ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

Über Erhaltungssätze die aus Euler-Lagrangeschen Gleichungen folgen

von C. Jankiewicz (Wrocław)

1. Einführung. E. Noether hat gezeigt [1], daß: a. aus der Kovarianz der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezüglich einer ϱ-parametrigen Lieschen Koordinatentransformationsgruppe ϱ Erhaltungssätze folgen; b. aus der Kovarianz dieser Gleichungen bezüglich der allgemeinen stetigen Koordinatentransformationsgruppe folgen n Identitäten zwischen den Euler-Lagrangeschen Gleichungen, wobei n die Zahl der Koordinaten bezeichnet. In den Arbeiten [1, 2, 3, 4, 5] hat man überdies gezeigt: c. aus der Kovarianz der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezüglich der allgemeinen stetigen Koordinatentransformationsgruppe folgt, daß einer jeden σ-parametrigen Lieschen Gruppe σ Erhaltungssätze entsprechen. Wir werden sie Potentialerhaltungssätze nennen, da die Erhaltungsgrößen Potentiale haben. In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen: aus der Kovarianz der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezüglich einer ϱ-parametrigen Lieschen Koordinatentransformationsgruppe folgt, daß einer jeden σ-parametrigen Lieschen Gruppe σ Potentialerhaltungssätze entsprechen.

2. Die kanonischen Erhaltungssätze in Raume X_n^ϱ. Wir betrachten einen n-dimensionalen Punktraum X_n^ϱ, in welchem die zulässigen Koordinatensysteme x_i durch die ϱ-parametrige Liesche Koordinatentransformationsgruppe

$$x_i = g_i(x'_i, \eta_a) \tag{1}$$

bestimmt sind, wo η_a, $a = 1, 2, \ldots, \varrho$ beliebige wesentliche Parameter sind. (Die durch kleine lateinische Buchstaben bezeichneten Indizes durchlaufen die Werte $1, 2, \ldots, n$). Es sei

$$Dx_i = \sum_{a=1}^{\varrho} \chi_{ia} \varepsilon_a \tag{2}$$

eine unendlich kleine, den Umformungen (1) entsprechende Transformation, wobei ε_a unendlich kleine Parameter sind.

Betrachten wir jetzt ein geometrisches Objekt [6] $f_A(x_i)$, $A = 1, 2, \ldots, N$, mit der Transformationsregel

$$f_A = F_A(f'_A, x_i, \partial g_i/\partial x'_j). \tag{3}$$

(Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Objekte, in deren Transformationsformeln (3) nur erste Ableitungen der Funktionen g_j nach x_i vorkommen). Wie bekannt ([6], s. 20) drückt sich das Liesche Differential von (3) durch die Formel

$$Df_A = F_{Ai}Dx_i + F_{Aij}\partial_j Dx_i, \qquad \partial_j = \partial/\partial x_j \tag{4}$$

aus. (Über sich wiederholende Indizes soll man entsprechend summieren). Durch Einsetzen von (2) in (4) bekommen wir

$$Df_A = (F_{Ai}\chi_{ia} + F_{Aij}\partial_j\chi_{ia})\varepsilon_a. \tag{5}$$

Wir bilden eine geometrische Komitante [7]

$$l(x_i) = L(f_A, \partial f_A/\partial x_i), \tag{6}$$

die eine Skalardichte mit dem Gewicht $(+1)$ ist, d.h.

$$l(x_i) = l'(x'_i)\det(\partial g_i/\partial x'_j), \tag{7}$$

wo

$$l'(x'_i) = L(f'_A, \partial f'_A/\partial x'_i). \tag{8}$$

Ihr Liesches Differential hat die Form

$$Dl = \frac{\delta L}{\delta f_A} Df_A + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)} Df_A\right], \tag{9}$$

wo

$$\frac{\delta L}{\delta f_A} = \frac{\partial L}{\partial f_A} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)}. \tag{10}$$

