The author wishes to express his appreciation for this encouragment as well as for Professor Ważewski's interest and valuable criticism during the time the author was preparing his dissertation for the doctor degree as an aspirant to Professor Ważewski.

Profesor S. Łojasiewicz pointed out to the author the possibility of expressing the concepts of this paper in terms of the filter-theory.

At last the author wishes to thank Professors A. Bielecki, J. Szarski and A. Pliś, who had reviewed the author's thesis, and for their suggestions and remarks very helpful in the preparation of the present form of the paper.

References

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I and II, Paris 1951.

[2] D. M. Grobman, (Д. М. Гробман), *Характеристические показатели систем, близких к линейным*, Матем. сб. 30 (1952), p. 121-166.

[3] — *Системы дифференциальных уравнений, аналогичные линейным*, ДАН 86 (1952), p. 19-22.

[4] P. Hartman and A. Winter, *Asymptotic integrations of ordinary non-linear differential equations*, Amer. Journ. Math. 77 (1955), p. 692-724.

[5] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[6] S. Łojasiewicz, *Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage du point singulier*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 34-72.

[7] C. Olech, *On the asymptotic behaviour of the solutions of a system of ordinary non-linear differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Classe troisième 4 (1956), p. 555-561.

[8] Z. Opial, *Sur un théorème de A. Filippoff*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), p. 67-75.

[9] Z. Szmydt, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de certaines systèmes d'équations différentielles non linéaires*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 253-276.

[10] T. Ważewski, *Sur la coïncidence asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles*, Bull. Acad. Sci. et Lettr., Sér. A (1949), p. 147-150.

[11] — *Sur certaines condition de coïncidence asymptotique des deux systèmes d'équations différentielles*, Comptes-rendus des séances de la Classe III: Sci. math. et phys. de la Société de Sci. et Lettr. de Varsovie 42 (1949), p. 198-203.

[12] — *Sur les systèmes de deux équations différentielles linéaires dont les intégrales tendent asymptotiquement vers une ellipse*, Comptes-rendus des séances de la Classe III. Sci. math. et phys. de la Société de Sci. et Lettr. de Varsovie 41 (1948), p. 9-12.

[13] F. J. Wagner, *Notes on compactification I*, Indag. Math. 19 (1957), p. 171-176.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 23. 9. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

Sur l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles du type $u_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz})$

par M. Kwapisz, B. Palczewski et W. Pawelski (Gdańsk)

Introduction. Le but de ce mémoire est d'étudier certains cas du problème d'existence et d'unicité, dans le domaine V

$$V\{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\}$$

des solutions de l'équation

$$u_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}) \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$u(0, y, z) = \psi_1(y, z), \quad u(x, 0, z) = \psi_2(x, z), \quad u(x, y, 0) = \psi_3(x, y). \tag{2}$$

On supposera la fonction f assujettie à des conditions analogues à celles qui ont été introduites dans les travaux de W. Walter [1] et [2]. Ces conditions sont une certaine généralisation de celles que Nagumo et Osgood avaient admises pour l'étude de l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires. Nos recherches seront basées sur les mémoires [1] et [2]. Aussi adoptons-nous plusieurs définitions et théorèmes auxiliaires qui y figurent. Quant aux méthodes introduites par ces auteurs, quelques-unes ont pu être étendues, avec quelques modifications, au problème considéré.

Notre mémoire se compose de deux parties principales. Dans la première nous occupons du problème d'unicité des solutions de l'équation (1) lorsque les conditions (2) sont vérifiées. Ce problème sera appelé dans la suite problème (A). La seconde partie du mémoire contient les démonstrations d'existence des solutions relatives à des cas particuliers de l'équation (1).

On trouvera dans les travaux [1] et [2] de W. Walter un compte rendu de la bibliographie des problèmes respectifs concernant l'équation différentielle du second ordre de la forme

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{$*$}$$

D'autre part, plusieurs auteurs polonais: Z. Szmydt [3], A. Bielecki et J. Kisyński ([4] et [5]), se sont aussi occupés des conditions d'existence et d'unicité des solutions de l'équation de la forme (*).

I. § 2. Définitions et théorèmes auxiliaires. De même que dans [1], on entendra par classe de fonctions $G = G(0, a)$ l'ensemble de toutes les fonctions $g(x, z)$ définies pour $0 < x \leqslant a$, $z \geqslant 0$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

(α) $g(x, z)$ est une function continue pour $0 < x \leqslant a$, $z \geqslant 0$;

(β) $g(x, z) \geqslant 0$ et $g(x, 0) = 0$;

(γ) toute solution de l'équation

$$z' = g(x, z) \tag{3}$$

peut s'écrire soit sous la forme $z \equiv 0$, soit $z(x) \geqslant \delta \cdot x$ $(\delta > 0)$.

Si de plus,

(δ) chaque solution $z(x)$ de l'équation (3) est bornée;

(ε) $g(x, z) \leqslant g(x, \bar{z})$ pour $z \leqslant \bar{z}$,

l'ensemble de telles fonctions $g(x, z)$ sera désigné par $G' = G'(0, a)$. On désignera par $G'' = G''(0, a)$ l'ensemble des fonctions $g(x, z)$ qui, tout en appartenant à la classe G', vérifient en plus les conditions

(ζ) chaque solution $z(x)$ de l'équation (3) est de la forme soit $z \equiv 0$, soit $z(x) \geqslant \delta > 0$;

(η) pour tout $C > 0$ il existe une solution de l'équation (3) telle que $z(x) \geqslant C$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

On désignera par Φ la classe des fonctions $\varphi(x)$ continues et non négatives dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, satisfaisant à la condition

$$\varphi(x) = o(x) \quad \text{lorsque} \quad x \to 0 .$$

Nous utiliserons aussi les trois théorèmes suivants du mémoire [1], que nous citons mot à mot:

THÉORÈME 1 ([1], p. 311, th. 3). *Si $g(x, z) \in G'(0, a)$ et $\varphi_0(x) \in \Phi$ ou bien $g(x, z) \in G''(0, a)$, tandis que $\varphi_0(x)$ est une fonction arbitraire, mais continue dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, la suite*

$$\varphi_n(x) = K^n\varphi_0(x) \quad \text{où} \quad K\varphi_0(x) = \int_0^x g\big(t, \varphi_0(t)\big)\,dt ,$$

converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$.

THÉORÈME 2 ([1], p. 314, th. 5). *Si la fonction $f(x, y, u, v, w)$ satisfait pour $0 < x \leqslant a$, $0 < y \leqslant b$, $-\infty < u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} < +\infty$ à l'inégalité*

$$|f(x, y, u, v, w) - f(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| \leqslant \alpha\frac{\delta u}{xy} + \beta\frac{\delta v}{y} + \gamma\frac{\delta w}{x}, \tag{4}$$

où

$$\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0 , \quad \alpha+\beta+\gamma = 1 \quad \text{et} \quad \delta u = |u-\bar{u}| , \quad \ldots ,$$

le problème des conditions initiales de l'équation

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{5}$$

a tout au plus une solution.

Par contre, si $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ et $\alpha+\beta+\gamma > 1$, il existe toujours des fonctions bornées et continues f qui satisfont à (4) et dont les problèmes des conditions initiales n'admettent pas de solution univoque.

THÉORÈME 3 ([1], p. 319, th. 7). *Si la fonction $g_1(x, z) = (2+a)g(x, z) \in G'(0, a+b)$ et la fonction f vérifie l'inégalité*

$$|f(x, y, u, v, w) - f(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| \leqslant g(x+y, \delta u+\delta v+\delta w) , \tag{6}$$

où $0 < x \leqslant a$, $0 < y \leqslant b$, $u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w}$ sont des variables réelles, le problème des conditions initiales de l'équation (5) a tout au plus une solution.

§ 2. Unicité des solutions de l'équation $u_{x_1x_2x_3} = f(x_1, x_2, x_3, u)$. Avant de formuler le théorème on introduira une notation auxiliaire qui servira à abréger l'écriture. Nous donnerons ensuite un énoncé précis du problème (A) mentionné dans l'introduction, ayant en vue l'étude de son unicité.

Voici d'abord la notation annoncée.

Au lieu du second membre de (1) on écrira

$$f = f(\xi, u, P, Q)$$

où

$$\xi = \{x_i\}_{i=1,2,3} , \quad P = \{p_i\}_{i=1,2,3} , \quad Q = \{q_{jk}\}_{j,k=1,2,3;\ j<k} ,$$

$$p_i(\xi) = \frac{\partial u(\xi)}{\partial x_i}, \quad q_{jk}(\xi) = \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Supposons ensuite

$$s(\xi) = \frac{\partial^3 u(\xi)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}.$$

V désignera le produit cartésien $V = \mathop{P}\limits_{j=1}^{3} I_j$ où $I_j = \langle 0, a_j\rangle$ $(a_j > 0)$, $j = 1, 2, 3$. On supposera en outre que les fonctions $\varphi_\nu(x_j, x_k)$ $(\nu = 1, 2, 3$, $\nu+j+k = 6$, $j < k)$ seront définies sur les produits $\Pi_{jk} = I_j \times I_k$, qu'elles y seront continues ainsi que leurs dérivées, jusqu'au second ordre, y compris la dérivée mixte, et qu'elles satisferont aux conditions

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, x_3) &= \varphi_2(0, x_3) \quad \text{pour} \quad x_3 \in I_3 , \\ \varphi_1(x_2, 0) &= \varphi_3(0, x_2) \quad \text{pour} \quad x_2 \in I_2 , \\ \varphi_2(x_1, 0) &= \varphi_3(x_1, 0) \quad \text{pour} \quad x_1 \in I_1 . \end{aligned} \tag{7}$$

On dira que la fonction $v(\xi)$, $\xi \in V$ est de la classe $C^*(V)$ s'il existe dans l'ensemble V, et si elles y sont continues, les fonctions

$$v(\xi),\ v_{x_i}(\xi),\ v_{x_jx_k}(\xi),\ v_{x_1x_2x_3}(\xi) \quad \text{où} \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j < k.$$

Maintenant nous allons formuler d'une manière précise le problème (A).

(A) On cherche une fonction $u(\xi)$ de la classe $C^*(V)$ satisfaisant à l'équation (1) avec les conditions initiales

$$(8) \qquad u(\xi) = \varphi_\nu(x_i, x_k) \quad \text{pour} \quad \xi \in \Pi_{ik}$$
$$\text{où} \quad \nu, i, k = 1, 2, 3, \quad i < k \quad \text{et} \quad \nu+i+k = 6.$$

Il est facile de montrer que la résolution du problème (A) équivaut à celle de l'équation intégrale

$$(9) \qquad u(\xi) = \psi(\xi) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s, u(s), P(s), Q(s)\big)\, ds_1 ds_2 ds_3,$$

où $s = \{s_i\}_{i=1,2,3}$ et

$$(10) \quad \psi(\xi) = \varphi_1(0, 0) - [\varphi_1(0, x_3) + \varphi_2(x_1, 0) + \varphi_3(0, x_2)] + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu+i+k=6,\ i<k}}^{3} \varphi_\nu(x_i, x_k).$$

Ceci termine nos remarques préliminaires qui, bien que brèves, étaient indispensables pour la suite de nos démonstrations. Passons maintenant à l'énoncé d'un théorème analogue au théorème 4 de [1].

Théorème 4. *Si la fonction* $g(x, z) \in G'(0, a)$, *où* $a = \prod_{i=1}^{3} a_i$, *jouit de la propriété:*

(ϑ) *pour chaque* $z \geqslant 0$ *fixé, la fonction* $g(x, z)$ *est non décroissante par rapport à* $x \in (0, a\rangle$,

le problème (A) *relatif à l'équation*

$$(1a) \qquad s(\xi) = f(\xi, u)$$

a tout au plus une solution, pourvu que la fonction continue $f(\xi, u)$ *satisfasse dans le domaine* $\xi \in V$, $-\infty < u < +\infty$ *pour* $0 < x_i \leqslant a_i$, $-\infty < u$, $\bar{u} < +\infty$, $i = 1, 2, 3$ *à l'inégalité*

$$(11) \qquad |f(\xi, u) - f(\xi, \bar{u})| \leqslant g\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i, \delta u\Big) \quad \text{où} \quad \delta u = |u - \bar{u}|.$$

Démonstration. Supposons que $u(\xi)$ et $\bar{u}(\xi)$ soient deux solutions du problème (A) relatif à l'équation (1a) avec la condition (11). Dans

ce cas, en vertu de la représentation intégrale (9) et de la condition (11), on aura pour $\delta u(\xi)$ l'inégalité

$$(12) \qquad \delta u(\xi) \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \big|f\big(s, u(s)\big) - f\big(s, \bar{u}(s)\big)\big|\, ds_1 ds_2 ds_3$$
$$\leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} g\Big(\prod_{i=1}^{3} s_i, \delta u(s)\Big)\, ds_1 ds_2 ds_3.$$

Les conditions (8) assurent l'unicité des fonctions $u(\xi)$ et $\bar{u}(\xi)$ sur les parties communes de l'ensemble V et des plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, c'est-à-dire sur les produits Π_{jk}. Ceci permet de constater que la fonction

$$\Delta_f(\xi) = \big|f\big(\xi, u(\xi)\big) - f\big(\xi, \bar{u}(\xi)\big)\big|$$

(continue dans l'ensemble V) s'annule sur les produits Π_{jk}, $j, k = 1, 2, 3$; $j < k$.

