Travaux cités

[1] R. Bellman, *On a generalization of a result of Wintner*, Quarterly of Applied Mathematics 16 (1959), p. 431-432.

[2] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag 1959.

[3] Z. Szmydt, *Sur les systèmes d'équations différentielles dont toutes les solutions sont bornées*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 234-236.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 1. 10. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

Sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle $x''+f(x,x')x'+g(x)=p(t)$

par Z. Opial (Kraków)

1. Le but de la présente note est de montrer comment les théorèmes sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre

$$x''+g(x)=p(t), \tag{1}$$

établis dans [1], s'étendent partiellement à l'équation différentielle plus générale

$$x''+f(x,x')x'+g(x)=p(t). \tag{2}$$

Supposons une fois pour toutes que les fonctions continues $f(x,y)$, $g(x)$ satisfassent aux conditions suivantes:

$$f(x,y)\geqslant 0, \quad \text{quels que soient } x \text{ et } y, \tag{3}$$

$$xg(x)>0, \quad \text{quel que soit } x\neq 0, \tag{4}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}|g(x)|=+\infty \tag{5}$$

et admettons que la fonction $p(t)$ soit continue et périodique de période $\omega>0$:

$$p(t+\omega)=p(t), \quad \text{quel que soit } t. \tag{6}$$

Posons de plus

$$G(x)=\int_0^x g(u)\,du \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

et, pour tout $x\neq 0$, introduisons la fonction

$$T(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\int_0^x\frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}}\right|.$$

En vertu de (4), pour tout voisinage fermé V_x d'un point $x\neq 0$ qui ne contient pas l'origine, la fonction $g(u)$ est en valeur absolue supérieure à une constante, soit $m(V_x)$. On a donc

$$|G(x)-G(u)|\geqslant m(V_x)|x-u| \qquad u\in V_x,$$

ce qui assure l'existence de l'intégrale figurant dans la définition de la fonction $T(x)$.

Notons (voir [1] ou [2]) que la fonction $2T(x)$ représente les „demi-périodes" des solutions de l'équation différentielle $x''+g(x)=0$.

Dans [1] nous avons démontré que si les fonctions $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions (4), (5), (6) et si l'on a $\liminf_{|x|\to\infty} T(x) > \omega/4$, l'équation (1) admet au moins une solution périodique de période ω. Nous allons montrer que pour l'équation (2) on peut établir des résultats analogues, mais, à cet effet, il nous faudra imposer d'autres conditions portant soit sur la grandeur de la période ω (théorème 1), soit sur l'allure asymptotique, pour $|x|$ tendant vers l'infini, de la fonction $|g(x)|$ (théorèmes 2 et 3), soit enfin sur une certaine symétrie de la fonction $G(x)$ (théorèmes 4 et 5). La méthode de démonstration de tous ces théorèmes ressemble à celle utilisée dans [1]. L'application immédiate de cette méthode n'est possible que dans l'hypothèse de l'unicité des solutions de l'équation (2); c'est pourquoi dans les considérations préliminaires du n° 3 nous supposerons que l'équation envisagée possède cette propriété, mais nous montrerons au n° 4 que cette hypothèse n'est nullement essentielle.

2. En vertu de la condition (6) il existe une constante positive p telle que

$$|p(t)| \leqslant p, \quad \text{quel que soit } t. \tag{7}$$

L'équation (2) est, de façon évidente, équivalente au système d'équations différentielles

$$x' = y, \quad y' = -f(x,y)y - g(x) + p(t). \tag{8}$$

Posons $H(x,y) = y^2/2 + G(x)$. Pour toute solution $\big(x(t), y(t)\big)$ du système (8) on a

$$\frac{d}{dt} H\big(x(t), y(t)\big) = -f\big(x(t), y(t)\big) y^2(t) + p(t) y(t),$$

d'où, en vertu de (3) et (7)

$$\frac{d}{dt} H\big(x(t), y(t)\big) \leqslant |p(t)|\,|y(t)| \leqslant p\,|y(t)| \leqslant \frac{1}{2}\big(p^2 + y^2(t)\big)$$

et, par conséquent, en raison de l'inégalité évidente $G(x) \geqslant 0$,

$$\frac{d}{dt} H\big(x(t), y(t)\big) \leqslant p^2 + H\big(x(t), y(t)\big). \tag{9}$$