Andererseits haben wir ([6], s. 14) — da (6) eine Skalardichte mit dem Gewicht $(+1)$ ist —

$$Dl = \frac{\partial}{\partial x_i}(LDx_i). \tag{11}$$

Wenn man (9) und (11) vergleicht, erhält man

$$\frac{\delta L}{\delta f_A} Df_A + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)} Df_A - LDx_i\right] = 0, \tag{12}$$

und wenn die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\delta L}{\delta f_A} = 0 \tag{13}$$

erfüllt sind, reduziert sich (12) zu

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)} Df_A - LDx_i\right] = 0. \tag{14}$$

Bei Beachtung der Formeln (2) und (5) sowie der Willkür der Parameter ε_a bekommt man

$$\partial\theta_{ia}/\partial x_i = 0, \tag{15}$$

wo folgende Bezeichnungen eingeführt wurden:

$$\theta_{ia} = \vartheta_{ij}\chi_{ja} + v_{ikj}\partial_k\chi_{ja}, \tag{16}$$

$$\vartheta_{ij} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)} F_{Aj} - L\delta_{ij}, \tag{17}$$

$$v_{ikj} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)} F_{Ajk} \tag{18}$$

und $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Die Erhaltungssätze (15) in dieser allgemeinen Form wurden das erste mal von Noether [1] abgeleitet, die sich dabei einer anderen Methode bedient hat.

3. Noethers Identitäten und potentielle Erhaltungssätze im Raum Ξ_n. Wir betrachten einen n-dimensionalen Punktraum Ξ_n, in welchem die zulässigen Koordinatensysteme ξ_i durch die allgemeine Koordinatentransformationsgruppe

$$\xi_i = \xi_i(\xi'_i) \tag{19}$$

bestimmt sind. Mit $D\xi_i$ bezeichnen wir eine unendlich kleine, der Gruppe (19) entsprechende Transformation

$$D\xi_i = \xi'_i - \xi_i. \tag{20}$$

Es sei $\varphi_A(\xi_i)$ ein geometrisches Objekt in Ξ_n, dessen Transformationsregel die Formel

$$\varphi_A = F_A(\varphi'_A, \xi_i, \partial\xi_i/\partial\xi'_j) \tag{21}$$

vorschreibt. Sein Liesches Differential hat die Gestalt

$$D\varphi_A = F_{Ai}D\xi_i + F_{Aij}\partial_j D\xi_i, \qquad \partial_j = \partial/\partial\xi_j. \tag{22}$$

Betrachten wir jetzt eine geometrische Komitante

$$\lambda(\xi_i) = \Lambda(\varphi_A, \partial\varphi_A/\partial\xi_i), \tag{23}$$

die eine Skalardichte mit dem Gewicht $(+1)$ sein soll. Ganz ähnlich wie in (12), bekommen wir

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \varphi_A} D\varphi_A + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_j \varphi_A)} D\varphi_A - \Lambda D\xi_j\right] = 0\,, \tag{24}$$

wo

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \varphi_A} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_A} - \frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_j \varphi_A)}. \tag{25}$$

Wenn wir in der Formel (24) die Koeffizienten bei den verschiedenen Ableitungen von $D\xi_i$ verschwinden lassen, bekommen wir nach einfachen Umformungen

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \varphi_A} F_{Ai} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\delta \Lambda}{\delta \varphi_A} F_{Aji}\right) = 0\,, \tag{26}$$

$$\frac{\partial T^{(s)}_{i\beta}}{\partial \xi_i} = 0\,, \tag{27}$$

$$T^{(s)}_{i\beta} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\Omega_{ik\beta}\,, \qquad \Omega_{ik\beta} + \Omega_{ki\beta} = 0\,, \tag{28}$$

wo die Bezeichungen

$$t^{(w)}_{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_i \varphi_A)} F_{Aj} - \Lambda \delta_{ij}\,, \tag{29}$$