Désignons maintenant par $A_t = \big\{\xi\colon \prod_{i=1}^{3} x_i \leqslant t\big\} \cap V$ [1] et par $\varphi_0(t)$ la fonction définie comme il suit:

$$(13) \qquad \varphi_0(t) = \begin{cases} \sup\limits_{\xi \in A_t} \{\Delta_f(\xi)\} & \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle, \\ \varphi_0(a) & \text{pour} \quad t > a. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction $\varphi_0(t)$ est continue, non décroissante, et que $\varphi_0(0) = 0$ en vertu des propriétés de la fonction $\Delta_f(\xi)$.

On déduit de (12) l'inégalité

$$\delta u(\xi) \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) \cdot \Delta_f(\xi^*)$$
$$\text{où} \quad \xi^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x_i^* \leqslant x_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3,$$

on tire donc de (13)

$$(14) \qquad \delta u(\xi) \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)\varphi_0\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) = \varphi_0\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{où} \quad \varphi_0(t) \in \Phi.$$

En vertu des propriétés (ε), (ϑ) et de (14), on a

$$g\Big(\prod_{i=1}^{3} s_i, \delta u(s)\Big) \leqslant g\Big(\prod_{i=1}^{3} s_i, \Big(\prod_{i=1}^{3} s_i\Big)\varphi_0\Big(\prod_{i=1}^{3} s_i\Big)\Big) \leqslant g\Big(x_1x_2s_3, x_1x_2s_3 \cdot \varphi_0\Big(\prod_{i=1}^{3} s_i\Big)\Big)$$
$$\leqslant g\big(x_1x_2s_3, x_1x_2s_3 \cdot \varphi_0(x_1x_2s_3)\big) = g\big(x_1x_2s_3, \varphi_0(x_1x_2s_3)\big).$$

[1] Le symbole $A \cap B$ désigne le produit des ensembles A et B au sens de la théorie des ensembles.

On déduit donc de (12)

$$\delta u(\xi) \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} g\big(x_1 x_2 s_3, \varphi_0(x_1 x_2 s_3)\big)\, ds_1 ds_2 ds_3$$
$$= \int_0^{x_1\cdot x_2\cdot x_3} g\big(\tau, \varphi_0(\tau)\big)\, d\tau = \varphi_1\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big), \quad \text{où} \quad \varphi_1(t) = K\varphi_0(t) .$$

La fonction

$$\psi_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g\big(\tau, \varphi_0(\tau)\big)\, d\tau$$

est non décroissante comme moyenne de la fonction monotone $g\big(\tau, \varphi_0(\tau)\big)$. Par suite on a l'inégalité

$$\text{(14*)} \qquad \delta u(\xi) \leqslant \varphi_1\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big), \quad \text{où} \quad \varphi_1(t) = t\psi_1(t) .$$

En procédant comme ci-dessus, on prouvera par récurrence la limitation

$$\text{(15)} \qquad \delta u(\xi) \leqslant \varphi_n\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où $\varphi_n(t) = t\psi_n(t)$, $\psi_n(t) \in C\langle 0, a\rangle$ et $\psi_n(t)$ sont des fonctions non décroissantes pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

Afin d'achever la démonstration il suffit maintenant de s'appuyer sur le théorème 1 du § 1, attendu que $\varphi_0(t) \in \Phi$ et $g(x, z) \in G'(0, a)$. De (15) on déduit alors

$$0 \leqslant \delta u(\xi) \leqslant \lim_n \varphi_n\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) = 0 ,$$

ce qui prouve l'unicité des solutions du problème considéré.

§ 3. L'unicité des solutions de l'équation $s(\xi) = f(\xi, u, P, Q)$. Nous nous occuperons dans ce paragraphe de la condition d'unicité qui est analogue, dans un certain sens, à celle de Nagumo pour les équations différentielles ordinaires.

THÉORÈME 5. *Le problème* (A) *relatif à l'équation* (1) *a tout au plus une solution dans le cas où la fonction continue* $f(\xi, u, P, Q)$ *satisfait à la condition supplémentaire*

$$\text{(16)} \qquad |f(\xi, u, P, Q) - f(\xi, \overline{u}, \overline{P}, \overline{Q})| \leqslant a\frac{\delta u}{x_1 x_2 x_3} + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu+i+k=6,\ i<k}}^{3} \Big(a_\nu \frac{\delta p_\nu}{x_i x_k} + \beta_\nu \frac{\delta q_{ik}}{x_\nu}\Big)$$

pour $0 < x_i \leqslant a_i$, $-\infty < u, P, Q, \overline{u}, \overline{P}, \overline{Q} < +\infty$ *et* $a, a_i, \beta_i \geqslant 0$, $a + \sum_{i=1}^{3}(a_i + \beta_i) = 1$.

Si toutefois $a, a_i, \beta_i \geqslant 0$ *et* $a + \sum_{i=1}^{3}(a_i + \beta_i) > 1$, *il existe des fonctions* f *bornées, continues et vérifiant la condition* (16), *pour lesquelles le problème* (A) *n'admet pas de solution univoque.*

Démonstration. La méthode de la démonstration exige qu'on établisse d'abord que les fonctions $u(\xi), P(\xi), Q(\xi)$ sont définies d'une manière univoque sur les produits Π_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$, $i < k$. Cela a évidemment lieu pour la fonction $u(\xi)$. Remarquons qu'il résulte des conditions initiales que les fonctions suivantes sont aussi univoques:

$$\text{(17)} \qquad \begin{array}{lll} p_1(\xi) & \text{pour} & \xi \in \Pi_{13} \cup \Pi_{12} , \\ p_2(\xi) & \text{pour} & \xi \in \Pi_{12} \cup \Pi_{23} , \\ p_3(\xi) & \text{pour} & \xi \in \Pi_{13} \cup \Pi_{23} , \\ q_{ik}(\xi) & \text{pour} & \xi \in \Pi_{ik} \quad \text{lorsque} \quad i, k = 1, 2, 3,\ i < k . \end{array}$$

Nous allons montrer que la condition (16) assure, en vertu du théorème 2 du § 1, l'unicité du système de fonctions (17) sur tous les trois produits Π_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$, $i < k$.

Considérons à cet effet la fonction

$$w(x_2, x_3) = p_1(0, x_2, x_3) .$$

On a d'après (8)

$$p_2(0, x_2, x_3) = \varphi'_{1x_2}(x_2, x_3), \qquad p_3(0, x_2, x_3) = \varphi'_{1x_3}(x_2, x_3),$$
$$q_{23}(0, x_2, x_3) = \varphi''_{1x_2x_3}(x_2, x_3),$$
$$q_{12}(0, x_2, x_3) = w'_{x_2}(x_2, x_3), \qquad q_{13}(0, x_2, x_3) = w'_{x_3}(x_2, x_3),$$
$$s(0, x_2, x_3) = w''_{x_2x_3}(x_2, x_3) .$$

Si donc $u(\xi)$ est une solution du problème (A), $w(x_2, x_3)$ satisfait à l'équation

$$w''_{x_2x_3} = f(0, x_2, x_3, \varphi_1, w, \varphi'_{1x_3}, w'_{x_2}, w'_{x_3}, \varphi''_{1x_2x_3}) = f^*(x_2, x_3, w, w'_{x_2}, w'_{x_3})$$

avec les conditions:

$$w(0, x_3) = \varphi'_{2x_1}(0, x_3), \qquad w(x_2, 0) = \varphi'_{3x_1}(0, x_2) .$$

Ainsi la propriété (16) de la fonction f implique la limitation suivante de la fonction f^*

$$|f^*(x_2, x_3, w, w'_{x_2}, w'_{x_3}) - f^*(x_2, x_3, \overline{w}, \overline{w}'_{x_2}, \overline{w}'_{x_3})| \leqslant a_1\frac{\delta w}{x_2 x_3} + \beta_1\frac{\delta w'_{x_2}}{x_3} + \beta_2\frac{\delta w'_{x_3}}{x_2},$$

qui entraîne l'unicité de la solution $w(x_2, x_3)$ ainsi que celle de ses dérivées w'_{x_2} et w'_{x_3}. Mais cela prouve que les fonctions

$$p_1(0, x_2, x_3)\,, \qquad q_{12}(0, x_2, x_3) \qquad \text{et} \qquad q_{13}(0, x_2, x_3)$$

sont univoques.

En posant ensuite
$$z(x_1, x_3) = p_2(x_1, 0, x_3)$$

et en procédant de la même manière, on établit que les fonctions $z(x_1, x_3)$, $z'_{x_1}(x_1, x_3)$, $z'_{x_3}(x_1, x_3)$ sont univoques, et par suite les fonctions

$$p_2(x_1, 0, x_3)\,, \qquad q_{12}(x_1, 0, x_3) = q_{21}(x_1, 0, x_3) \qquad \text{et} \qquad q_{23}(x_1, 0, x_3)$$

le sont aussi. Enfin on établira pareillement que les fonctions

$$p_3(x_1, x_2, 0)\,, \qquad q_{13}(x_1, x_2, 0) = q_{31}(x_1, x_2, 0) \qquad \text{et} \qquad q_{23}(x_1, x_2, 0) = q_{32}(x_1, x_2, 0)$$

sont aussi univoques (2). La démonstration de la proposition préliminaire est ainsi achevée.

Si $u(\xi)$ et $\bar{u}(\xi)$ sont deux solutions du problème (A), la fonction continue (dans l'ensemble V)

$$\Delta_f^*(\xi) = \left|f\big(\xi, u(\xi), P(\xi), Q(\xi)\big) - f\big(\xi, \bar{u}(\xi), \bar{P}(\xi), \bar{Q}(\xi)\big)\right|$$

s'annule sur les produits Π_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$, $i < k$, conformément à la proposition que nous venons d'établir.

Il est donc possible d'introduire, tout comme dans le mémoire [1], th. 5, une fonction auxiliaire $\psi_0(t)$ qui soit continue, non décroissante et convexe telle que

$$\Delta_f^*(\xi) \leqslant \prod_{i=1}^{3} \psi_0(x_i) \qquad \text{avec la condition } \psi_0(0) = 0\,. \tag{18}$$

En vertu de la convexité de la fonction $\psi_0(t)$, on a $\int_0^t \psi_0(\tau)\,d\tau \leqslant t\psi_0(t/2)$, $t \geqslant 0$ et plus généralement

$$\int_0^t \psi_n(\tau)\,d\tau \leqslant t\psi_{n+1}(t) \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

vu que les fonctions $\psi_n(t) = \psi_0(2^{-n}t)$ sont convexes pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Cela posé, revenons à l'équation (1).

(2) La relation $q_{ik}(\xi) = q_{ki}(\xi)$, $i, k = 1, 2, 3$, $i \neq k$ est une conséquence directe des hypothèses faites sur les fonctions f et φ_ν, ainsi que du fait qu'on a ici $u(\xi) \in C^*(V)$.

