Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2.50 \$.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO W KRAKOWIE

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

Sur une propriété des distributions restreintes des points extrémaux

par B. Szafirski (Kraków)

Introduction. Considérons un espace métrique arbitraire R. Nous désignerons les points de cet espace par $p, q, x, y, \ldots$ Soit $\omega(x, y)$ une fonction continue du couple de points x, y telle que $\omega(x, y) = \omega(y, x)$, $\omega(x, y) \geqslant 0$. Désignons par E_1, E_2 deux ensembles compacts et disjoints de l'espace R. Soit $E = E_1 + E_2$. Considérons les systèmes de n points arbitraires de l'ensemble E

$$p^{(n)} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{a_n}, \ldots, p_n\} \tag{1}$$

et supposons que a_n de ces points, par exemple les points $p_1, \ldots, p_{a_n}$, appartiennent à E_1 et $p_{a_n+1}, \ldots, p_n$ appartiennent à E_2. On désigne ici par a_n un nombre entier de l'intervalle $\langle 1, n\rangle$. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} a_n/n = a\,.$$

Lorsque les points (1) varient dans E de manière que les points $p_1, \ldots, p_{a_n}$ appartiennent à E_1 et $p_{a_n+1}, \ldots, p_n$ appartiennent à E_2, l'expression

$$V(p^{(n)}) = \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n} \omega(p_i, p_k)$$

atteint sa valeur maximale pour un système de points

$$q^{(n)} = \{q_1, \ldots, q_n\}$$

($q_i \in E_1$, $i = 1, \ldots, a_n$; $q_i \in E_2$, $i = a_n+1, \ldots, n$). Nous appellerons le système $q^{(n)}$ $n^{\text{ème}}$ système extrémal restreint des points de l'ensemble E dans le rapport a relativement à la fonction $\omega(x, y)$.

On sait [1] que la moyenne géométrique

$$[V(q^{(n)})]^{1/\binom{n}{2}}$$

converge vers une limite non négative

$$\lim_{n\to\infty} [V(q^{(n)})]^{1/\binom{n}{2}} = v(E, a, \omega) = v(E)$$

dite écart restreint de l'ensemble E dans le rapport α et relativement à la fonction $\omega(x, y)$. Dans la suite nous omettrons souvent les mots „dans le rapport α et relativement à la fonction $\omega(x, y)$".

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$ ou bien $\alpha = 1$, cet écart se réduit à l'écart libre [4] de l'ensemble E_2 ou E_1 respectivement par rapport à la fonction $\omega(x, y)$.

Dans la suite nous nous bornerons à considérer les espaces euclidiens R_2 et R_3 à deux ou trois dimensions et quelques fonctions particulières $\omega(x, y)$.

Au § 1 nous considérons le cas où R est le plan R_2 et $\omega(x, y) = |x-y|$. L'écart restreint de l'ensemble E par rapport à cette fonction sera désigné par $d = d(E, \alpha)$. A la suite des systèmes extrémaux nous associerons une suite de fonctions. Sous la condition $d > 0$ la limite de cette suite est égale à une constante C_1 lorsque $x \in E_1$ et à une constante C_2 lorsque $x \in E_2$. Les nombres C_1 et C_2 sont en général différents. Nous allons voir comment ces constantes dépendent de E et de α. Nous indiquerons quelques applications des résultats obtenus à la théorie de la représentation conforme d'un domaine multiplement connexe.

Le § 2 est consacré aux problèmes analogues pour l'espace R_3 et la fonction $\omega_0(x, y) = \exp\{-1/|x-y|\}$.