$$t^{(s)}_{ij} = t^{(w)}_{ij} + \frac{\delta \Lambda}{\delta \varphi_A} F_{Aij}\,, \tag{30}$$

$$\omega_{ijk} = \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_k \varphi_A)} F_{Aji}\,, \tag{31}$$

$$\Omega_{ik\beta} = \omega_{ikj}\chi_{j\beta}\,, \tag{32}$$

$$T^{(s)}_{i\beta} = t^{(s)}_{ij}\chi_{j\beta} + \omega_{kij}\partial_k \chi_{j\beta} \tag{33}$$

und

$$D\xi_i = \chi_{i\beta}\varepsilon_\beta\,, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, \sigma \tag{34}$$

eingeführt wurden. (Die Gleichungen (27) folgen aus (28)).

Die Gleichungen (26)-(28) wurden abgeleitet ohne zu fordern, daß die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\delta \Lambda / \delta \varphi_A = 0 \tag{35}$$

erfüllt sind. Die Gleichungen (26) stellen n Identitäten zwischen den Gleichungen (35) vor. Das Objekt $T^{(s)}_{i\beta}$ werden wir als potentiell und stark (s-strong) bezeichnen, weil es ein Potential hat und die Erhaltungssätze sogar dann erfüllt, wenn die Euler-Lagrangeschen Gleichungen (35) nicht erfüllt sind. Die Gleichungen (27) stellen σ potentielle, starke Erhaltungssätze dar für eine beliebige σ-parametrige Liesche Gruppe.

Wenn die Gleichungen (35) erfüllt sind, dann bekommen wir aus den Gleichungen (26)-(28) schwache (w-weak), potentielle Erhaltungssätze

$$\frac{\partial T^{(w)}_{i\beta}}{\partial \xi_i} = 0\,, \tag{36}$$

$$T^{(w)}_{i\beta} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\Omega_{ik\beta}\,, \tag{37}$$

wo

$$T^{(w)}_{i\beta} = t^{(w)}_{ij}\chi_{j\beta} + \omega_{ikj}\partial_k \chi_{j\beta}\,. \tag{38}$$

Wenn wir die Translationsgruppe

$$D\xi_i = \varepsilon_i \tag{39}$$

in Betracht ziehen, führen die Formeln (27), (28) und (33) zu starken potentiellen Erhaltungssätzen für die Größen

$$\frac{\partial t^{(s)}_{ij}}{\partial \xi_i} = 0\,, \qquad t^{(s)}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\omega_{ikj}\,, \tag{40}$$

wo

$$\omega_{ikj} + \omega_{kij} = 0\,, \tag{41}$$

und zu schwachen potentiellen Erhaltungssätzen für die Größen

$$\frac{\partial t^{(w)}_{ij}}{\partial \xi_i} = 0\,, \qquad t^{(w)}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\omega_{ikj}\,, \tag{42}$$

falls die Euler-Lagrangeschen Gleichungen (35) erfüllt sind.

Der gebräuchlichen Ausdrucksweise nach sind die kanonischen Erhaltungssätze (15) im Raum X^ϱ_n schwache Erhaltungssätze, im allgemeinen nicht potentielle

4. Schwache und starke Erhaltungssätze im Raum X^ϱ_n.

Wir betrachten im Raum X^ϱ_n eine geometrische Komitante

$$l(x_i) = L(f_A, \partial f_A/\partial x_i)\,, \tag{43}$$

die eine Skalardichte mit dem Gewicht $(+1)$ sein soll. Es sei eine Abbildung der zulässigen Koordinaten x_i des Raumes X^ϱ_n auf die zulässigen Koordinaten ξ_i des Raumes Ξ_n gegeben mittels der allgemeinen Transformationsgruppe

$$x_i = x_i(\xi_i)\,, \tag{44}$$

sowie eine Abbildung der entsprechenden Objekte

$$f_A = F_A(\varphi_A, x_i, \partial x_i/\partial \xi_j)\,. \tag{45}$$

Nachdem wir (45) in (43) einsetzen, bekommen wir

$$(46)\qquad \lambda(\xi_i) = \Lambda(\varphi_A, \partial\varphi_A/\partial\xi_i, x_i, \partial x_i/\partial\xi_j) = a(\xi_i)\det(\partial x_i/\partial\xi_j)\,.$$