En posant $\delta v(\xi) = |v(\xi) - \bar{v}(\xi)|$, nous aurons en vertu de (9) et de (16) les inégalités

$$\begin{aligned}
\delta u(\xi) &\leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \Delta_f^*(s_1, s_2, s_3)\,ds_1ds_2ds_3 \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \Delta(s_1, s_2, s_3)\,ds_1ds_2ds_3\,,\\
\delta p_1(\xi) &\leqslant \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \Delta_f^*(x_1, s_2, s_3)\,ds_2ds_3 \leqslant \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \Delta(x_1, s_2, s_3)\,ds_2ds_3\,,\\
\delta p_2(\xi) &\leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_3} \Delta_f^*(s_1, x_2, s_3)\,ds_1ds_3 \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_3} \Delta(s_1, x_2, s_3)\,ds_1ds_3\,,\\
\delta p_3(\xi) &\leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \Delta_f^*(s_1, s_2, x_3)\,ds_1ds_2 \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \Delta(s_1, s_2, x_3)\,ds_1ds_2\,,\\
\delta q_{12}(\xi) &\leqslant \int_0^{x_3} \Delta_f^*(x_1, x_2, s_3)\,ds_3 \leqslant \int_0^{x_3} \Delta(x_1, x_2, s_3)\,ds_3\,,\\
\delta q_{13}(\xi) &\leqslant \int_0^{x_2} \Delta_f^*(x_1, s_2, x_3)\,ds_2 \leqslant \int_0^{x_2} \Delta(x_1, s_2, x_3)\,ds_2\,,\\
\delta q_{23}(\xi) &\leqslant \int_0^{x_1} \Delta_f^*(s_1, x_2, x_3)\,ds_1 \leqslant \int_0^{x_1} \Delta(s_1, x_2, x_3)\,ds_1\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

où $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ est le second membre de l'inégalité (16).

Les premières limitations résultent déjà de (18) et (20), à savoir

$$\begin{aligned}
&\delta u(\xi) \leqslant \prod_{i=1}^{3} x_i\psi_0(x_i)\,,\\
&\delta p_\nu(\xi) \leqslant \psi_0(x_\nu) \prod_{i=1,\, i\neq\nu}^{3} x_i\psi_0(x_i) \qquad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3\,,\\
&\delta q_{lk}(\xi) \leqslant x_\nu \prod_{i=1}^{3} \psi_0(x_i) \quad \text{où} \quad l, k, \nu = 1, 2, 3\,, \quad \nu + l + k = 6\,, \quad l < k\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

On établira ensuite par récurrence que la majoration (21) peut s'étendre au cas général ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned}
&\delta u(\xi) \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) \sum_{\substack{r,s=0\\ r\leqslant s,\, r+s\leqslant n}}^{n} a_{rs}\psi_r(x_1)\psi_s(x_2)\psi_{n-r-s}(x_3)\,,\\
&\qquad\qquad a_{rs} \geqslant 0\,, \quad \sum_{r,s} a_{rs} = 1\,,\\
&\delta p_\nu(\xi) \leqslant \prod_{i=1,\, i\neq\nu}^{3} x_i \cdot \sum_{\substack{r,s=0\\ r\leqslant s,\, r+s\leqslant n}}^{n} \beta_{rs}^{(\nu)}\psi_r(x_1)\psi_s(x_2)\psi_{n-r-s}(x_3)\,,\\
&\qquad\qquad \beta_{rs}^{(\nu)} \geqslant 0\,, \quad \sum_{r,s} \beta_{rs}^{(\nu)} = 1\,, \quad \nu = 1, 2, 3\,,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$(22)\qquad \begin{gathered}\delta q_{lk}(\xi) \leqslant x_\nu \cdot \sum_{\substack{r,s=0\\ r\leqslant s,\, r+s\leqslant n}}^{n} \gamma_{rs}^{(\nu)} \psi_r(x_1)\psi_s(x_2)\psi_{n-r-s}(x_3)\,,\\ \gamma_{rs}^{(\nu)} \geqslant 0\,, \quad \sum_{r,s} \gamma_{rs}^{(\nu)} = 1\,, \quad l,k,\nu = 1,2,3\,, \quad l+k+\nu = 6\,, \quad l<k\,.\end{gathered}$$

Les inégalités (20), (22) et (19) entraînent immédiatement, pour $n = k$, la limitation

$$\delta u(\xi) \leqslant \sum_{r,s=0}^{k} \Big[\alpha a_{rs} + \sum_{\nu=1}^{3} (\alpha_\nu \beta_{rs}^{(\nu)} + \beta_\nu \gamma_{rs}^{(\nu)})\Big] \cdot \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \psi_r(s_1)\psi_s(s_2)\psi_{k-r-s}(s_3)\, ds_1\, ds_2\, ds_3$$

$$\leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) \sum_{r,s=0}^{k+1} \bar a_{rs}\psi_r(x_1)\psi_s(x_2)\cdot\psi_{k-r-s+1}(x_3)\,, \qquad \bar a_{rs} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{r,s} \bar a_{rs} = 1\,,$$

où

$$\bar a_{rs} = \alpha\cdot a_{rs} + \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu \beta_{rs}^{(\nu)} + \beta_\nu \gamma_{rs}^{(\nu)})\,.$$

Par un raisonnement tout pareil au précédent, on établit les deux autres inégalités (22).

Ainsi (22) est vérifié pour $n = 0$ (voir (21)). D'autre part, les formules (22) étant vraies pour $n = k$, elles le sont pour $n = k+1$, ce qui prouve (22) pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

Posons maintenant $N(n) = E(n/3)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $b = \max(a_1, a_2, a_3)$. On a alors pour $r, s = 0, 1, \ldots, n$, $r \leqslant s$

$$\psi_r(x_1)\psi_s(x_2)\psi_{n-r-s}(x_3) \leqslant \psi_0^2(b)\psi_0(2^{-N(n)}\cdot b) = \psi_0^2(b)\cdot\psi_N(b)\,,$$

d'où l'on tire, d'après (22),

$$\delta u(\xi) \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)\, \psi_0^2(b)\cdot\psi_N(b) \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

et $\lim_{n\to\infty} \psi_N(b) = 0$, ce qui prouve que $\delta u(\xi) = 0$ pour $\xi \in V$. Par conséquent la première partie du théorème a été démontrée.

On prouvera la seconde en montrant qu'il existe toujours, si $\sigma = \alpha + \sum_{\nu=1}^{3}(\alpha_\nu + \beta_\nu) > 1$, des fonctions continues et bornées, telles que, si les conditions initiales sont nulles, il existe un continu de solutions du problème (A), la condition (16) étant évidemment satisfaite par les fonctions f.

Considérons à cet effet la fonction

$$u(\xi) = \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)^{1+\varepsilon},$$

où $\varepsilon > 0$ fixe est défini d'une manière univoque par la racine η de l'équation

$$\eta^3 - (\beta_1+\beta_1+\beta_3)\eta^2 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2)\eta - \alpha = 0 \quad \text{où} \quad \eta = 1+\varepsilon\,, \quad \sigma > 1\,.$$

On voit bien que la relation

$$s(\xi) = \alpha\frac{u}{x_1x_2x_3} + \alpha_1\frac{p_1}{x_2x_3} + \alpha_2\frac{p_2}{x_1x_3} + \alpha_3\frac{p_3}{x_1x_2} + \beta_1\frac{q_{23}}{x_1} + \beta_2\frac{q_{13}}{x_2} + \beta_3\frac{q_{12}}{x_3}$$

a lieu et que son second membre n'est pas une fonction continue pour $\xi \in V$, $-\infty < u$, $p_i, q_{lk} < \infty$, $i, l, k = 1, 2, 3$, $l < k$; on finira toutefois, en procédant comme dans [1], par obtenir un seconde membre continu et borné dans le domaine considéré.

Posons

$$f^*(\xi, u) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad u \leqslant 0\,,\ \xi \in V\,,\\ \dfrac{u}{x_1x_2x_3} & \text{pour} \quad 0 < u \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)^{1+\varepsilon},\\ \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)^{\varepsilon} & \text{pour} \quad u > \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)^{1+\varepsilon},\end{cases}$$

$$f_\nu(\xi, p_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad p_\nu \leqslant 0\,,\ \xi \in V\,,\\ \dfrac{p_\nu}{x_lx_k} & \text{pour} \quad 0 < p_\nu \leqslant (1+\varepsilon)x_\nu^{\varepsilon}(x_lx_k)^{1+\varepsilon}\,,\\ (1+\varepsilon)\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)^{\varepsilon} & \text{pour} \quad p_\nu > (1+\varepsilon)x_\nu^{\varepsilon}(x_lx_k)^{1+\varepsilon}\,,\end{cases}$$

où $\nu, l, k = 1, 2, 3$, $\nu+l+k = 6$, $l < k$,

$$g_\nu(\xi, q_{lk}) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad q_{lk} \leqslant 0\,,\ \xi \in V\,,\\ \dfrac{q_{lk}}{x_\nu} & \text{pour} \quad 0 < q_{lk} \leqslant (1+\varepsilon)^2 x_\nu^{1+\varepsilon}(x_lx_k)^{\varepsilon}\,,\\ (1+\varepsilon)^2\Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big)^{\varepsilon} & \text{pour} \quad q_{lk} > (1+\varepsilon)^2 x_\nu^{1+\varepsilon}(x_lx_k)^{\varepsilon}\,,\end{cases}$$

où $\nu, l, k = 1, 2, 3$, $\nu+l+k = 6$, $l < k$.

En posant maintenant

$$f(\xi, u, P, Q) = \alpha f^*(\xi, u) + \sum_{\nu=1}^{3} [\alpha_\nu f_\nu(\xi, p_\nu) + \beta_\nu g_\nu(\xi, q_{lk})]$$

on voit immédiatement que la fonction ainsi définie est continue bornée et qu'elle satisfait à la condition (16) seulement si $\alpha, \alpha_\nu, \beta_\nu \geqslant 0$ et $\sigma > 1$. On voit aussi que l'équation

$$s(\xi) = f(\xi, u, P, Q)$$

possède une famille d'intégrales $u_c(\xi) = c\cdot\left(\prod_{i=1}^{3} x_i\right)^{1+\varepsilon}$ pour $c \in \langle 0, 1\rangle$, les conditions initiales (8) étant satisfaites.

L'exemple précédent pourrait suggérer l'idée de remplacer la condition (16) par une autre condition suffisante d'unicité, plus générale, à savoir (cf. aussi [1], p. 317)

$$(23)\quad |f(\xi, u, P, Q)-f(\xi, \bar{u}, \bar{P}, \bar{Q})| \leqslant ag\left(\prod_{i=1}^{3} x_i, \delta u\right)+ \\ + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu+l+k=6,\ l<k}}^{3} [a_\nu g(x_l x_k, \delta p_\nu)+\beta_\nu g(x_\nu, \delta q_{lk})],$$

où

$$a, a_\nu, \beta_\nu \geqslant 0, \quad \sigma = 1 \quad \text{et} \quad g(x, z) \in G'(0, a)$$

pour

$$a = \max\left(\prod_{i=1}^{3} a_i, a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3, a_1, a_2, a_3\right).$$

On a affaire ici à un cas pareil à celui de deux variables indépendantes: on peut uniquement prouver que la condition (23) est, dans certains cas particuliers, une condition suffisante d'unicité, notamment dans le cas où la fonction f dépend seulement soit de $(\xi, u, p_1, p_2, q_{12})$, soit de $(\xi, u, p_1, p_3, q_{13})$ soit de $(\xi, u, p_2, p_3, q_{23})$.

La suffisance de la condition (23) sera démontrée seulement pour un des trois cas possibles. Nous allons traiter ce cas dans le théorème suivant.

Théorème 6 [3]. *Si la fonction $f(\xi, u, p_1, p_2, q_{12})$ est continue dans le domaine*

$$\xi \in V, \quad -\infty < u, p_1, p_2, q_{12} < +\infty$$

et si elle satisfait, pour $0 < x_i \leqslant a_i$, $-\infty < u, \bar{u}, p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, q_{12}, \bar{q}_{12} < +\infty$ à l'inégalité

$$(24)\quad |f(\xi, u, p_1, p_2, q_{12})-f(\xi, \bar{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}_{12})| \\ \leqslant ag\left(\prod_{i=1}^{3} x_i, \delta u\right)+\beta g(x_2 x_3, \delta p_1)+\gamma g(x_1 x_3, \delta p_2)+\delta g(x_3, \delta q_{12})$$

où $a, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$, $a+\beta+\gamma+\delta = 1$ et $g(x, z) \in G'(0, a)$,

$$a = \max\left(\prod_{i=1}^{3} a_i, a_1 a_3, a_2 a_3, a_3\right)$$

[3] Pour les deux autres cas les énoncés des théorèmes sont analogues.

et $g(x, z)$ vérifie la condition (ϑ), le problème (A) relatif à l'équation

$$s(\xi) = f(\xi, u, p_1, p_2, q_{12})$$

a tout au plus une solution.