3. Soit L_c la courbe fermée d'équation $H(x,y) = c$ $(c > 0)$ et introduisons le champ vectoriel continu C_0 qui s'obtient en faisant correspondre à chaque point (ξ, η) du plan (x,y) le vecteur $v_0(\xi,\eta) = \big(\eta, -f(\xi,\eta)\eta - g(\xi) + p(0)\big)$. Ce champ s'obtient donc du champ de vecteurs tangents aux courbes L_c $(0 < c < +\infty)$ par une modification qui affecte seulement la seconde composante, d'où, en raison de l'hypothèse (5), il résulte que pour un c suffisamment grand, l'indice du champ C_0 par rapport à la courbe L_c est égal à $+1$.

Désignons par $\big(x(t;\xi,\eta), y(t;\xi,\eta)\big)$ la solution du système (8) qui, pour $t=0$, passe par le point (ξ,η), et, pour tout $t>0$, considérons le champ vectoriel continu C_t que l'on obtient en faisant correspondre à chaque point (ξ,η) le vecteur

$$v_t(\xi,\eta) = \left(\frac{x(t;\xi,\eta)-\xi}{t}, \frac{y(t;\xi,\eta)-\eta}{t}\right).$$

On voit aussitôt que $\lim_{t\to 0+} v_t(\xi,\eta) = v_0(\xi,\eta)$, quels que soient ξ et η.

Pour démontrer que l'équation (2) ou, ce qui revient au même, le système (8) admet au moins une solution périodique de période ω, il suffit évidemment de prouver que le champ vectoriel C_ω admet au moins un point singulier ce qui a lieu, par exemple, lorsque son indice par rapport à une courbe L_c est différent de zéro. Or, pour prouver cette dernière propriété du champ C_ω, il suffit de démontrer que, pour un c suffisamment grand, l'indice de ce champ par rapport à L_c est égal à celui du champ C_0, c'est-à-dire à $+1$.

Les champs vectoriels C_t $(0<t<\omega)$ nous permettent d'effectuer un passage continu de C_0 à C_ω, donc, pour que l'indice de C_ω par rapport à L_c soit égal à l'indice de C_0, il suffit que, pour tout $t \in \langle 0, \omega\rangle$, le champ C_t soit sans singularités sur L_c ou, autrement dit, il suffit que l'on ait $v_t(\xi,\eta) \neq 0$, quels que soient le point $(\xi,\eta) \in L_c$ et $t \in \langle 0,\omega\rangle$. Tout se ramène donc à étudier les points singuliers des champs C_t.

Soient t_0 un nombre positif fixe et (ξ_0, η_0) un point singulier du champ C_{t_0}. Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que l'on a $v_t(\xi_0,\eta_0) \neq 0$, quel que soit $0 \leqslant t < t_0$. On a évidemment

$$x(t_0;\xi_0,\eta_0) = \xi_0 \quad \text{et} \quad y(t_0;\xi_0,\eta_0) = \eta_0 \tag{10}$$

ce qui signifie que la courbe intégrale du système (8), soit L, déterminée par les équations paramétriques

$$x = x(t;\xi_0,\eta_0), \quad y = y(t;\xi_0,\eta_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0)$$

est fermée. Pour abréger les notations, posons $H(t) = H\big(x(t;\xi_0,\eta_0), y(t;\xi_0,\eta_0)\big)$. On a donc, en particulier, $H(t_0) = H(0) = \frac{1}{2}\eta_0^2 + G(\xi_0)$. Soit $H(\tau)$ la valeur minima de la fonction $H(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, t_0\rangle$. En vertu de l'inégalité (9) on a

