where $\varepsilon_m = O(h^{m+1})$ in case $f^{(m+1)}(x)$ exists and is continuous, and $B_\nu^{(k)}$ are Bernoulli's numbers of order k given by the generating function

$$\frac{t^k}{(e^k-1)^k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(k)}.$$

Thus, if the parameter λ is large, then we may take, for instance, $h = 1/\lambda$, and construct an approximation formula as follows

$$\int_0^c \Phi(\lambda t) f(t)\, dt \approx \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} (-1)^n \Psi^{(n)}(0) \cdot A_n, \tag{9}$$

where the numbers A_n and $\Psi^{(n)}(0)$ are given by $(A_0 = f(0))$

$$A_n = \sum_{k=n}^{m+r} \frac{n}{(k-n)!\,k} B_{k-n}^{(k)} \cdot \Delta^k f(0) \qquad (n = 1, 2, \ldots, m), \tag{10}$$

$$\Psi^{(n)}(0) = \int_0^{\lambda c} \Phi(t)(-t)^n dt \qquad (n = 0, 1, \ldots, m) \tag{11}$$

respectively, the number r being a non-negative integer chosen to be fixed.

References

[1] Н. П. Еругин и С. Л. Соболев, *Приближенное интегрирование некоторых колеблющийся функций*, Прикл. Мат. Мех. 14 (1950), p. 193-196.

[2] L. N. G. Filon, *On a quadrature formula for trigonometric integrals*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 49 (1928-1929), p. 38-47.

[3] L. C. Hsu, *Some approximation formulas for the integration of violently oscillating functions and of periodic functions*, Science Record (Academia Sinica, Peking) III, No. 11 (1959), p. 544-549.

[4] В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители*, ДАН СССР 108 (1956), p. 1014-1017.

[5] M. I. Longman, *Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), p. 764-768.

[6] E. C. Titchmarsh, *Theory of functions*, second edition, London 1933, 1944, § 8.3.

[7] C. J. Tranter, *Integral transforms in mathematical physics*, 1951, § 5.3.

[8] H. F. Willis, *A formula for expanding an integral as series*, Philosophical Magazine 39 (1948), p. 455-459.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
NORTH-EAST PEOPLE'S UNIVERSITY (JILIN UNIVERSITY),
CHANGCHUN, CHINA

Reçu par la Rédaction le 27. 6. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XI (1961)

О функциях $\varphi_2(n)$, $\mu_2(n)$, $\zeta_2(s)$

В. А. Голубев (Кувшиново) и О. М. Фоменко (Краснодар)

§ 1. Рассмотрим следующие обобщения числовых функций Эйлера и Мёбиуса.

Пусть функция $\varphi_2(n)$ выражает число пар натуральных чисел a_1, a_2, с условиями $a_2 - a_1 = 2$, $(a_1, n) = 1$, $(a_2, a_n) = 1$, $a_1 \leqslant n$. Легко доказать, что $\varphi_2(n)$ мультипликативная функция и что при n нечётном:

$$\varphi_2(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right), \tag{1}$$

где $p > 2$ простое число. Если n чётное, то

$$\varphi_2(n) = \frac{1}{2} n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right), \qquad p > 2 \quad \text{простое}. \tag{2}$$

Введём функцию $\mu_2(n)$, определяемую равенствами:

$$\mu_2(n) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \cdot 2^k, & \text{если} \quad n = 2p_1p_2\ldots p_k, \quad p > 2, \\ (-2)^k, & \text{если} \quad n = p_1p_2\ldots p_k, \quad p > 2, \\ \mu(n) & \text{для остальных натуральных } n. \end{cases} \tag{3}$$

Это определение можно получить, рассматривая функцию типа $\zeta(s)$. Пусть:

$$\zeta_2(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{2}{p^s}\right)^{-1}, \tag{4}$$

где $s = \sigma + it$, произведение распространяется на все простые $p > 2$.