Démonstration. Si l'on désigne, comme dans les démonstrations des théorèmes précédents, par $\Delta_f^*(\xi)$ la fonction du point $\xi \in V$, on a

$$\Delta_f^*(\xi) = \left|f\left(\xi, u(\xi), p_1(\xi), p_2(\xi), q_{12}(\xi)\right)-f\left((\xi, \bar{u}(\xi), \bar{p}_1(\xi), \bar{p}_2(\xi), \bar{q}_{12}(\xi)\right)\right|,$$

où $u(\xi)$ et $\bar{u}(\xi)$ sont deux solutions distinctes de notre problème sous la condition (8).

On constate facilement, d'après les conditions initiales, que

$$\Delta_f^*(x_1, x_2, 0) = 0 \quad \text{sur le produit } \Pi_{12}.$$

En tenant compte de ce qui précède, définissons une fonction $\psi_0(t)$ continue, non décroissante et satisfaisant à la condition $\psi_0(0) = 0$, comme il suit:

$$(25)\quad \psi_0(t) = \begin{cases} \sup\{\Delta_f^*(x_1, x_2, x_3)\colon 0 \leqslant a_1 a_2 x_3 \leqslant t\} & \text{pour} \quad t \leqslant \prod_{i=1}^{3} a_i, \\ \psi_0\left(\prod_{i=1}^{3} a_i\right) & \text{pour} \quad t > \prod_{i=1}^{3} a_i. \end{cases}$$

En utilisant (9) et (25), on trouve

$$\delta u(\xi) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{3} x_i\right)\psi_0(a_1 a_2 x_3),$$

$$(26)\quad \delta p_\nu(\xi) \leqslant \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{3} x_i\right)\cdot\psi_0(a_1 a_2 x_3) \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2,$$

$$\delta q_{12}(\xi) \leqslant x_3\psi_0(a_1 a_2 x_3).$$

Pour continuer la démonstration nous aurons à distinguer plusieurs cas selon les valeurs de a_1 et a_2.

Supposons d'abord

1° $a_1 \leqslant 1$ et $a_2 \leqslant 1$. Admettons que les inégalités (26), qui sont valables pour $n = 0$, le soient aussi pour $n = k \geqslant 0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(27)\quad \begin{gathered} \delta u(\xi) \leqslant x_1 x_2 \varphi_k(x_3), \\ \delta p_1(\xi) \leqslant x_2 \varphi_k(x_3), \quad \delta p_2(\xi) \leqslant x_1 \varphi_k(x_3), \\ \delta q_{12}(\xi) \leqslant \varphi_k(x_3), \end{gathered}$$

où

$$\varphi_k(t) = K^k\varphi_0(t) = t\psi_k(t), \quad \psi_k(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g\left(\tau, \tau\psi_{k-1}(\tau)\right)d\tau.$$

En vertu des propriétés (ϑ) des fonctions $g(x, z)$ les fonctions $\psi_k(t)$ sont non décroissantes pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots$ et $t \in \langle 0, a \rangle$.

On déduit de la condition (24) et de la relation (9)

$$\delta q_{12}(\xi) \leqslant \int_0^{x_3} \Delta_f^*(x_1, x_2, t)\,dt$$

$$\leqslant \int_0^{x_3} \left[\alpha g\left(x_1 x_2 t, x_1 x_2 \varphi_k(t)\right) + \beta g\left(x_2 t, x_2 \varphi_k(t)\right) + \gamma g\left(x_1 t, x_1 \varphi_k(t)\right) + \delta g\left(t, \varphi_k(t)\right)\right] dt$$

d'où l'on trouve finalement, en vertu de la condition (ϑ) et du fait qu'on a dans le cas 1°

$$\delta q_{12}(\xi) \leqslant \int_0^{x_3} g\left(t, \varphi_k(t)\right) dt = \varphi_{k+1}(x_3)\,.$$

On obtient même les inégalités

$$\delta p_1(\xi) \leqslant x_2 \varphi_{k+1}(x_3)\,, \qquad \delta p_2(\xi) \leqslant x_1 \varphi_{k+1}(x_3)\,, \qquad \delta u(\xi) \leqslant x_1 x_2 \varphi_{k+1}(x_3)\,.$$

Ainsi, dans le cas $a_i \leqslant 1$, $i = 1, 2$, les inégalités suivantes ont toujours lieu

$$\begin{aligned} &\delta u(\xi) \leqslant x_1 x_2 \varphi_n(x_3)\,, \\ &\delta p_1(\xi) \leqslant x_2 \varphi_n(x_3)\,, \qquad \delta p_2(\xi) \leqslant x_1 \varphi_n(x_3)\,, \\ &\delta q_{12}(\xi) \leqslant \varphi_n(x_3)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

où $n = 0, 1, 2, \ldots$

2° $a_1 \leqslant 1$, $a_2 > 1$. Admettons dans ce cas la limitation (26) de la forme

$$\begin{aligned} &\delta u(\xi) \leqslant \frac{x_1 x_2}{a_2} \varphi_0(a_2 x_3)\,, \\ &\delta p_1(\xi) \leqslant \frac{x_2}{a_2} \varphi_0(a_2 x_3)\,, \qquad \delta p_2(\xi) \leqslant \frac{x_1}{a_2} \varphi_0(a_2 x_3)\,, \\ &\delta q_{12}(\xi) \leqslant \frac{1}{a_2} \varphi_0(a_2 x_3)\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Si nous supposons maintenant que pour $n = k$ les inégalités

$$\begin{aligned} &\delta u(\xi) \leqslant \frac{x_1 x_2}{a_2} \varphi_k(a_2 x_3)\,, \\ &\delta p_1(\xi) \leqslant \frac{x_2}{a_2} \varphi_k(a_2 x_3)\,, \qquad \delta p_2(\xi) \leqslant \frac{x_1}{a_2} \varphi_k(a_2 x_3)\,, \\ &\delta q_{12}(\xi) \leqslant \frac{1}{a_2} \varphi_k(a_2 x_3) \end{aligned} \tag{30}$$

ont lieu, on trouvera en vertu de (30), (9) et de la condition (ϑ) pour $a_1 \leqslant 1$

$$\delta q_{12}(\xi) \leqslant \int_0^{x_3} \left[\alpha g\left(x_1 x_2 t, \frac{x_1 x_2}{a_2} \varphi_k(a_2 t)\right) + \beta g\left(x_2 t, \frac{x_2}{a_2} \varphi_k(a_2 t)\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma g\left(x_1 t, \frac{x_1}{a_2} \varphi_k(a_2 t)\right) + \delta g\left(t, \frac{1}{a_2} \varphi_k(a_2 t)\right)\right] dt$$
$$\leqslant \int_0^{x_3} \left[(\alpha+\beta) g\left(x_2 t, \frac{x_2}{a_2} \varphi_k(a_2 t)\right) + (\gamma+\delta) g\left(t, \frac{1}{a_2} \varphi_k(a_2 t)\right)\right] dt$$
$$\leqslant \int_0^{x_3} g\left(a_2 t, \varphi_k(a_2 t)\right) dt = \frac{1}{a_2} \int_0^{a_2 x_3} g\left(\tau, \varphi_k(\tau)\right) d\tau = \frac{1}{a_2} \varphi_{k+1}(a_2 x_3)\,.$$

La démonstration de l'inégalité (30) pour $n = k+1$ subsiste pour les cas qui restent à discuter. Ainsi on a toujours

$$\begin{aligned} &\delta u(\xi) \leqslant \frac{x_1 x_2}{a_2} \varphi_n(a_2 x_3)\,, \\ &\delta p_1(\xi) \leqslant \frac{x_2}{a_2} \varphi_n(a_2 x_3)\,, \qquad \delta p_2(\xi) \leqslant \frac{x_1}{a_2} \varphi_n(a_2 x_3)\,, \\ &\delta q_{12}(\xi) \leqslant \frac{1}{a_2} \varphi_n(a_2 x_3) \end{aligned} \tag{31}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Aussi peut-on considérer le cas où $a_1 > 1$, $a_2 \leqslant 1$ comme établi. Il ne reste donc qu'à étudier le cas où $a_1 > 1$ et $a_2 > 1$.

Il résulte de (26) (pour $n = 0$)

$$\begin{aligned} &\delta u(\xi) \leqslant \frac{x_1 x_2}{a_1 a_2} \varphi_n(a_1 a_2 x_3)\,, \\ &\delta p_1(\xi) \leqslant \frac{x_2}{a_1 a_2} \varphi_n(a_1 a_2 x_3)\,, \qquad \delta p_2(\xi) \leqslant \frac{x_1}{a_1 a_2} \varphi_n(a_1 a_2 x_3)\,, \\ &\delta q_{12}(\xi) \leqslant \frac{1}{a_1 a_2} \varphi_n(a_1 a_2 x_3)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Supposons que les inégalités (32) soient vérifiées pour $n = k \geqslant 0$. En reprenant des raisonnements tout pareils aux précédents on trouve la limitation

$$\delta q_{12}(\xi) \leqslant \int_0^{x_3} \left[\alpha g\left(x_1 x_2 t, \frac{x_1 x_2}{a_1 a_2} \varphi_k(a_1 a_2 t)\right) + \beta g\left(x_2 t, \frac{x_2}{a_1 a_2} \varphi_k(a_1 a_2 t)\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma g\left(x_1 t, \frac{x_1}{a_1 a_2} \varphi_k(a_1 a_2 t)\right) + \delta g\left(t, \frac{1}{a_1 a_2} \varphi_k(a_1 a_2 t)\right)\right] dt$$
$$\leqslant \int_0^{x_3} g\left(a_1 a_2 t, \varphi_k(a_1 a_2 t)\right) dt = \frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{a_1 a_2 x_3} g\left(\tau, \varphi_k(\tau)\right) d\tau = \frac{1}{a_1 a_2} \varphi_{k+1}(a_1 a_2 x_3)\,.$$

On voit aisément que les autres inégalités du système (32) sont aussi satisfaites pour $n = k+1$, ce qui prouve, en tenant compte de la limitation établie ci-dessus, que le système d'équations (32) est vérifié pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pour terminer la démonstration il suffit de constater que, dans chacun des quatre cas considérés, les fonctions φ_n qui figurent dans (28), (31) et (32) sont telles que $\varphi_0 \in \Phi$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$ (cf. la conclusion du théorème 1 du § 1). Il en résulte immédiatement qu'on a, dans chacun des cas considérés, $\delta u(\xi) = 0$ pour $\xi \in V$.

Reprenons encore l'équation complète

$$s(\xi) = f(\xi, u, P, Q)\,.$$

On formulera ci-dessous encore un théorème concernant l'unicité des solutions du problème (A) relatif à cette équation.

Dans sa démonstration un théorème (7, [1]) de W. Walter concernant le cas de deux variables indépendantes jouera un rôle essentiel.

THÉORÈME 7. *Si la fonction $f(\xi, u, P, Q)$ est continue dans le domaine*

$$\xi \in V\,, \qquad -\infty < u, P, Q < +\infty$$

et si elle satisfait pour

$$\xi \in V - \bigcup_{\substack{i,k=1\\ i<k}} \Pi_{ik}\,, \qquad -\infty < u, \bar{u}, P, \bar{P}, Q, \bar{Q} < +\infty$$

à l'inégalité

$$(33)\quad |f(\xi, u, P, Q) - f(\xi, \bar{u}, \bar{P}, \bar{Q})| \leqslant g\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i,\ \delta u + \sum_{i=1}^{3} \delta p_i + \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{3} \delta q_{jk}\Big)\,,$$

la fonction $g(x, z)$ étant telle que

$$c_1 g(x, z) = g_1(x, z) \in G'\,,$$

où

$$c_1 = 3 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 \quad \text{et} \quad G' = G'(0, a_1 + a_2 + a_3)\,,$$

alors le problème (A) relatif à l'équation

$$s(\xi) = f(\xi, u, P, Q)$$

a tout au plus une solution ([4]).

([4]) La constante c_1 a été déterminée ici pour l'une des trois variantes possibles. Bien entendu, le théorème subsiste lorsqu'on remplace la constante c_1 par une des deux autres variantes.