$$\frac{d}{dt}\big(H(t)+p^2\big) \leqslant H(t) + p^2$$

c'est-à-dire $\frac{d}{dt}\ln\big(H(t)+p^2\big) \leqslant 1$, et, par conséquent,

$$H(t) \geqslant H(\tau) \geqslant -p^2+e^{-t_0}(\eta_0^2/2+G(\xi_0)+p^2)$$

dans tout l'intervalle $\langle 0, t_0\rangle$. Cela signifie que, si seulement le point (ξ_0, η_0) est suffisamment éloigné de l'origine des coordonnées, la courbe L, elle aussi, ne peut pas trop s'approcher de l'origine. De manière plus précise, à tout $A>0$ on peut faire correspondre un $B>0$ tel que de l'inégalité $\xi_0^2+\eta_0^2 \geqslant B$ il résulte que la courbe L est située en dehors du cercle $x^2+y^2=A$.

De la forme du système (8) il s'ensuit que la courbe L contourne au moins une fois l'origine des coordonnées, mais il peut arriver qu'elle le fasse même plusieurs fois. Quoiqu'il en soit, il est facile de voir qu'on peut toujours trouver un sous-arc fermé L' de L qui contourne l'origine une fois et une seule. Donc, sans restriction de généralité, nous pouvons admettre que c'est la courbe L elle-même qui jouit de cette propriété. Cela étant, L se compose de deux arcs L_1 et L_2, situés respectivement dans les demi-plans $y \geqslant 0, y \leqslant 0$ et dont chacun peut être considéré comme courbe représentative d'une fonction continue:

$$L_1:\quad y=y_1(x)\geqslant 0 \quad \text{et} \quad L_2:\quad y=y_2(x)\leqslant 0 \qquad (x_1\leqslant x\leqslant x_2)$$

où x_1 et x_2 désignent les abscisses des points d'intersection de la courbe L avec l'axe des x. D'après ce que nous avons dit plus haut, et en vertu de l'hypothèse (5), il est évident que pour $\xi_0^2+\eta_0^2$ suffisamment grand, les nombres $|x_1|$ et x_2 sont aussi grands que l'on veut.

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont de classe C^1 dans tout l'intervalle (x_1, x_2), sauf au point ξ_0 où l'une d'elles peut admettre des dérivées unilatères distinctes. En plus, ces fonctions satisfont respectivement aux équations différentielles

$$(11)\quad y\frac{dy}{dx}=-f(x,y)y-g(x)+p_1(x)\,,\qquad y\frac{dy}{dx}=-f(x,y)y-g(x)+p_2(x)$$

qui s'obtiennent du système (8) en divisant la seconde équation par la première et en remplaçant la variable t par les fonctions inverses de la fonction $x=x(t;\xi_0,\eta_0)$. Les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont donc continues dans tout l'intervalle $\langle x_1, x_2\rangle$ à l'exception, peut-être, du point ξ_0 où l'une d'elles peut avoir une discontinuité de première espèce. On a en plus, en vertu de l'inégalité (7):

$$(12)\qquad |p_1(x)|\leqslant p\,,\quad |p_2(x)|\leqslant p \qquad (x_1\leqslant x\leqslant x_2)\,.$$

Des équations $dx/dt=y_1(x)$ et $dx/dt=y_2(x)$ il résulte que l'on a la formule

$$(13)\qquad t_0=\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{y_1(x)}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{|y_2(x)|}$$

qui nous servira de base pour les démonstrations de nos théorèmes.