§ 1. Soit $E = E_1 + E_2$ la frontière d'un domaine doublement connexe D contenant le point $x = \infty$. Nous supposons qu'aucun des continus E_i, $i = 1, 2$, n'est dégénéré. Désignons par

$$\eta^{(n)} = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \tag{2}$$

le $n^{\text{ème}}$ système restreint des points extrémaux de l'ensemble E par rapport à la fonction $\omega(x, y) = |x-y|$. Soit Δ un ensemble borelien quelconque et soit $\mu_n(\Delta) = \mu_n$ la distribution de la masse unité sur E, définie par les formules

$$\mu_n(\Delta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta \text{ ne contient aucun des points extrémaux (2),} \\ k/n, & \text{si } \Delta \text{ contient } k \text{ points extrémaux.} \end{cases}$$

On démontre [2] que la suite $\mu_n(\Delta)$ converge vers une limite $\mu(\Delta)$ dite distribution extrémale et restreinte (dans le rapport α) de la masse unité dans E. Elle satisfait aux conditions

$$\mu(E_1) = \alpha, \quad \mu(E_2) = 1-\alpha.$$

On peut démontrer [2] que

$$\log\frac{1}{d(E, \alpha)} = \int_E\int_E \log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,d\mu \leqslant \int_E\int_E \log\frac{1}{|x-y|}\,d\sigma\,d\sigma,$$

quelle que soit la répartition restreinte σ de la masse unité dans E.

Formons les moyennes

$$v_{1,a_n} = v_{1,a_n}(E; \eta_1, \ldots, \eta_{a_n}) = \Big[\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant a_n} |\eta_i - \eta_k|\Big]^{2/a_n(a_n-1)},$$

$$v_{2,a_n} = v_{2,a_n}(E; \eta_{a_n+1}, \ldots, \eta_n) = \Big[\prod_{a_n+1 \leqslant i < k \leqslant n} |\eta_i - \eta_k|\Big]^{2/(n-a_n)(n-a_n-1)},$$

$$v_{12,a_n} = v_{12,a_n}(E; \eta_1, \ldots, \eta_n) = \Big[\prod_{i=1}^{a_n}\prod_{k=a_n+1}^{n} |\eta_i - \eta_k|\Big]^{1/a_n(n-a_n)}.$$

LEMME. *Les suites* $\{v_{1,a_n}\}$, $\{v_{2,a_n}\}$, $\{v_{12,a_n}\}$ *convergent.*

Démonstration. Pour la première de ces moyennes on a

$$v_{1,a_n} = \Big[\prod_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{a_n} |\eta_i - \eta_k|\Big]^{1/a_n(a_n-1)}$$

et

$$\log\frac{1}{v_{1,a_n}} = \frac{1}{a_n(a_n-1)}\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{a_n} \log\frac{1}{|\eta_i - \eta_k|}.$$

Soit m un entier fixe, mais quelconque. Désignons par $[|x-y|]_m$ la fonction suivante:

$$[|x-y|]_m = \begin{cases} |x-y| & \text{lorsque } |x-y| > m, \\ m & \text{lorsque } |x-y| \leqslant m, \end{cases}$$

et par $[v_{1,a_n}]_m$ le produit

$$[v_{1,a_n}]_m = \Big[\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant a_n} [|\eta_i - \eta_k|]_m\Big]^{2/a_n(a_n-1)}.$$

On obtient alors

$$\log\frac{1}{[v_{1,a_n}]_m} = \frac{1}{a_n(a_n-1)}\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{a_n} \log\frac{1}{[|\eta_i - \eta_k|]_m}$$
$$= \frac{1}{a_n(a_n-1)}\sum_{i=1}^{a_n}\sum_{k=1}^{a_n} \log\frac{1}{[|\eta_i - \eta_k|]_m} - \frac{1}{a_n}\log\frac{1}{m}$$
$$= \frac{n^2}{a_n(a_n-1)}\int_{E_1}\int_{E_1} \log\frac{1}{[|x-y|]_m}\,d\mu_n\,d\mu_n - \frac{1}{a_n}\log\frac{1}{m}.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \log\frac{1}{[v_{1,a_n}]_m} = \frac{1}{\alpha^2}\int_{E_1}\int_{E_1} \log\frac{1}{[|x-y|]_m}\,d\mu\,d\mu,$$

icm©

et, lorsque $m\to 0$, on a

$$\log\frac{1}{v_1}=\frac{1}{\alpha^2}\int\limits_{E_1}\int\limits_{E_1}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,d\mu\,, \tag{3}$$

où $v_1=\lim\limits_{n\to\infty}v_{1,\alpha_n}$.