Démonstration. Admettons que $u(\xi)$ et $\bar{u}(\xi)$ soient deux solutions du problème considéré et que

$$\Delta^*(\xi) = \delta u(\xi) + \sum_{i=1}^{3} \delta p_i(\xi) + \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{3} \delta q_{jk}(\xi)\,.$$

On établit, tout comme dans la démonstration du théorème 5, qu'ici aussi les fonctions $u(\xi), P(\xi), Q(\xi)$ sont univoques sur les produits Π_{jk}, $j, k = 1, 2, 3$, $j<k$. Pour le prouver on utilise le théorème (7, [1]) cité au § 1 comme théorème 3 ainsi que la condition (33).

Il s'ensuit que la fonction continue et non négative $\Delta_f^*(\xi)$ ([5]) s'annule sur les produits Π_{jk} pour $j, k = 1, 2, 3$, $j<k$, d'où l'on déduit en particulier

$$\Delta_f^*(\Theta) = 0 \quad \text{où} \quad \Theta = (0, 0, 0) \in V\,.$$

Les propriétés énumérées de la fonction $\Delta_f^*(\xi)$ permettent de définir de la façon suivante, la fonction continue et non décroissante $\bar{\psi}_0(t) \geqslant 0$ et $\bar{\psi}_0(0) = 0$:

$$\bar{\psi}_0(t) = \begin{cases} \sup\limits_{\xi \in A_t} \{\Delta_f^*(\xi)\} & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \sum\limits_{i=1}^{3} a_i\,, \\ \bar{\psi}_0\Big(\sum\limits_{i=1}^{3} a_i\Big) & \text{pour} \quad t > \sum\limits_{i=1}^{3} a_i\,, \end{cases}$$

où

$$A_t = \Big\{\xi\colon 0 \leqslant \sum_{i=1}^{3} x_i \leqslant t\,,\ \xi = (x_1, x_2, x_3)\Big\} \cap V\,.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\Delta_f^*(\xi) \leqslant \bar{\psi}_0\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big)$$

en vertu de laquelle on tire de (9)

$$\delta u(\xi) \leqslant \Big(\prod_{i=1}^{3} x_i\Big) \bar{\psi}_0\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big)\,,$$

$$(34)\quad \delta p_\nu(\xi) \leqslant \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{3} x_i\Big) \cdot \bar{\psi}_0\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, 3\,,$$

$$\delta q_{jk}(\xi) \leqslant x_l \cdot \bar{\psi}_0\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{pour} \quad j, k, l = 1, 2, 3,\ j+k+l = 6\,,\ j<k\,.$$

([5]) $\Delta_f^*(\xi)$ a ici la même signification que dans le théorème 5.

Vu les inégalités valables pour $(x_1, x_2, x_3) \in V$

$$\prod_{i=1}^{3} x_i \leqslant \omega \sum_{i=1}^{3} x_i, \quad \text{où} \quad \omega = \max(a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3),$$

$$x_jx_k \leqslant \omega_{jk} \sum_{i=1}^{3} x_i \quad \text{pour} \quad j, k = 1, 2, 3, \ j < k, \quad \text{où} \quad \omega_{jk} = \max(a_j, a_k),$$

on obtient pour la fonction $\Delta^*(\xi)$ la limitation suivante:

$$\Delta^*(\xi) \leqslant \Omega\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big) \cdot \overline{\psi}_0\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{où} \quad \Omega = 1 + \omega + \omega_{12} + \omega_{13} + \omega_{23}.$$

Posons maintenant

$$\psi_0(t) = \Omega \cdot \overline{\psi}_0(t) \quad \text{et} \quad \varphi_0(t) = t\psi_0(t).$$

On a alors

(35) $$\Delta^*(\xi) \leqslant \varphi_0\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{où} \quad \varphi_0(t) \in \Phi.$$

Supposons ensuite que K_1 soit un opérateur intégral défini par la fonction $g_1(x, z)$ (voir le théorème 1 du § 1) et soit

$$\varphi_n(t) = K_1^n \varphi_0(t).$$

On prouvera par récurrence que

(35a) $$\Delta^*(\xi) \leqslant \varphi_n\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En effet, l'inégalité (35a) est vérifiée pour $n = 0$ en vertu de (35). Supposons que (35a) ait lieu pour $n = k \geqslant 0$. On aurait alors de (9) et (33)

$$\delta u(\xi) \leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} g\Big(\sum_{i=1}^{3}\tau_i, \Delta^*(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\Big) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$
$$\leqslant \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\Big\{\int_0^{x_1+x_2+x_3} g\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) d\tau\Big\} d\tau_1 d\tau_2 \leqslant a_1a_2 \int_0^{x_1+x_2+x_3} g\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) d\tau,$$

c'est-à-dire

$$\delta u(\xi) \leqslant a_1a_2 \int_0^{x_1+x_2+x_3} g\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) d\tau = a_1a_2K_1\varphi_k(x_1+x_2+x_3).$$

On a ensuite

$$\delta p_1(\xi) \leqslant \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} g\big(x_1+\tau_2+\tau_3, \Delta^*(x_1, \tau_2, \tau_3)\big) d\tau_2 d\tau_3$$
$$\leqslant \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} g\big(x_1+\tau_2+\tau_3, \varphi_k(x_1+\tau_2+\tau_3)\big) d\tau_2 d\tau_3$$
$$\leqslant a_2 \int_0^{x_1+x_2+x_3} g\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big) d\tau = a_2K_1\varphi_k(x_1+x_2+x_3).$$

On trouve d'une manière analogue

$$\delta p_2(\xi) \leqslant a_3K_1\varphi_k(x_1+x_2+x_3), \qquad \delta p_3(\xi) \leqslant a_1K_1\varphi_k(x_1+x_2+x_3),$$
$$\delta q_{jk}(\xi) \leqslant K_1\varphi_k(x_1+x_2+x_3) \quad \text{pour} \quad j, k = 1, 2, 3, \ j < k,$$

d'où résulte

$$\Delta^*(\xi) \leqslant \varphi_{k+1}\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big),$$

ce qui prouve que les relations (35a) sont valables pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$ Comme $\varphi_0 \in \Phi$, $g_1(x, z) \in G'$, on conclut en vertu du théorème 1 du § 1 que

$$\Delta^*(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in V,$$

et c'est bien ce qu'il fallait démontrer.

II. § 4. Nous considérons dans cette partie du mémoire le problème d'existence du problème (A) formulé en toute rigueur au § 2. Il est évident que ce problème a une seule solution si la fonction $f(\xi, u, P, Q)$ est continue et satisfait à la condition de Lipschitz par rapport aux variables u, P, Q. On peut prouver, en appliquant sans modification la méthode de la démonstration exposée dans [6], l'existence de la solution du problème (A) dans l'hypothèse que la fonction $f(\xi, u, P, Q)$ est continue, bornée et satisfait à la condition de Lipschitz uniquement par rapport aux variables P, Q. Toutefois nous donnerons ici les démonstrations des théorèmes d'existence des solutions du problème (A) pour des cas particuliers de l'équation (1) sous des hypothèses plus générales relatives à la fonction f. Dans ce but on utilisera la méthode appliquée par de nombreux auteurs pour la démonstration de l'existence des solutions des équations intégrales du type de Volterra (voir p.ex. Tonelli [8], Conti [7], Walter [2]).

Afin d'expliquer l'emploi de cette méthode, considérons d'abord un cas facile: celui où la fonction f ne dépend que des variables ξ, u, est continue et bornée dans le domaine: $\xi \in V$, $-\infty < u < +\infty$. Conformément au § 2 l'existence d'une solution du problème (A) équivaut à l'existence d'une solution de l'équation intégrale

$$(36)\quad u(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s_1, s_2, s_3, u(s_1, s_2, s_3)\big)\,ds_1 ds_2 ds_3 .$$

Pour prouver l'existence d'une solution de cette équation, on forme une famille de fonctions $u_a(x_1, x_2, x_3)$ avec un nombre arbitraire a positif, en posant

$$(37)\quad u_a(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \psi(0, x_2, x_3) \quad \text{pour} \quad x_1 \leqslant 0\,,\ (x_2, x_3) \in \Pi_{23}\,, \\ \psi(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s_1, s_2, s_3, u_a(s_1 - a, \\ \qquad s_2, s_3)\big)\,ds_1 ds_2 ds_3 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_2, x_3) \in V\,. \end{cases}$$

Il est évident que toute fonction $u_a(x_1, x_2, x_3)$ est définie pour $x_1 \leqslant a_1$ et $(x_2, x_3) \in \Pi_{23}$.

La fonction f étant bornée, il existe une constante M, $|f| < M$, telle que pour les points arbitraires (x_1, x_2, x_3), $(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) \in V$ et pour tout $a > 0$ on a

$$(38)\quad \begin{aligned} &|u_a(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - u_a(x_1, x_2, x_3)| \\ &\qquad \leqslant |\psi(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - \psi(x_1, x_2, x_3)| + \\ &\qquad\qquad + M(|h_1|a_2a_3 + |h_2|a_1a_3 + |h_3|a_1a_2)\,. \end{aligned}$$

Il résulte des relations (37) et (38) que les fonctions sont pour tout $a > 0$ bornées dans leur ensemble et équicontinues. On déduit donc du théorème d'Arzelà qu'il existe une suite $u_{a_n}(x_1, x_2, x_3)$ uniformément convergente telle que $a_n \to 0$. On conclut d'après (37) que la limite de la suite $u_{a_n}(x_1, x_2, x_3)$ est une solution de l'équation (36) et par conséquent du problème (A).

Le théorème suivant concerne un cas plus général.

Théorème 8. *Si*

1° *la fonction $f(\xi, u, P)$ est continue et bornée dans le domaine*

$$\xi \in V\,, \qquad u, P \in (-\infty, \infty)\,,$$

2° *elle satisfait à l'une au moins des conditions écrites conjointement sous la forme*

$$(39)\quad |f(\xi, u, P) - f(\xi, u, \overline{P})| \leqslant \sum_{i=1}^{3} g_{ij}(x_j, |p_i - \overline{p}_i|)\,, \qquad i \neq j,\ j = 1, 2, 3$$

pour $\xi \in V, u, P, \overline{P} \in (-\infty, \infty)$ de sorte que $a_k g_{ij}(x, z) \overset{\mathrm{df}}{=} g_{ijk}(x, z) \in G'(0, a_j)$ $k \neq j$, $k \neq i$, $k = 1, 2, 3$, $i, j = 1, 2, 3$,

3° *les fonctions jouissent de la propriété* (B), *à savoir:*

(B) *la solution $\zeta(x_j) = \zeta(x_j, a, \gamma)$, $a > 0$, $\gamma > 0$ de l'équation*

$$\zeta(x_j) = \gamma(x_j + 1) + \int_0^{x_j} g^*_{ijk}\big(s, \zeta(s - a)\big)\,ds \qquad \text{pour} \qquad x_j \in \langle 0, a_j\rangle$$

égale à γ pour $x_j \leqslant 0$ satisfait à la condition $\lim_{\gamma\to 0}\zeta(x_j, a, \gamma) = 0$, la convergence par rapport à x_j et a étant uniforme,

convergence par rapport à x_j et a etant uniforme, le problème (A) *relatif à l'équation*

$$(40)\qquad s(\xi) = f(\xi, u, P)$$

possède au moins une solution.