4. THÉORÈME 1. *Si les fonctions continues $f(x,y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6) *et si l'on a*

$$(14)\qquad \liminf_{|x|\to\infty} T(x)>\omega/2\,,$$

l'équation (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

Démonstration. Admettons d'abord l'unicité des solutions du système (8). Cela étant, d'après ce que nous avons dit au n° précédent, il suffit de démontrer que, pour les points (ξ,η) suffisamment éloignés de l'origine des coordonnées, la relation $v_{t_0}(\xi_0,\eta)=0$ entraîne forcément l'inégalité $t_0>\omega$. Or, en vertu de la première des équations (11), on a

$$(15)\qquad y_1(x)y_1'(x)=-f\big(x,y_1(x)\big)y_1(x)-g(x)+p_1(x) \qquad (x_1\leqslant x\leqslant x_2)$$

et, comme $y_1(x_1)=0$,

$$\tfrac12 y_1^2(x)=G(x_1)-G(x)+\int_{x_1}^{x}p_1(u)\,du-\int_{x_1}^{x}f\big(u,y_1(u)\big)\,y_1(u)\,du \qquad (x_1\leqslant x\leqslant x_2)\,.$$

Mais $y_1(x)\geqslant 0$ et $f\big(x,y_1(x)\big)\geqslant 0$, de la première des inégalités (12) on obtient donc l'inégalité

$$\tfrac12 y_1^2(x)\leqslant G(x_1)-G(x)+p(x-x_1) \qquad (x_1\leqslant x\leqslant x_2)$$

et, par conséquent,

$$(16)\qquad \int_{x_1}^{0}\frac{dx}{y_1(x)}\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\int_{x_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{G(x_1)-G(x)+p(x-x_1)}}\,.$$

De façon analogue on démontre l'inégalité

$$(17)\qquad \int_{0}^{x_2}\frac{dx}{|y_2(x)|}\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\int_{0}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)+p(x_2-x)}}\,.$$

Nous avons déjà vu que les nombres $|x_1|$ et x_2 tendent vers l'infini lorsque $\xi_0^2+\eta_0^2$ augmente indéfiniment. D'autre part, il est facile de vérifier qu'en vertu de l'hypothèse (5) les limites inférieures, lorsque $|x_1|$ et x_2 tendent vers l'infini, des seconds membres des inégalités (16) et (17) sont supérieures ou égales à la limite inférieure de la fonction $T(x)$. De là et de l'hypothèse (14) il résulte que pour $\xi_0^2+\eta_0^2$ suffisamment grand, la relation $v_{t_0}(\xi_0, \eta_0) = 0$ a pour conséquence l'inégalité $t_0 > \omega$. Dans l'hypothèse de l'unicité des solutions de l'équation (2), le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Dans la démonstration que nous venons d'exposer l'hypothèse de l'unicité était essentielle puisque, sans elle, il serait impossible de définir de façon univoque le champ vectoriel C_t.

Pour démontrer le théorème dans le cas général, construisons deux suites de fonctions de classe C^1, $\{f_n(x, y)\}$, $\{g_n(x)\}$, uniformément convergentes vers $f(x, y)$, $g(x)$, satisfaisant aux conditions (3), (4), (5) et vérifiant les inégalités $|g_n(x)| \leqslant |g(x)|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Cette dernière condition assure, pour tout entier n, les inégalités $T_n(x) \geqslant T(x)$. Cela étant, pour chacune des équations

$$x''+f_n(x, x')x'+g_n(x) = p(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

on a l'unicité des solutions, l'hypothèse (14) se trouve vérifiée et, par conséquent, chacune de ces équations admet au moins une solution $x_n(t)$ périodique de période ω. De ce que nous avons déjà démontré il résulte que les suites $\{|x_n(t)|\}$ et $\{|x_n'(t)|\}$ sont bornées par une constante convenablement choisie. En raison des inégalités

$$|x_n''(t)| \leqslant \big|f_n\big(x_n(t), x_n'(t)\big)\big|\,|x_n'(t)| + \big|g_n\big(x_n(t)\big)\big| + p \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