Jetzt werden wir zeigen, daß (46) eine Skalardichte mit dem Gewicht $(+1)$ im Raum Ξ_n ist, wenn wir die Funktionen $x_i(\xi_j)$ als Skalaren in diesem Raum ansehen. Tatsächlich führt die Annahme, daß (43) eine Skalardichte mit dem Gewicht $(+1)$ ist, zu

$$(47)\qquad \lambda(\xi_i) = a(\xi_i)\det(\partial x_i/\partial\xi_j)\,.$$

Für ein zweites zulässiges Koordinatensystem

$$(48)\qquad x_i = x_i(\xi_i')$$

bekommen wir ganz ähnlich

$$(49)\qquad \lambda'(\xi_i') = a(\xi_i')\det(\partial x_i/\partial\xi_j')\,.$$

Bei Beachtung, daß die Funktionen $x_i(\xi_j)$ und $x_i(\xi_j')$ Skalaren sind, bekommt man aus (47) und (49)

$$(50)\qquad \lambda(\xi_i) = \lambda'(\xi_i')\det(\partial\xi_i/\partial\xi_j')\,.$$

Das Liesche Differential der Komitante (46) führt zu

$$(51)\qquad \frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi_A}D\varphi_A + \frac{\delta\Lambda}{\delta x_i}Dx_i + \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_i\varphi_A)}D\varphi_A + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_i x_j)}Dx_j - \Lambda D\xi_i\right] = 0\,,$$

wo

$$(52)\qquad \frac{\delta\Lambda}{\delta x_i} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial\xi_j}\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_j x_i)}\,.$$

Wenn wir beachten, daß

$$(53)\qquad Dx_i = D\xi_j\partial_j x_i\,,$$

und wenn wir die Koeffizienten bei den verschiedenen Ableitungen von $D\xi_i$ in (51) gleich Null setzen, bekommen wir nach einfachen Umformungen

$$(54)\qquad \frac{\delta\Lambda}{\delta x_j}\partial_i x_j + \frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi_A}F_{Ai} + \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\delta\Lambda}{\partial\varphi_A}F_{Aij}\right) = 0\,,$$

$$(55)\qquad \frac{\partial\tilde{T}^{(s)}_{i\beta}}{\partial\xi_i} = 0\,,$$

$$(56)\qquad \tilde{T}^{(s)}_{i\beta} = -\frac{\partial}{\partial\xi_k}\tilde{\Omega}_{ik\beta}\,,\qquad \tilde{\Omega}_{ik\beta} + \tilde{\Omega}_{ki\beta} = 0\,,$$

wo die Bezeichnungen

$$(57)\qquad \tilde{t}^{(w)}_{ij} = \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_i\varphi_A)}F_{Aj} + \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_i x_k)}\partial_k x_j - \Lambda\delta_{ij}\,,$$

$$(58)\qquad \tilde{t}^{(s)}_{ij} = \tilde{t}^{(w)}_{ij} + \frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi_A}F_{Aji}\,,$$

$$(59)\qquad \tilde{\omega}_{ikj} = \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_k\varphi_A)}F_{Aji}\,,$$

$$(60)\qquad \tilde{\Omega}_{ik\beta} = \tilde{\omega}_{ikj}\chi_{j\beta}\,,$$

$$(61)\qquad \tilde{T}^{(s)}_{i\beta} = \tilde{t}^{(s)}_{ij}\chi_{j\beta} + \tilde{\omega}_{kij}\partial_k\chi_{j\beta}$$

eingeführt wurden. Die Gleichungen (54) stellen n Noethersche Identitäten dar, die Gleichungen (55) — starke potentielle Erhaltungssätze, und die Gleichungen (56) weisen auf die Existenz von Potentialen.