Démonstration. Nous démontrerons le théorème seulement dans le cas où j admet dans l'inégalité (39) successivement les valeurs 2, 1, 2, c'est-à-dire lorsque cette inégalité s'écrit sous la forme

$$(41)\quad \begin{aligned} |f(\xi, u, P) - f(\xi, u, \overline{P})| &\leqslant g_{12}(x_2, |p_1 - \overline{p}_1|) + \\ &\quad + g_{21}(x_1, |p_2 - \overline{p}_2|) + g_{32}(x_2, |p_3 - \overline{p}_3|)\,. \end{aligned}$$

Le problème (A) relatif à l'équation (40) est équivalent au système d'équations intégrales de la forme

$$(42)\quad \begin{aligned} &u(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s_1, s_2, s_3, u(s_1, s_2, s_3), p_1(s_1, s_2, s_3), p_2(s_1, s_2, s_3), p_3(s_1, s_2, s_3)\big)\,ds_1 ds_2 ds_3\,, \\ &p_1(x_1, x_2, x_3) = \psi'_{x_1}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(x_1, s_2, s_3, u(x_1, s_2, s_3), p_1(x_1, s_2, s_3), p_2(x_1, s_2, s_3), p_3(x_1, s_2, s_3)\big)\,ds_2 ds_3\,, \\ &p_2(x_1, x_2, x_3) = \psi'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \int_0^{x_1}\int_0^{x_3} f\big(s_1, x_2, s_3, u(s_1, x_2, s_3), p_1(s_1, x_2, s_3), p_2(s_1, x_2, s_3), p_3(s_1, x_2, s_3)\big)\,ds_1 ds_3\,, \\ &p_3(x_1, x_2, x_3) = \psi'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f\big(s_1, s_2, x_3, u(s_1, s_2, x_3), p_1(s_1, s_2, x_3), p_2(s_1, s_2, x_3), p_3(s_1, s_2, x_3)\big)\,ds_1 ds_2\,. \end{aligned}$$

Afin de démontrer l'existence d'une solution du système (42), on définit pour chaque $a > 0$ les fonctions $u_a, p_{1a}, p_{2a}, p_{3a}$ en posant

$$(43)\quad \begin{aligned} u_a(x_1, x_2, x_3) &= \psi(0, x_2, x_3) &&\text{pour} \quad x_1 \leqslant 0\,,\ (x_2, x_3) \in \Pi_{23}\,, \\ p_{1a}(x_1, x_2, x_3) &= \psi'_{x_1}(x_1, 0, x_3) &&\text{pour} \quad x_2 \leqslant 0\,,\ (x_1, x_3) \in \Pi_{13}\,, \\ p_{2a}(x_1, x_2, x_3) &= \psi'_{x_2}(0, x_2, x_3) &&\text{pour} \quad x_1 \leqslant 0\,,\ (x_2, x_3) \in \Pi_{23}\,, \\ p_{3a}(x_1, x_2, x_3) &= \psi'_{x_3}(x_1, 0, x_3) &&\text{pour} \quad x_2 \leqslant 0\,,\ (x_1, x_3) \in \Pi_{13} \end{aligned}$$

ainsi que

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s_1, s_2, s_3)\, u_\alpha(s_1-\alpha, s_2, s_3),$$
$$p_{1\alpha}(s_1, s_2-\alpha, s_3),\, p_{2\alpha}(s_1-\alpha, s_2, s_3),\, p_{3\alpha}(s_1, s_2-\alpha, s_3)\big)\, ds_1 ds_2 ds_3\,, \tag{44}$$

$$p_{1\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \psi'_{x_1}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(x_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1-\alpha, s_2, s_3),$$
$$p_{1\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3),\, p_{2\alpha}(x_1-\alpha, s_2, s_3),\, p_{3\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)\big)\, ds_2 ds_3\,,$$

$$p_{2\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \psi'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_3} f\big(s_1, x_2, s_3, u_\alpha(s_1-\alpha, x_2, s_3),$$
$$p_{1\alpha}(s_1, x_2-\alpha, s_3),\, p_{2\alpha}(s_1-\alpha, x_2, s_3),\, p_{3\alpha}(s_1, x_2-\alpha, s_3)\big)\, ds_1 ds_3\,,$$

$$p_{3\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \psi'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f\big(s_1, s_2, x_3, u_\alpha(s_1-\alpha, s_2, x_3),$$
$$p_{1\alpha}(s_1, s_2-\alpha, x_3),\, p_{2\alpha}(s_1-\alpha, s_2, x_3),\, p_{3\alpha}(s_1, s_2-\alpha, x_3)\big)\, ds_1 ds_2$$

pour $(x_1, x_2, x_3) \in V$.

Les relations (43), (44) et le fait que la fonction $f(\xi, u, P)$ est bornée impliquent que les fonctions $u_\alpha(\xi)$, $p_{i\alpha}(\xi)$, $i = 1, 2, 3$, sont pour chaque $\alpha > 0$ bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que

$$|u_\alpha(\xi)| < K\,, \quad |p_{i\alpha}(\xi)| < K\,, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{pour} \quad \xi \in V\,.$$

Ensuite, on établira que les fonctions $u_\alpha(\xi)$, $p_{i\alpha}(\xi)$, $i = 1, 2, 3$, sont équicontinues. Remarquons d'abord qu'il existe une fonction continue $m(t)$, non décroissante pour $t > 0$, paire, $m(0) = 0$ et telle que

$$|\psi(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - \psi(x_1, x_2, x_3)| < \sum_{i=1}^{3} m(h_i)\,,$$
$$|\psi'_{x_j}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - \psi'_{x_j}(x_1, x_2, x_3)| < \sum_{i=1}^{3} m(h_i)\,, \quad j = 1, 2, 3\,, \tag{45}$$

$$|f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3, u+k, p_1+l_1, p_2+l_2, p_3+l_3) -$$
$$- f(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3)| < m(k) + \sum_{i=1}^{3} [m(h_i) + m(l_i)] \tag{46}$$

pour $\{x_i\}, \{x_i + h_i\}_{i=1,2,3} \in V$, $u, u+k \in (-K, K)$; $\{p_i\}, \{p_i + l_i\}_{i=1,2,3} \in (-K, K)$. La fonction $f(\xi, u, P)$ étant bornée, il résulte de (43), (44) en posant $M = \sup|f|$ que

$$|u_\alpha(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - u_\alpha(x_1, x_2, x_3)|$$
$$\leqslant M(|h_1|a_2a_3 + |h_2|a_1a_3 + |h_3|a_1a_2) + \sum_{i=1}^{3} m(h_i)$$
$$\text{pour } x_1, x_1+h_1 \leqslant a_1;\ (x_2, x_3), (x_2+h_2, x_3+h_3) \in \Pi_{23}\,,$$
$$|p_{1\alpha}(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - p_{1\alpha}(x_1, x_2, x_3)|$$
$$\leqslant M(|h_2|a_3 + |h_3|a_2) + m(h_2) + m(h_3)$$
$$\text{pour } x_2, x_2+h_2 \leqslant a_2;\ (x_1, x_3), (x_1, x_3+h_3) \in \Pi_{13}\,, \tag{47}$$
$$|p_{2\alpha}(x_1+h_1, x_2, x_3+h_3) - p_{2\alpha}(x_1, x_2, x_3)|$$
$$\leqslant M(|h_1|a_3 + |h_3|a_1) + m(h_1) + m(h_3)$$
$$\text{pour } x_1, x_1+h_1 \leqslant a_1,\ (x_2, x_3), (x_2, x_3+h_3) \in \Pi_{23}\,,$$
$$|p_{3\alpha}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3) - p_{3\alpha}(x_1, x_2, x_3)|$$
$$\leqslant M(|h_1|a_2 + |h_2|a_1) + m(h_1) + m(h_2)$$
$$\text{pour } x_2, x_2+h_2 \leqslant a_2,\ (x_1, x_3), (x_1+h_1, x_3) \in \Pi_{13}\,.$$

On voit bien, d'après l'inégalité (47), que les fonctions $u_\alpha(\xi)$ sont equicontinues pour $\alpha > 0$.

Afin de démontrer que les fonctions de la famille $\{p_{1\alpha}(\xi)\}_{\alpha>0}$ sont équicontinues, il suffit, d'après l'inégalité (47) et l'inégalité

$$|p_{1\alpha}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - p_{1\alpha}(x_1, x_2, x_3)|$$
$$\leqslant |p_{1\alpha}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - p_{1\alpha}(x_1+h_1, x_2, x_3)| +$$
$$+ |p_{1\alpha}(x_1+h_1, x_2, x_3) - p_{1\alpha}(x_1, x_2, x_3)|$$

de prouver que l'expression

$$W_\alpha(x_1, x_2, x_3, h_1) = |p_{1\alpha}(x_1+h_1, x_2, x_3) - p_{1\alpha}(x_1, x_2, x_3)| \tag{48}$$

tend vers zéro lorsque $h_1 \to 0$, la convergence étant uniforme par rapport à α, x_1, x_2, x_3; $x_2 \leqslant a_2$, $(x_1, x_3), (x_1+h_1, x_3) \in \Pi_{13}$. En vertu des relations (44), on trouve

$$W_\alpha(x_1, x_2, x_3) \leqslant |\psi'_{x_1}(x_1+h_1, x_2, x_3) - \psi'_{x_1}(x_1, x_2, x_3)| \tag{49}$$
$$+ \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \big|f\big(x_1+h_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1+h_1-\alpha, s_2, s_3),$$
$$p_{1\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3),\, p_{2\alpha}(x_1+h_1-\alpha, s_2, s_3),\, p_{3\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3)\big) -$$
$$- f\big((x_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1-\alpha, s_2, s_3),$$
$$p_{1\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3),\, p_{2\alpha}(x_1-\alpha, s_2, s_3),\, p_{3\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)\big)\big|\, ds_2 ds_3\,.$$

En désignant par $T(x_1, s_2, s_3, h_1, \alpha)$ l'expression sous le signe intégral de la formule (49) et en utilisant la relation (45), on a

$$W_\alpha(x_1, x_2, x_3, h_1) \leqslant m(h_1) + \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} T(x_1, s_2, s_3, h_1, \alpha)\, ds_2 ds_3 \tag{50}$$

pour $(x_1, x_2, x_3), (x_1+h_1, x_2, x_3) \in V$ et

$$W_\alpha(x_1, x_2, x_3, h_1) = |\psi'_{x_1}(x_1+h_1, 0, x_3) - \psi'_{x_1}(x_1, 0, x_3)| \leqslant m(h_1) \tag{51}$$

pour $x_2 \leqslant 0$, $(x_1, x_3), (x_1+h_1, x_3) \in \Pi_{13}$. Quant à l'expression $T(x_1, s_2, s_3, h_1, \alpha)$, on a la limitation

$$\begin{aligned}
T(x_1, s_2, s_3, h_1, \alpha) \leqslant \big|f\big(&x_1+h_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1+h_1-\alpha, s_2, s_3),\\
&p_{1\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3), p_{2\alpha}(x_1+h_1-\alpha, s_2, s_3), p_{3\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3)\big) -\\
&-f\big(x_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1-\alpha, s_2, s_3),\\
&\qquad p_{1\alpha}(x_1+h_1, s_2, s_3), p_{2\alpha}(x_1-\alpha, s_2, s_3), p_{3\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)\big)\big| +\\
&+\big|f\big(x_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1-\alpha, s_2, s_3),\\
&\qquad p_{1\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3), p_{2\alpha}(x_1-\alpha, s_2, s_3), p_{3\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)\big) -\\
&-f\big(x_1, s_2, s_3, u_\alpha(x_1-\alpha, s_2, s_3),\\
&\qquad p_{1\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3), p_{2\alpha}(x_1-\alpha, s_2, s_3), p_{3\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)\big)\big| .
\end{aligned}$$

En tenant compte de (41) et (46), il vient

$$\begin{aligned}
T(x_1, s_2, s_3, h_1, \alpha) \leqslant m(h_1) + &\\
&+ m[u_\alpha(x_1+h_1-\alpha, s_2, s_3) - u_\alpha(x_1-\alpha, s_2, s_3)] +\\
&+ m[p_{2\alpha}(x_1+h_1-\alpha, s_2, s_3) - p_{2\alpha}(x_1-\alpha, s_2, s_3)] +\\
&+ m[p_{3\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3) - p_{3\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)] +\\
&\qquad + g_{12}\big(s_2, |p_{1\alpha}(x_1+h_1, s_2-\alpha, s_3) - p_{1\alpha}(x_1, s_2-\alpha, s_3)|\big) .
\end{aligned}$$

D'après (47) et (48) on a ensuite

$$\begin{aligned}
&T(x_1, s_2, s_3, h_1, \alpha) \leqslant m(h_1) + m[M|h_1|a_2a_3 + m(h_1)] +\\
&+ m[M|h_1|a_3 + m(h_1)] + m[M|h_1|a_2 + m(h_1)] + g_{12}\big(s_2, W_\alpha(x_1, s_2-\alpha, s_3)\big) .
\end{aligned}$$