il en est de même de la suite $\{|x_n''(t)|\}$. Par conséquent, dans l'intervalle $\langle 0, \omega\rangle$ les fonctions $x_n(t), x_n'(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont équicontinues; il existe donc une suite partielle $\{x_k(t)\}$ extraite de la suite $\{x_n(t)\}$ qui converge, uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega\rangle$, vers une solution $x(t)$ de l'équation (2). La fonction $x(t)$ est évidemment périodique de période ω et le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Dans le cas où $T(x)$ tend vers l'infini lorsque $|x|$ augmente indéfiniment, la condition (14) est évidemment satisfaite, quel que soit ω. Du théorème 1 on déduit donc immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6) *et si* $\lim\limits_{|x|\to\infty} T(x)+\infty$, *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période* ω.

5. Théorème 2. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), *si l'on a*

$$\liminf_{|x|\to\infty} T(x) > \omega/3 \tag{18}$$

et si, en plus,

$$\lim_{|x|\to\infty} |g(x)|/\sqrt{|x|} = +\infty\,, \tag{19}$$

l'équation (2) *admet au moins une solution périodique de période* ω.

Démonstration. Il suffit de démontrer ce théorème dans l'hypothèse de l'unicité des solutions de l'équation (2), puisque le passage au cas général peut s'effectuer de la même façon que dans la démonstration du théorème précédent. Cela étant, de même que plus haut on obtient d'abord les inégalités (16) et (17). Puis, des équations (11) et des relations $y_i(x_j) = 0$ $(i, j = 1, 2)$ on déduit les égalités

$$-\int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y_i(x)\big)y_i(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} p_i(x)\,dx = G(x_2)-G(x_1) \qquad (i = 1, 2) \tag{20}$$

et, par conséquent,

$$0 \leqslant \int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y_1(x)\big)y_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y_2(x)\big)\,|y_2(x)|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \big(p_1(x)-p_2(x)\big)\,dx \leqslant 2p\,(|x_1|+x_2)\,.$$

Il en résulte, en particulier, que pour tout $x \in \langle 0, x_2\rangle$ on a

$$\int_{x}^{x_2} f\big(u, y_1(u)\big)y_1(u)\,du \leqslant 2p\,(|x_1|+x_2) \tag{21}$$

et de même

$$\int_{x_1}^{x} f\big(u, y_2(u)\big)\,|y_2(u)|\,du \leqslant 2p\,(|x_1|+x_2)\,, \tag{22}$$

quel que soit $x \in \langle x_1, 0\rangle$.

De la relation (15) et de $y_1(x_2) = 0$ on obtient

$$\tfrac{1}{2}y_1^2(x) = G(x_2)-G(x)+\int_{x}^{x_2} f\big(u, y_1(u)\big)y_1(u)\,du - \int_{x}^{x_2} p_1(u)\,du$$

et, tenant compte de (12) et (20),

$$\tfrac{1}{2}y_1^2(x) \leqslant G(x_2)-G(x)+p\,(x_2-x)+2p\,(|x_1|+x_2) \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_2)\,.$$

On a donc

$$\int_0^{x_2} \frac{dx}{y_1(x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)+p\,(x_2-x)+2p\,(|x_1|+x_2)}}\,. \tag{23}$$

De même, de l'inégalité (22) on tire

$$\int_{x_1}^{0} \frac{dx}{|y_2(x)|} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{G(x_1)-G(x)+p(x-x_1)+2p(|x_1|+x_2)}}. \tag{24}$$

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait $x_2 \geqslant |x_1|$ ce qui nous permet de remplacer (23) par l'inégalité

$$\int_{0}^{x_2} \frac{dx}{y_1(x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)+5px_2}}. \tag{25}$$