Wenn wir annehmen, daß die Gleichungen $\delta\Lambda/\delta\varphi_A = 0$ erfüllt sind, dann folgen aus (55) und (56) schwache potentielle Erhaltungssätze

$$(62)\qquad \partial\tilde{T}^{(w)}_{i\beta}/\partial\xi_i = 0\,,$$

$$(63)\qquad \tilde{T}^{(w)}_{i\beta} = -\frac{\partial}{\partial\xi_k}\tilde{\Omega}_{ik\beta}\,,$$

wo

$$(64)\qquad \tilde{T}^{(w)}_{i\beta} = \tilde{t}^{(w)}_{ij}\chi_{j\beta} + \tilde{\omega}_{kij}\partial_k\chi_{j\beta}\,.$$

Wir betonen, daß wir zur Ableitung der schwachen potentiellen Erhaltungssätze zwar die Erfüllung aller Euler-Lagrangescher Gleichungen $\delta\Lambda/\delta\varphi_A = 0$ fordern, aber nicht der Gleichungen $\delta\Lambda/\delta x_i = 0$, da diese aus den ersten auf Grund der Noetherschen Identitäten (54) folgen.

Die Gleichungen (54)-(56) sind für beliebige Funktionen $\varphi_A(\xi_j)$ und $x_i(\xi_j)$ erfüllt. Speziell für $x_j = \xi_j$ bekommt man

$$(65)\qquad \left[\frac{\delta\Lambda}{\delta x_j}\right]_{x=\xi} + \frac{\delta L}{\delta f_A}F_{Aj} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\delta L}{\delta f_A}F_{Aij}\right) = 0\,,$$

$$(66)\qquad \partial T^{(s)}_{i\beta}/\partial x_i = 0\,,$$

$$(67)\qquad T^{(s)}_{i\beta} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Omega_{ik\beta}\,,\qquad \Omega_{ik\beta} + \Omega_{ki\beta} = 0\,,$$

wo

$$(68)\qquad t^{(w)}_{ij} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_i f_A)}F_{Aj} - L\delta_{ij} + \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_i x_j)}\right]_{x=\xi}\,,$$

$$(69)\qquad t^{(s)}_{ij} = t^{(w)}_{ij} + \frac{\delta L}{\delta f_A}F_{Aji}\,,$$

$$(70)\qquad \omega_{ikj} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_k f_A)}F_{Aji}\,,$$

$$(71)\qquad \Omega_{ik\beta} = \omega_{ikj}\chi_{j\beta}\,,$$

$$(72)\qquad T^{(s)}_{i\beta} = t^{(s)}_{ij}\chi_{j\beta} + \omega_{kij}\partial_k\chi_{j\beta}\,.$$

Die Gleichungen (65) stellen n Identitäten im Raum X_n^ϱ dar; die Gleichungen (66) geben in diesem Raum σ starke potentielle Erhaltungssätze, die einer jeden Lieschen Gruppe G_ϱ entsprechen. Die Gleichungen (67) weisen auf die Existenz von Potentialen.