Ainsi l'expression W_α satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned}
W_\alpha(x_1, x_2, x_3, h_1) \leqslant m(h_1) + d(h_1)x_2x_3 &+\\
&+ \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} g_{12}\big(s_2, W_\alpha(x_1, s_2-\alpha, s_3, h_1)\big)\, ds_2 ds_3 ,
\end{aligned} \tag{52}$$

où

$$\begin{aligned}
d(h_1) = m(h_1) + m[M|h_1|a_2a_3 + m(h_1)] &+\\
&+ m[M|h_1|a_3 + m(h_1)] + m[M|h_1|a_2 + m(h_1)] .
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\eta(x_2) &= \eta(x_2, \alpha, \delta)\\
&= \sup\{W_\alpha(x_1, x_2, x_3, h_1) | (x_1, x_3), (x_1+h_1, x_3) \in \Pi_{13}, |h_1| < \delta\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad x_2 \leqslant a_2 .
\end{aligned}$$

De l'inégalité (52) on tire

$$\eta(x_2) \leqslant m(\delta) + d(\delta)a_3x_3 + \int_0^{x_2} a_3 g_{12}\big(s_2, \eta(s_2-\alpha)\big)\, ds_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant a_2 \tag{53}$$

tandis qu'on déduit de la définition de la fonction $\eta(x_2)$ et de la formule (51) que

$$\eta(x_2) \leqslant m(h_1) \quad \text{pour} \quad x_2 \leqslant 0 .$$

Admettons maintenant que $\zeta(x_2) = \zeta(x_2, \alpha, \gamma)$ soit une solution de l'équation

$$\zeta(x_2) = \gamma(1+x_2) + \int_0^{x_2} a_3 g_{12}\big(s_2, \zeta(s_2-\alpha)\big)\, ds_2 \tag{54}$$

qui satisfasse à la condition

$$\zeta(x_2, \alpha, \gamma) = \gamma \quad \text{pour} \quad x_2 \leqslant 0 .$$

Cependant on déduit de l'hypothèse 3° que

$$\lim_{\gamma\to 0} \zeta(x_2, \alpha, \gamma) = 0 \tag{55}$$

et que la convergence est uniforme par rapport à x_2 et α. Remarquons que si $m(\delta) < \gamma$ et $a_3 d(\delta) < \gamma$, on a

$$\eta(x_2, \alpha, \delta) < \zeta(x_2, \alpha, \gamma) \quad \text{pour} \quad x_2 \leqslant a_2 . \tag{56}$$

En effet, cette inégalité est vérifiée pour $x_2 \leqslant \alpha$. Supposons qu'il existe un nombre $\beta \in (0, a_2)$ tel que pour $x_2 < \beta$ on ait

$$\eta(x_2, \alpha, \delta) < \zeta(x_2, \alpha, \gamma) \quad \text{et} \quad \eta(\beta, \alpha, \delta) = \zeta(\beta, \alpha, \gamma) .$$

On déduirait alors de (53)

$$\begin{aligned}
\eta(\beta) \leqslant m(\delta) + a_3 d(\delta)\beta + \int_0^{\beta} a_3 g_{12}\big(s_2, \eta(s_2-\alpha)\big)\, ds_2 &\\
< \gamma(1+\beta) + \int_0^{\beta} a_3 g_{12}\big(s_2, \zeta(s_2-\alpha)\big)\, ds_2 &= \zeta(\beta)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\eta(\beta) < \zeta(\beta)$, contrairement à l'hypothèse. L'inégalité (56) est donc établie.

Or, il résulte des relations (55) et (56) que si $\delta \to 0$, $\eta(x_2, \alpha, \delta)$, et par suite $W_\alpha(x_1, x_2, x_3, h_1)$, convergent uniformément vers zéro par rapport à α, x_1, x_2, x_3. Nous avons donc démontré que les fonctions de la famille $\{p_{1\alpha}(\xi)\}_{\alpha>0}$ sont équicontinues.

En reprenant des raisonnements tout pareils aux précédents, on prouve que les fonctions appartenant aux familles $\{p_{2\alpha}(\xi)\}$, $\{p_{3\alpha}(\xi)\}_{\alpha>0}$ sont équicontinues.

Il existe donc, en vertu du théorème de Arzelà, des suites uniformément convergentes $\{u_{\alpha_n}(\xi)\}$, $\{p_{i\alpha_n}(\xi)\}$, $i = 1, 2, 3$, telles que $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. D'après les formules (44) les limites de ces suites satisfont au système (42) et, par cela même, la limite de la suite $\{u_{\alpha_n}(\xi)\}$ est une solution du problème (A).

La démonstration du théorème 8 dans les sept cas qui restent est tout à fait analogue; on construit pour chaque cas des familles de fonctions convenables $u_\alpha, p_{i\alpha}$, $i = 1, 2, 3$.

Nous nous occuperons maintenant du problème d'existence d'une solution du problème (A) relatif aux équations de la forme $s(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, u, p_i, q_{jk})$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$.

Nous établirons d'abord le théorème suivant.

THÉORÈME 9. *Si*

1° *les fonctions* $f(x_1, x_2, x_3, u, p_i, q_{jk})$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ *sont continues et bornées dans le domaine* $\{x_i\} \in V$; $u, p_i, q_{jk} \in (-\infty, \infty)$,

2° *elles vérifient au moins une des conditions*

$$(57)\qquad |f(x_1, x_2, x_3, u, p_i, q_{jk}) - f(x_1, x_2, x_3, u, \bar{p}_i, \bar{q}_{jk})| \leqslant g_{1l}(x_l, |p_i - \bar{p}_i|) + g_{2i}(x_i, |q_{jk} - \bar{q}_{jk}|)$$

pour $l = j, k$, $\{x_i\} \in V$; $p_i, \bar{p}_i, q_{jk}, \bar{q}_{jk} \in (-\infty, \infty)$ *et*

$$a_r g_{1l}(x, z) \overset{\mathrm{df}}{=} g^*_{1lr}(x, z) \in G'(0, a_l), \qquad r = j, k, \qquad r \neq l$$

où $g_{2i}(x, z) \in G'(0, a_i)$,

3° *les fonctions* $g^*_{1lr}(x, z)$, $g_{2i}(x, z)$ *jouissent de la propriété* (B) (*voir le th.* 8), *le problème* (A) *relatif aux équations*

$$(58)\qquad s(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, u, p_i, q_{jk})$$

admet au moins une solution de chaque équation.

Démonstration. La démonstration ne sera donnée que dans le cas où $i = 3$, $j = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $r = 1$, c'est-à-dire pour l'équation

$$(59)\qquad s(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, u, p_3, q_{12}).$$

La condition (57) prend ici la forme

$$(60)\qquad |f(x_1, x_2, x_3, u, p_3, q_{12}) - f(x_1, x_2, x_3, u, \bar{p}_3, \bar{q}_{12})| \leqslant \leqslant g_{12}(x_2, |p_3 - \bar{p}_3|) + g_{23}(x_3, |q_{12} - \bar{q}_{12}|)$$

et le problème (A) relatif à l'équation (59) est équivalent au système d'équations intégrales

$$(61)\qquad \begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= \psi(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s_1, s_2, s_3, u(s_1, s_2, s_3), \\ &\qquad p_3(s_1, s_2, s_3), q_{12}(s_1, s_2, s_3)\big)\, ds_1 ds_2 ds_3, \\ p_3(x_1, x_2, x_3) &= \psi'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f\big(s_1, s_2, x_3, u(s_1, s_2, x_3), \\ &\qquad p_3(s_1, s_2, x_3), q_{12}(s_1, s_2, x_3)\big)\, ds_1 ds_2, \\ q_{12}(x_1, x_2, x_3) &= \psi''_{x_1x_2}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_3} f\big(x_1, x_2, s_3, u(x_1, x_2, s_3), \\ &\qquad p_3(x_1, x_2, s_3), q_{12}(x_1, x_2, s_3)\big)\, ds_3. \end{aligned}$$

Pour prouver l'existence d'une solution du système (61), on définit pour chaque $\alpha > 0$ les fonctions $u_\alpha, p_{3\alpha}, q_{12\alpha}$, en posant

$$(62)\qquad \begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \psi(0, x_2, x_3) &&\text{pour}\quad x_1 \leqslant 0, &&(x_2, x_3) \in \Pi_{23}, \\ p_{3\alpha}(x_1, x_2, x_3) &= \psi'_{x_3}(x_1, 0, x_3) &&\text{pour}\quad x_2 \leqslant 0, &&(x_1, x_3) \in \Pi_{13}, \\ q_{12\alpha}(x_1, x_2, x_3) &= \psi''_{x_1x_2}(x_1, x_2, 0) &&\text{pour}\quad x_3 \leqslant 0, &&(x_1, x_2) \in \Pi_{12} \end{aligned}$$

et

$$(63)\qquad \begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \psi(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} f\big(s_1, s_2, s_3, u_\alpha(s_1 - \alpha, s_2, s_3), \\ &\qquad p_{3\alpha}(s_1, s_2 - \alpha, s_3), q_{12\alpha}(s_1, s_2, s_3 - \alpha)\big)\, ds_1 ds_2 ds_3, \\ p_{3\alpha}(x_1, x_2, x_3) &= \psi'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f\big(s_1, s_2, x_3, u_\alpha(s_1 - \alpha, s_2, x_3), \\ &\qquad p_{3\alpha}(s_1, s_2 - \alpha, x_3), q_{12\alpha}(s_1, s_2, x_3 - \alpha)\big)\, ds_1 ds_2, \\ q_{12\alpha}(x_1, x_2, x_3) &= \psi''_{x_1x_2}(x_1, x_2, x_3) + \int_0^{x_3} f\big(x_1, x_2, s_3, u_\alpha(x_1 - \alpha, x_2, s_3), \\ &\qquad p_{3\alpha}(x_1, x_2 - \alpha, s_3), q_{12}(x_1, x_2, s_3 - \alpha)\big)\, ds_3 \end{aligned}$$

pour $(x_1, x_2, x_3) \in V$.

Il existe ici, de même que dans le cas du théorème précédent, une constante K telle que

$$|u_\alpha(\xi)| < K, \quad |p_{3\alpha}(\xi)| < K, \quad |q_{12\alpha}(\xi)| < K$$

pour $\xi \in V$, $\alpha > 0$.

Il existe aussi une fonction continue $m(t)$ non décroissante pour $t > 0$, paire, $m(0) = 0$ et vérifiant les relations (45) pour $j = 3$ ainsi que

$$(64)\qquad |\psi''_{x_1x_2}(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) - \psi''_{x_1x_2}(x_1, x_2, x_3)| < \sum_{i=1}^{3} m(h_i),$$

$$(65)\qquad |f(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3+h_3,\, u+k,\, p_3+l_1,\, q_{12}+l_2)-$$
$$-f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, u,\, p_3,\, q_{12})| < m(k)+\sum_{i=1}^{3} m(h_i)+\sum_{i=0}^{2} m(l_i)$$

pour $\{x_i\},\ \{x_i+h_i\}_{i=1,2,3}\in V,\quad u,\, u+k,\, p_3,\, p_3+l_1,\, q_{12},\, q_{12}+l_2\in(-K,\, K)$. Si l'on pose $M=\sup|f|$, de (62) et (63) il vient

$$|u_a(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3+h_3)-u_a(x_1,\, x_2,\, x_3)|$$
$$\leqslant M(|h_1|a_2a_3+|h_2|a_1a_3+|h_3|a_1a_2)+\sum_{i=1}^{3} m(h_i)$$

pour $x_1,\, x_1+h_1<a_1,\ (x_2,\, x_3),\ (x_2+h_2,\, x_3+h_3)\in\Pi_{23}$

$$(66)\qquad |p_{3a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3)-p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|$$
$$\leqslant M(|h_1|a_2+|h_2|a_1)+\sum_{i=1}^{2} m(h_i)$$

pour $x_2,\, x_2+h_2<a_2,\ (x_1,\, x_3),\ (x_1+h_1,\, x_3)\in\Pi_{13}$

$$|q_{12a}(x_1,\, x_2,\, x_3+h_3)-q_{12a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|\leqslant M|h_3|+m(h_3)$$

pour $x_3,\, x_3+h_3<a_3,\ (x_1,\, x_2)\in\Pi_{12}$. On déduit de la première inégalité de (66) que les fonctions $u_a(\xi)$ sont équicontinues pour $a>0$. Il ne reste donc qu'à prouver que les fonctions appartenant aux familles $\{p_{3a}(\xi)\}$ et $\{q_{12a}(\xi)\}_{a>0}$ sont aussi équicontinues pour $a>0$.