Soit x_3 un nombre positif choisi de telle sorte que l'on ait $G(x_3) = G(x_2) + 5px_2$. Par le théorème des accroissements finis, on a

$$x_3 = x_2\big(1+5p/g(\alpha)\big) \qquad (x_2 \leqslant \alpha < x_3).$$

D'autre part

$$\int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)+5px_2-G(x)}} = \int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_3)-G(x)}}$$
$$= \int_{0}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{G(x_3)-G(x)}} - \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{G(x_3)-G(x)}}$$

et, en désignant par m et M respectivement les valeurs minimale et maximale de la fonction $g(x)$ dans l'intervalle $\langle x_2, x_3 \rangle$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x_3-x}} \leqslant \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{G(x_3)-G(x)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x_3-x}}.$$

Par conséquent, pour un $\beta \in (x_2, x_3)$ on aura

$$\int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{G(x_3)-G(x)}} = \frac{1}{\sqrt{g(\beta)}} \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x_3-x}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x_3-x_2}}{\sqrt{g(\beta)}} = 2\sqrt{5p}\left(\frac{x_2}{g(\alpha)g(\beta)}\right)^{1/2} \leqslant 2\sqrt{5p}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{g(\alpha)} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{g(\beta)}\right)^{1/2}.$$

Il s'ensuit, en vertu de l'hypothèse (19), que l'intégrale envisagée tend vers zéro lorsque x_2 croît indéfiniment. Par conséquent, des inégalités (16), (17), (18) et (23) et de la relation (13) il résulte que, pour $|x_1|$ et x_2 suffisamment grands, on a $t_0 > \omega$.

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Il est facile de vérifier (voir [2]) que l'inégalité (18) est satisfaite dans le cas où la fonction $g(x)$ vérifie la condition

$$\limsup_{|x|\to\infty} g(x)/x < 9\pi^2/4\omega^2. \tag{26}$$

Du théorème 2 on déduit donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. *Si les fonctions continues $f(x,y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (19) *et* (26), *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

6. C'est l'évaluation de l'intégrale figurant au second membre de l'inégalité (25) qui constitue la partie essentielle de la démonstration du théorème précédent. Cette évaluation peut encore être effectuée d'une autre manière. En posant $u = \sqrt{G(x)}/\sqrt{G(x_2)}$ on obtient la formule

$$\int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)}} = 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{G(x)}}{g(x)} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{27}$$

où $x = G_1^{-1}\big(u^2 G(x_2)\big)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, $G_1^{-1}(y)$ étant la fonction inverse de la restriction de la fonction $y = G(x)$ à l'intervalle $(0, +\infty)$. On a de même

$$\int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)+5px_2}} = 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{G(x)}}{g(x)} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2+\delta(x_2)}}, \tag{28}$$

où $\delta(x_2) = 5px_2/G(x_2)$. De l'hypothèse (5) il résulte que $\delta(x_2)$ tend vers zéro lorsque x_2 augmente indéfiniment. Supposons maintenant que l'on ait l'inégalité

$$\sqrt{G(x)}/|g(x)| \leqslant L \qquad (x \neq 0), \tag{29}$$

L étant une constante finie. On a alors, en raison des formules (27) et (28)

$$\int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)}} - \int_{0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)+5px_2}} \leqslant 2L\left\{\frac{\pi}{2} - \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2+\delta(x_2)}}\right\}$$
$$= L\left(\pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\delta(x_2)}}\right),$$

ce qui signifie que la différence de ces intégrales tend vers zéro lorsque x_2 augmente indéfiniment.

Nous avons donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Si les fonctions continues $f(x,y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (18) *et* (29), *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

7. Soient $G_1^{-1}(y)$ et $G_2^{-1}(y)$ les fonctions inverses des restrictions de la fonction $y = G(x)$ respectivement aux intervalles $(0, +\infty)$ et $(-\infty, 0)$. De même que (27), on démontre la formule générale

$$T(x) = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{G(z)}}{|g(z)|}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (x \neq 0),$$

où $z = G_1^{-1}(u^2G(x))$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ si $x > 0$ et $z = G_2^{-1}(u^2G(x))$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ si $x < 0$. Donc, si pour tout $x \neq 0$ on a l'inégalité

$$\sqrt{G(x)}/|g(x)| \geqslant \frac{\omega\sqrt{2}}{3\pi} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0), \tag{30}$$

alors $T(x) \geqslant \omega/3 + \varepsilon\pi/\sqrt{2}$ et, par conséquent, du théorème 3 on obtient immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (29) *et* (30), *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

Enfin, de même que le corollaire 2, on obtient le suivant.