On peut démontrer de la même façon que les limites des suites $\{v_{2,\alpha_n}\}$, $\{v_{12,\alpha_n}\}$ existent et que

$$\log\frac{1}{v_2}=\frac{1}{\beta^2}\int\limits_{E_2}\int\limits_{E_2}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,d\mu$$

et

$$\log\frac{1}{v_{12}}=\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{E_1}\int\limits_{E_2}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,d\mu\,, \tag{4}$$

où v_2 et v_{12} désignent respectivement les limites des suites $\{v_{2,\alpha_n}\}$ et $\{v_{12,\alpha_n}\}$ et $\beta=1-\alpha$.

Formons la suite de fonctions

$$\Phi_n(x)=\Big[\prod_{i=1}^{n}|x-\eta_i|\Big]^{1/n},$$

où x désigne un point quelconque de l'ensemble R_2-E. On a alors

$$\log\Phi_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log|x-\eta_i|=\int\limits_{E}\log|x-y|\,d\mu_n\,.$$

La suite $\{\mu_n\}$ étant convergente, la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ existe; posons

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=\Phi(x)=\exp\Big\{\int\limits_{E}\log|x-y|\,d\mu\Big\}\,. \tag{5}$$

M. J. Górski a démontré [2] que

$$\Phi(x)=\begin{cases}C_1 & \text{lorsque}\quad x\in E_1E_\mu\,,\\ C_2 & \text{lorsque}\quad x\in E_2E_\mu\,,\end{cases} \tag{6}$$

où C_1, C_2 sont des constantes et E_μ est le noyau de la masse dans la distribution μ.

Dans la suite nous étudierons la dépendance entre ces constantes, les ensembles E_1, E_2 et le nombre α. D'après (5) on a

$$-\log\Phi(x)=\int\limits_{E}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu=\int\limits_{E_1}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu+\int\limits_{E_2}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,,$$

d'où, d'après (3), (4), résulte l'égalité

$$-\int\limits_{E_1}\log\Phi(x)\,d\mu=\int\limits_{E_1}\int\limits_{E_1}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,d\mu+\int\limits_{E_1}\int\limits_{E_2}\log\frac{1}{|x-y|}\,d\mu\,d\mu$$
$$=\alpha^2\log\frac{1}{v_1}+\alpha\beta\log\frac{1}{v_{12}}\,.$$

D'après (6) on a

$$\alpha\log\frac{1}{C_1}=\alpha^2\log\frac{1}{v_1}+\alpha\beta\log\frac{1}{v_{12}}\,,$$

d'où il résulte que

$$C_1=v_1^{\alpha}\cdot v_{12}^{\beta}\,.$$

On obtient de même l'égalité

$$C_2=v_2^{\beta}\cdot v_{12}^{\alpha}\,.$$

Considérons la suite de fonctions

$$\varphi_n(x)=e^{i\theta_n}\Big[\prod_{j=1}^{n}(x-\eta_j)\Big]^{1/n},\qquad n=1,2,\dots$$

où θ_n sont des nombres réels choisis de manière qu'on ait, en un point x_0 arbitrairement choisi en dehors de E

$$\varphi_n(x_0)>0\,.$$

Dans le cas $\alpha=\frac{1}{2}$, on démontre [2]: 1° que la suite $\varphi_n(x)$ est uniformément convergente dans chaque ensemble fermé contenu dans D. Désignons la fonction limite par $\varphi(x)$; 2° que la fonction $[\varphi(x)]^2$ effectue la représentation conforme du domaine D_μ, dont la frontière est égale au noyau de la masse unité dans la distribution μ, sur une surface riemannienne composée à l'extérieur de deux cercles concentriques.

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de compléter 1° et 2° par le proposition suivante:

Les rayons des deux cercles dont il est question sous 2°, *sont:* $r_1=\exp\{-2v_1^{1/2}v_{12}^{1/2}\}$, $r_2=\exp\{-2v_2^{1/2}\cdot v_{12}^{1/2}\}$.