Afin de le prouver pour les fonctions $p_{3a}(\xi)$, $a>0$, équicontinues, il suffit de démontrer, compte tenu de (66) et de l'inégalité

$$|p_{3a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3+h_3)-p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|\leqslant|p_{3a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3+h_3)-$$
$$-p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3+h_3)|+|p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3+h_3)-p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|$$

que l'expression

$$(67)\qquad W_{1a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_3)=|p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3+h_3)-p_{3a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|$$

tend uniformément vers zéro par rapport à $a,\, x_1,\, x_2,\, x_3$ lorsque $h_3\to0$ pour $x_2\leqslant a_2,\ (x_1,\, x_3),\ (x_1,\, x_3+h_3)\in\Pi_{12}$. Mais, en se basant sur les formules (63), (45), on trouve

$$W_{1a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_3)\leqslant$$
$$\leqslant m(h_3)+\int_0^{x_1}\!\!\int_0^{x_2}\big|f\big(s_1,\, s_2,\, x_3+h_3,\, u_a(s_1-a,\, s_2,\, x_3+h_3),\, p_{3a}(s_1,\, s_2-a,\, x_3+h_3),$$
$$q_{12a}(s_1,\, s_2,\, x_3+h_3-a)\big)-f\big(s_1,\, s_2,\, x_3,\, u_a(s_1-a,\, s_2,\, x_3),\, p_{3a}(s_1,\, s_2-a,\, x_3),$$
$$q_{12a}(s_1,\, s_2,\, x_3-a)\big)\big|\, ds_1ds_2\, .$$

Si maintenant on désigne par $T_1(s_1,\, s_2,\, x_3,\, h_3,\, a)$ l'expression sous le signe intégral, on a

$$W_{1a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_3)\leqslant m(h_3)+\int_0^{x_1}\!\!\int_0^{x_2} T_1(s_1,\, s_2,\, x_3,\, h_3,\, a)\, ds_1ds_2$$

pour $(x_1,\, x_2,\, x_3),\ (x_1,\, x_2,\, x_3+h_3)\in V$,

$$(68)\qquad W_{1a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_3)=|\psi'_{x_3}(x_1,\, 0,\, x_3+h_3)-\psi'_{x_3}(x_2,\, 0,\, x_3)|\leqslant m(h_3)$$

pour $x_2\leqslant0,\ (x_1,\, x_3),\ (x_1,\, x_3+h_3)\in\Pi_{13}$.

En procédant ensuite comme dans la démonstration du théorème 8 et en appliquant successivement les formules (65), (60) et (66), on est conduit à l'inégalité

$$(69)\qquad W_{1a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_3)\leqslant m(h_3)+d_1(h_3)x_1x_2+$$
$$+\int_0^{x_1}\!\!\int_0^{x_2} g_{12}\big(s_2,\, W_{1a}(s_1,\, s_2-a,\, x_3,\, h_3)\big)\, ds_1ds_2$$

où

$$d_1(h_3)=m(h_3)+m[M|h_3|a_1a_2+m(h_3)]+m[M|h_3|+m(h_3)]\, .$$

Par un raisonnement tout pareil à celui qui se rapportait à l'expression $W_a(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_1)$ on prouve, en utilisant les hypothèses faites sur la fonction g_{12}, que l'expression $W_{1a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_3)$ tend uniformément vers zéro par rapport à $a,\, x_1,\, x_2,\, x_3$ lorsque $h_3\to0$ et par cela même les fonctions de la famille $\{p_{3a}(\xi)\}_{a>0}$ sont équicontinues.

La démonstration du fait que les fonctions de la famille $\{q_{12a}(\xi)\}_{a>0}$ sont équicontinues est tout pareille.

En effet, étant donné (66) ainsi que l'inégalité

$$|q_{12a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3+h_3)-q_{12a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|\leqslant|q_{12a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3+h_3)-$$
$$-q_{12a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3)|+|q_{12a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3)-q_{12a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|$$

il ne reste qu'à établir que l'expression

$$(70)\qquad W_{2a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_1,\, h_2)=|q_{12a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, x_3)-q_{12a}(x_1,\, x_2,\, x_3)|$$

tend uniformément vers zéro par rapport à $a,\, x_1,\, x_2,\, x_3$ pour $x_3\leqslant a_3$, $(x_1,\, x_2),\ (x_1+h_1,\, x_2+h_2)\in\Pi_{12}$ lorsque $|h_1|+|h_2|\to0$. On déduit de (63) et (64)

$$(71)\qquad W_{2a}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, h_1,\, h_2)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{2} m(h_i)+\int_0^{x_3}\big|f\big(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, s_3,\, u_a(x_1-a+h_1,\, x_2+h_2,\, s_3),$$
$$p_{3a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2-a,\, s_3),\, q_{12a}(x_1+h_1,\, x_2+h_2,\, s_3-a)\big)-$$
$$-f\big(x_1,\, x_2,\, s_3,\, u_a(x_1-a,\, x_2,\, s_3),\, p_{3a}(x_1,\, x_2-a,\, s_3),\, q_{12a}(x_1,\, x_2,\, s_3-a)\big)\big|\, ds_3\, .$$

L'expression sous le signe d'intégration, désignée par $T_2(x_1, x_2, s_3, h_1, h_2, a)$ admet la limitation

$$\begin{aligned}T_2(x_1, x_2, s_3, h_1, h_2, a) \leqslant \\ \leqslant \big|f\big(x_1+h_1, x_2+h_2, s_3, u_a(x_1-a+h_1, x_2+h_2, s_3), p_{3a}(x_1+h_1, x_2+h_2-a, s_3), \\ q_{12a}(x_1+h_1, x_2+h_2, s_3-a)\big)- \\ -f\big(x_1, x_2, s_3, u_a(x_1-a, x_2, s_3), p_{3a}(x_1, x_2-a, s_3), q_{12a}(x_1+h_1, x_2+h_2, s_3-a)\big)\big|+ \\ +\big|f\big(x_1, x_2, s_3, u_a(x_1-a, x_2, s_3), p_{3a}(x_1, x_2-a, s_3), q_{12a}(x_1+h_1, x_2+h_2, s_3-a)\big)- \\ -f\big(x_1, x_2, s_3, u_a(x_1-a, x_2, s_3), p_{3a}(x_1, x_2-a, s_3), q_{12a}(x_1, x_2, s_3-a)\big)\big|.\end{aligned}$$

En vertu des formules (65), (66) et (60), il vient

$$(72)\quad T_2(x_1, x_2, s_3, h_1, h_2, a) \leqslant d_2(h_1, h_2)+q_{23}\big(s_3, W_{2a}(x_1, x_2, s_3-a, h_1, h_2)\big)$$

où

$$d_2(h_1, h_2) = \sum_{i=1}^{2} m(h_i)+m[M(|h_1|a_2a_3+|h_2|a_1a_3)+\sum_{i=1}^{2} m(h_i)]+ \\ +m[M(|h_1|a_2+|h_2|a_1)+\sum_{i=1}^{2} m(h_i)].$$

Mais les relations (70), (71), (72) donnent

$$(73)\quad W_{2a}(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2) \leqslant \sum_{i=1}^{2} m(h_i)+d_2(h_1, h_2)x_3+ \\ +\int_0^{x_3} g_{23}\big(s_3, W_{2a}(x_1, x_2, s_3-a, h_1, h_2)\big)ds_3$$

pour (x_1, x_2, x_3), $(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) \in V$ ainsi que

$$W_{2a}(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2) \leqslant \sum_{i=1}^{2} m(h_i) \quad \text{pour} \quad x_3 \leqslant 0, \\ (x_1, x_2), \quad (x_1+h_1, x_2+h_2) \in \Pi_{12}.$$

Si l'on pose

$$\eta_2(x_3) = \eta_2(x_3, a, \delta) = \sup\{W_{2a}(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2)|, \\ (x_1, x_2), (x_1+h_1, x_2+h_2) \in \Pi_{12}, |h_1|+|h_2| < \delta\} \quad \text{pour} \quad x_3 \leqslant a_3$$

on trouve

$$\eta_2(x_3) \leqslant 2m(\delta)+d_2(\delta, \delta)x_3+\int_0^{x_3} g_{23}\big(s_3, \eta(s_3-a)\big)ds_3 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant a_3$$

et

$$\eta_2(x_3) \leqslant \sum_{i=1}^{2} m(h_i) \quad \text{pour} \quad x_3 \leqslant 0.$$

En poursuivant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 8, on constate que l'expression $W_{2a}(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2)$ converge uniformément vers zéro par rapport à a, x_1, x_2, x_3 lorsque $|h_1|+|h_2| \to 0$, ce qui prouve que les fonctions de la famille $\{q_{12a}(\xi)\}_{a>0}$ sont équicontinues.

De ce qui précède, ainsi que du théorème de Arzelà on conclut qu'il existe des suites uniformément convergents $\{u_{a_n}(\xi)\}$, $\{p_{3a_n}(\xi)\}$, $\{q_{12a_n}(\xi)\}$ telles que $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Or, il résulte des relations (63) que les limites de ces suites satisfont au système (61) et la limite de la suite $\{u_{a_n}(\xi)\}$ est une solution du problème (A).

Ainsi la démonstration du théorème 9 est terminée pour le cas considéré; dans les autres cas elle se poursuit d'une manière analogue.

Il est à remarquer que la condition (B) des théorèmes 8 et 9 peut être remplacée par la suivante:

(B_1) la fonction $g(x, z) \in G'(0, a)$ jouit de la propriété: pour tout $\gamma > 0$ il existe une fonction $\vartheta(x) = \vartheta(x, \gamma)$ satisfaisant à l'équation

$$\vartheta(x) = \gamma(1+x)+\int_0^x g\big(t, \vartheta(t)\big)dt \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

et telle que $\lim_{\gamma\to 0}\vartheta(x, \gamma) = 0$, la convergence étant uniforme par rapport à $x \in \langle 0, a\rangle$.

On voit bien que la condition (B_1) entraîne la condition (B).

Pour le constater il suffit de montrer que l'inégalité

$$(74)\qquad \zeta(x, a, \gamma) < \vartheta(x, \bar\gamma)$$

a lieu pour $x \in \langle 0, a\rangle$, $\gamma < \bar\gamma$. En effet, il résulte de la définition de $\xi(x, a, \gamma)$ que l'inégalité (74) est vérifiée pour $0 \leqslant x < a$. Supposons qu'il existe un nombre $\beta \in (0, a)$ tel que pour $0 \leqslant x < \beta$ l'inégalité (74) soit vérifiée, tandis que pour β on ait

$$\zeta(\beta, a, \gamma) = \vartheta(\beta, \bar\gamma).$$

On aurait alors

$$\zeta(\beta, a, \gamma) = \gamma(1+\beta)+\int_0^\beta g\big(s, \zeta(s-a)\big)ds \\ < \bar\gamma(1+\beta)+\int_0^\beta g\big(s, \vartheta(s, \bar\gamma)\big)ds = \vartheta(\beta, \bar\gamma),$$

c'est-à-dire

$$\zeta(\beta, a, \gamma) < \vartheta(\beta, \bar\gamma).$$

La contradiction qui en résulterait prouve la validité de la formule (74).

Les problèmes relatifs à l'existence et l'unicité des solutions du problème (A) dans d'autres cas qui n'ont pas été traités ici, ainsi que les problèmes relatifs à l'équation (1) d'un ordre supérieur au troisième, feront l'objet d'un nouveau mémoire.

Travaux cités

[1] W. Walter, *Über die Differentialgleichung* $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$, Mathematische Zeitschrift 71 (1959), p. 308-324.

[2] — *Über die Differentialgleichung* $u_{xy} = f(x, y, u_x, u_y)$, Mathematische Zeitschrift 71 (1959), p. 436-453.

[3] Z. Szmydt, *Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Annales Polonici Mathematici 4 (1957), p. 40-60.

[4] A. Bielecki et J. Kisyński, *Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 10 (1956).

[5] J. Kisyński, *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation* $s = F(x, y, z, p, q)$. Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 11 (1957).

[6] A. Alexiewicz and W. Orlicz, *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, Studia Mathematica 15 (1956), p. 201-215.

[7] R. Conti, *Sul problema di Darboux per l'equazione* $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$, Ann. Univ. Ferrara (Nuova ser.) Ser. 7, Sc. Mat. 2 (1953), p. 129-140.

[8] L. Tonelli, *Sulle equazioni integrali di Volterra*, Mem. Accad. delle Sci. Bologna, Cl. Sci. Fis., Ser. 8, 5 (1927/28), p. 59-64.

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1960