tenant compte de (80) et de la linéarité de la fonctionnelle F, on obtient

$$F[f(\zeta)] = \frac{F[1]}{L}\int_\Sigma f(z)\,ds.$$

Soit

$$c = F[1]/L.$$

Le choix de la fonction $f(\zeta)$ étant arbitraire, on conclut que

$$F[f(\zeta)] = c\int_\Sigma f(z)\,ds$$

pour chaque fonction $f(\zeta)$ de classe $C^m(\Sigma)$.

Le lemme 10 se trouve ainsi démontré.

Le Théorème 3 résulte immédiatement des lemmes 1 et 10.

§ 4. Étude du cas $m = 0$ dans des hypothèses moins restrictives (9).

LEMME 11. *Soit Σ une courbe simple fermée de classe C_1^1. Choisissons arbitrairement une représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ de la courbe Σ et soit $\zeta = z(\sigma)$, $z_r = z_r(s)$, (cf. (2), § 1).*

Il existe alors des constantes $c > 0$, $C > 0$ et des fonctions $R(s,\sigma)$, $X(s,\sigma)$, $Y(s,\sigma)$, $Z(s,\sigma)$ continues dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ et telles que

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta| = \frac{(s-\sigma)X(s,\sigma)+r}{g_r(s,\sigma)},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta| + \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta| = \frac{(s-\sigma)Y(s,\sigma)+rZ(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)},$$

où

$$g_r(s,\sigma) = R(s,\sigma)(s-\sigma)^2 + 2r(s-\sigma)X(s,\sigma) + r^2$$

(9) Je dois à Z. Opial une remarque qui m'a permis de simplifier les démonstrations.

et

(82) $\qquad R(s,\sigma) \geqslant c \quad$ *lorsque* $\quad 0 \leqslant s \leqslant L, \quad L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5,$

(83) $\quad |X(s,\sigma)| \leqslant C|s-\sigma|, \quad |Y(s,\sigma)| \leqslant C|s-\sigma|, \quad |Z(s,\sigma)| \leqslant C|s-\sigma|.$

Démonstration. Il résulte des relations (13*) et (70) que

(84)
$$\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z_r-\zeta| + \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r-\zeta|$$
$$= \frac{[x(s)-x(\sigma)][y'(\sigma)-y'(s)]+[y(s)-y(\sigma)][x'(s)-x'(\sigma)]+rZ(s,\sigma)}{B(s,\sigma)+2A(s,\sigma)r+r^2}.$$

Remarquons ensuite que l'hypothèse concernant la courbe Σ entraîne l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que

(85) $\qquad |x'(s)-x'(\sigma)| \leqslant C_1|s-\sigma|, \qquad |y'(s)-y'(\sigma)| \leqslant C_1|s-\sigma|.$

Le lemme 11 résulte immédiatement des relations (13*), (84) et (71) en vertu de la relation (85).

Remarque 4. L'hypothèse admise dans les Théorèmes 1-4 de cette note relativement à la courbe Σ dans le cas $m = 0$ peut être remplacée par une hypothèse plus générale: il suffit d'admettre que Σ est une courbe simple fermée de classe C_1^1.

Il est évident que l'assertion de la Remarque 3 relative aux Théorèmes 2 et 4 entraîne celle relative aux Théorèmes 1 et 3. Nous nous bornerons donc à démontrer les relations (50) et (77) dans le cas $m = 0$, en supposant que Σ est une courbe simple fermée de classe C_1^1 et que $p(z)$ est une fonction de classe $K^0(\Sigma)$. Les intégrales dans le premier membre des relations (50) et (77) seront maintenant considérées comme des intégrales de Stieltjes.

Soient $w_{r0}(\zeta)$ et $\omega_{r0}(\zeta)$ des fonctions définies par les relations (52) et (69) respectivement.

Soit ζ_0 un point arbitrairement choisi sur la courbe Σ et $z = z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, la représentation paramétrique normale de cette courbe telle que $\zeta_0 = z(L/2)$. En vertu du lemme 11 on a

$$w_{r0}[z(\sigma)] = \int_0^L [a_r(s)-a_r(\sigma)]\,\frac{(s-\sigma)X(s,\sigma)+r}{g_r(s,\sigma)}\,q_r(s)\,ds,$$

$$\omega_{r0}[z(\sigma)] = \int_0^L a_r(s)\,q_r(s)\,\frac{(s-\sigma)\,Y(s,\sigma)+rZ(s,\sigma)}{g_r(s,\sigma)}\,ds,$$

où les fonctions $a_r(s) = p[z_r(s)]$, $q_r(s) = ds_r/ds$ vérifient les relations

(86) $$\lim_{r\to 0} a_r(s) = a_0(s), \qquad \lim_{r\to 0} q_r(s) = 1,$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant L$.

Vu les inégalités (82) et (83), il existe des nombres $C_1 > 0$ et r^*, $0 < r^* \leqslant r_0$ tels que

(87) $$g_r(s,\sigma) \geqslant C_1[(s-\sigma)^2+r^2]$$

lorsque $|r| \leqslant r^*$, $0 \leqslant s \leqslant L$, $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$.

Compte tenu des relations (83), (86) et (87), on vérifie aisément, en s'appuyant sur le lemme 4, que

$$\lim_{r\to 0} w_{r0}[z(\sigma)] = w_{00}[z(\sigma)], \qquad \lim_{r\to 0} \omega_{r0}[z(\sigma)] = \omega_{00}[z(\sigma)],$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$. On en déduit les relations (51) et (68) avec $m = 0$ et celles-ci à leur tour, entraînent les relations (50) et (77) avec $m = 0$.

Travaux cités

[1] G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 27 (1948), p. 1-28.

[2] — *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, Istituto Matematico — Università, Trieste.

[3] — *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, Rendiconti di Matematica 17 (1958), p. 82-191.

[4] — *Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII, vol. 27, fasc. 6 (1959), p. 1-9.

[5] Z. Szmydt, On a certain boundary problem for Laplace equation, Annales Polonici Mathematici 11 (1961), p. 27-48.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 21. 11. 1960