Dans le cas où $r_1=r_2$, cette fonction donne la représentation conforme du domaine D sur l'extérieur du cercle $|w|=r_1$ doublement couvert.

Il est à remarquer que des modifications faciles des raisonnements précédents permettent d'étendre tous ces résultats au cas plus général où E est la some de $m>2$ continus.

§ 2. Soit $E=E_1+E_2$ la frontière d'un domaine $D_\infty(E)$ de l'espace à 3 dimensions, non borné et contenant le point à l'infini. Supposons que la capacité $d(E_j)$ de chaque ensemble E_j, $j=1,2$, soit positive.

icm©

Désignons par

$$q^{(n)} = \{q_1, \ldots, q_n\} \tag{7}$$

le $n^{\text{ème}}$ système restreint des points extrémaux de l'ensemble E par rapport à la fonction

$$\omega_0(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{|x-y|}\right\}. \tag{8}$$

L'écart restreint de l'ensemble E par rapport à la fonction (8) sera désigné par $D(E, \alpha)$. Au $n^{\text{ème}}$ système extrémal on peut associer (cf. § 1) une certaine distribution μ_n de la masse unité sur l'ensemble E. De la même façon qu'au § 1 on obtient, pour la distribution limite μ et pour une distribution arbitraire σ, les inégalités

$$\log\frac{1}{D(E, \alpha)} = \int_E\int_E \frac{1}{|x-y|}\, d\mu\, d\mu \leqslant \int_E\int_E \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma\, d\sigma .$$

De plus, on peut démontrer l'existence des limites des suites

$$D_{1,\alpha_n} = \Big[\prod_{1\leqslant i<k\leqslant \alpha_n} \omega_0(q_i, q_k)\Big]^{1/\binom{\alpha_n}{2}}, \qquad D_{2,\alpha_n} = \Big[\prod_{\alpha_n+1\leqslant i<k\leqslant n} \omega_0(q_i, q_k)\Big]^{1/\binom{n-\alpha_n}{2}},$$

$$D_{12,\alpha_n} = \Big[\prod_{i=1}^{\alpha_n}\prod_{k=\alpha_n+1}^{n} \omega_0(q_i, q_k)\Big]^{1/\alpha_n(n-\alpha_n)}.$$

Posons

$$\lim_{n\to\infty} D_{1,\alpha_n} = D_1 , \qquad \lim_{n\to\infty} D_{2,\alpha_n} = D_2 , \qquad \lim_{n\to\infty} D_{12,\alpha_n} = D_{12} .$$

Considérons encore la suite de fonctions

$$\Phi_n(x) = \Big[\prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\frac{1}{|x-q_i|}\right\}\Big]^{1/n},$$

d'où il suit, comme dans le § 1, que

$$\log\frac{1}{\Phi_n(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x-q_i|} = \int_E \frac{1}{|x-y|}\, d\mu_n .$$

On démontre [3] que la suite μ_n converge vers une limite μ. Désignons par E_μ le noyau de la masse unité dans la distribution μ. M. J. Górski a démontré [3] que la suite $\Phi_n(x)$ converge vers une limite $\Phi(x)$, égale à une constante C_1 lorsque $x \epsilon E_1 E_\mu$ et à une constante C_2 lorsque $x \epsilon E_2 E_\mu$.

En appliquant la méthode du § 1 on obtient enfin les égalités:

$$C_1 = D_1^\alpha D_{12}^\beta , \qquad C_2 = D_2^\beta D_{12}^\alpha .$$

Travaux cités

[1] F. Bierski, *L'écart restreint des ensembles et son application*, Ann. Polon. Math. 9 (1960), p. 65-77.

[2] J. Górski, *Sur la représentation conforme d'un domaine multiplement connexe*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 218-224.

[3] — *Distributions restreintes des points extrémaux liés aux ensembles dans l'espace*, Ann. Polon. Math. 4 (1958), p. 325-339.

[4] F. Leja, *Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 147-156.

Reçu par la Rédaction le 23. 9. 1960