COROLLAIRE 4. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (26) *et* (30), *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

8. Revenons encore une fois à la démonstration du théorème 2. Des relations (20) et de l'inégalité (21) on obtient les inégalités

$$-3p(|x_1|+x_2) \leqslant G(x_2) - G(x_1) \leqslant 3p(|x_1|+x_2).$$

Supposons que l'on ait, quel que soit x, $g(-x) = -g(x)$, c'est-à-dire $G(x) = G(-x)$. Des inégalités précédentes on obtient alors

$$\big|x_2 - |x_1|\big|/(|x_1|+x_2) \leqslant 3p/g(\gamma),$$

où γ est un nombre convenablement choisi dans l'intervalle $(|x_1|, x_2)$, de sorte que γ tend vers l'infini lorsque $|x_1|$ et x_2 augmentent indéfiniment. Par conséquent, $g(\gamma)$ tend également vers l'infini. Pour fixer les idées, soit $x_2 \geqslant |x_1|$. On a alors $|x_1| + x_2 \leqslant x_2$ et $x_2 - |x_1| \leqslant 6px_2/g(\gamma)$, c'est-à-dire $x_2(1-6p/g(\gamma)) \leqslant |x_1|$. Par suite, pour un nombre d suffisamment grand, on a les inégalités

$$|x_1| + x_2 \leqslant \frac{d-p}{2p}|x_1| \quad \text{et} \quad |x_1| + x_2 \leqslant \frac{d-p}{2p}x_2.$$

Par conséquent, des inégalités (23) et (24) on obtient les inégalités

$$\int_0^{x_2}\frac{dx}{y_1(x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{G(x_2)-G(x)+dx_2}},$$

$$\int_{x_1}^{0}\frac{dx}{|y_2(x)|} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{|x_1|}\frac{dx}{\sqrt{G(|x_1|)-G(x)+d|x_1|}}.$$

Cela étant, il suffit de répéter le raisonnement de la fin de la démonstration du théorème 2 pour démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (19) *et si l'on a*

$$g(-x) = -g(x), \quad \textit{quel que soit } x \tag{31}$$

et

$$\liminf_{|x|\to\infty} T(x) > \omega/4, \tag{32}$$

l'équation (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

On a de même un théorème analogue au théorème 3.

THÉORÈME 5. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (29), (31) *et si l'on a l'inégalité* (32), *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

Des théorèmes 4 et 5 on déduit immédiatement les corollaires suivants.

COROLLAIRE 5. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (31) *et si l'on a*

$$\limsup_{|x|\to\infty} g(x)/x < 4\pi^2/\omega^2, \tag{33}$$

l'équation (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

COROLLAIRE 6. *Si les fonctions continues $f(x, y)$, $g(x)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3)-(6), (29), (31) *et* (33), *l'équation* (2) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

En particulier, du corollaire 5 on déduit immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 6. *Si les fonctions continues $f(x, y)$ et $p(t)$ satisfont aux conditions* (3), (6) *et si $\omega < 2\pi/h$ (h — constante positive), l'équation différentielle*

$$x'' + f(x, x')x' + h^2x = p(t)$$

admet au moins une solution périodique de période ω.

Travaux cités

[1] Z. Opial, *Sur les solutions périodiques de l'équation différentielle $x''+g(x) = p(t)$*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., 8 (1960), p. 151-156.

[2] — *Sur les périodes des solutions de l'équation différentielle $x''+g(x) = 0$*, Ann. Polon. Math. 10 (1961), p. 49-72.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1960