Die Gleichungen (62) und (63) sind erfüllt für Funktionen $x_i(\xi_j)$ und $\varphi_A(\xi_j)$, die Euler-Lagrangeschen Gleichungen $\delta\Lambda/\delta\varphi_A = 0$ genügen. Da wir $N+n$ unbekannte Funktionen und N unabhängige Gleichungen haben, können wir $x_i = \xi_i$ annehmen. Dann bekommen wir aus (62) und (63)

(73) $$\partial T_{i\beta}^{(w)}/\partial x_i = 0\,,$$

(74) $$T_{i\beta}^{(w)} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Omega_{ik\beta}\,,$$

wo

(75) $$T_{i\beta}^{(w)} = t_{ij}^{(w)}\chi_{j\beta} + \omega_{kij}\partial_k\chi_{j\beta}\,.$$

Die Gleichungen (73) stellen im Raum X_n^ϱ σ schwache potentielle Erhaltungssätze dar, die einer jeden Lieschen Gruppe entsprechen. Die Gleichungen (74) weisen auf die Existenz von Potentialen.

Zum Schluß wollen wir bemerken, daß die kanonischen Erhaltungssätze im Raum X_n^ϱ und die schwachen potentiellen, der Gruppe G_ϱ entsprechenden Erhaltungssätze voneinander unabhängig sind.

Herrn Prof. Ślebodziński möchte ich für wertvolle kritische Hinweise höflichst danken.

Literaturverzeichnis

[1] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. Ges., Göttingen, 2 (1918), S. 235-257.

[2] P. Freud, *Über die Ausdrücke der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses eines materiellen systems in der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Math. 40 (1939), S. 417-436.

[3] N. Mizkjewitsch, *Zu den Invariantzeigenschaften der Lagrange-Funktionen der Felder*, Ann. d. Phys., 7. Folge, 1 (1958), S. 319-433.

[4] J. N. Goldberg, *Conservation Laws in General Relativity*, Phys. Rev. 111, 1 (1958), S. 315-320.

[5] P. G. Bergmann, *Conservation Laws in General Relativity as the Generators of Coordinate Transformations*, Phys. Rev. 112, 1 (1958), S. 287-289.

[6] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, Groningen 1955.

[7] S. Gołąb, *Sur quelques points concernant la notion du comitant*, Ann. Soc. Pol. Math. 17, 2 (1938), S. 177-192.

Reçu par la Rédaction le 22. 1. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

On a certain boundary problem for Laplace equation

by Z. Szmydt (Kraków)

This paper contains the solution of a problem which has been raised by prof. G. Fichera in his course of lectures on the theory of singular integral equations which he have had in Instituto Nazionale di Alta Matematica in Rome in the years 1958-59.

1. Denotations. We denote by Σ a curve lying in the complex z-plane ($z = x+iy$) and we assume that it admits a parametric representation $z = z(s)$, where $z(s)$ is a function of the class C^n on the interval $0 \leqslant s \leqslant L$, satisfying the conditions

$$|z'(s)| = 1 \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)\,,$$

$$\left.\frac{d^kz(s)}{ds^k}\right|_{s=0} = \left.\frac{d^kz(s)}{ds^k}\right|_{s=L} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

and such that $z(s_1) = z(s_2)$ with $s_1 < s_2$, if and only if $s_1 = 0$ and $s_2 = L$.

We denote by Ω a domain whose boundary is the curve Σ; we denote by n_z the normal vector of Σ at the point z, directed towards the interior of Ω, and by ν_z the unit vector of the same direction at the point z of Σ. Σ_r denotes the curve which is parallel to Σ at the distance $|r|$ from Σ and is situated inside Ω when $r > 0$ and outside Ω when $r < 0$. The type ϱ will denote a positive number. We see that $\Sigma_\varrho \subset \Omega$.

The equation of the curve Σ_r can be written briefly

$$z_r = z(s) + r\nu[z(s)] \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)$$

or by setting $z_r = x_r + iy_r$ we can get the equation of Σ_r in the form

(1) $$x_r = x(s) - ry'(s), \qquad y_r = y(s) + rx'(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)$$

without loosing any generality.

The element of the arc of Σ_r will be denoted by ds_r. If the curve Σ is of the class C^2 we have

(2) $$ds_r = \{[x'(s) - ry''(s)]^2 + [y'(s) + rx''(s)]^2\}^{1/2}ds\,.$$