Запишем $\zeta_2(s)$ в виде ряда Дирихле, для чего введём ещё функцию $\Delta(n)$:

$$\Delta(n) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 1, \\ \alpha + \beta + \ldots + \lambda, & \text{если} \quad n = 2^0 p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_k^\lambda, \quad p_i > 2. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда

$$\zeta_2(s) = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \ldots\right) \prod_{p>2} \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{2^2}{p^{2s}} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\Delta(n)}}{n^s}.$$

Легко видеть, что имеет место аналог известной формулы из теории $\zeta(s)$ функции:

$$\frac{1}{\zeta_2(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_2(n)}{n^s}. \tag{6}$$

Из (6), принимая во внимание (4), мы получим равенства (3) для $\mu_2(n)$.

§ 2. Выведем некоторые свойства функции $\mu_2(n)$.

1. Положив $dd' = q$, получим:

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{\Delta(m)}}{m^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_2(n)}{n^s} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^s} \sum_{d|q} 2^{\Delta(d')} \mu_2(d).$$

Отсюда:

$$\sum_{d|q} 2^{\Delta(d')} \mu_2(d) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad q = 1, \\ 0 & \text{при} \quad q > 1. \end{cases} \tag{7}$$

2. Легко видеть, что

$$\zeta(s) \frac{1}{\zeta_2(s)} = \prod_{p>2} \frac{p^s - 2}{p^s - 1} = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} - \ldots\right);$$

с другой стороны,

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta_2(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_2(n)}{n^s} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^s} \sum_{d|q} \mu_2(d).$$

Из сравнения полученных результатов выводим:

$$\sum_{d|n} \mu_2(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_k^\lambda, \quad p > 2. \end{cases} \tag{8}$$

§ 3. Установим связь между функциями $\varphi_2(n)$ и $\mu_2(n)$:

Легко видеть, что функция $\mu_2(n)$ — мультипликативна. Пусть функция $\theta(n)$ — также мультипликативна. Тогда

$$\sum_{d|n} \mu_2(d)\, \theta(d) = \begin{cases} \big(1 - 2\theta(p_1)\big) \ldots \big(1 - 2\theta(p_k)\big), \\ \qquad \text{если} \quad n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{где} \quad p_i > 2, \\ \big(1 - \theta(2)\big)\big(1 - 2\theta(p_1)\big) \ldots \big(1 - 2\theta(p_k)\big), \\ \qquad \text{если} \quad n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}, \quad p_i > 2. \end{cases}$$

Из этой формулы легко снова получить (8), а также доказать формулу

$$\sum_{d|n} \frac{\mu_2(d)}{d} = \begin{cases} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right), & \text{если} \quad n \text{ нечётное}, \ p > 2, \\ \frac{1}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{2}{p}\right), & \text{если} \quad n \text{ чётное}, \ p > 2. \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда, ввиду (1) и (2), вытекает:

$$\varphi_2(n) = \sum_{d|n} \mu_2(d) \frac{n}{d}. \tag{10}$$

§ 4. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{\varphi(p)}{p^s} + \ldots\right) = \frac{2^s - 1}{2^s - 2} \prod_{p>2} \frac{p^s - 2}{p^s - p} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta_2(s)}.$$

Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta_2(s)}. \tag{11}$$

Найдём асимптотическое выражение для суммы

$$\varphi_2(1) + \varphi_2(2) + \ldots + \varphi_2(n).$$

Имеем

$$\varphi_2(1) + \ldots + \varphi_2(n) = \sum_{d|1} \frac{\mu_2(d)}{d} + \ldots + n \sum_{d|n} \frac{\mu_2(d)}{d}$$
$$= \sum_{d=1}^{n} \mu_2(d) \left(1 + 2 + \ldots + E\left(\frac{n}{d}\right)\right).$$

Но

$$1 + 2 + \ldots + E\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{E\left(\frac{n}{d}\right)\left(E\left(\frac{n}{d}\right) + 1\right)}{2} = \frac{n^2}{2d^2} + \frac{-2\frac{n}{d}\left\{\frac{n}{d}\right\} + \left\{\frac{n}{d}\right\}^2 + \frac{n}{d} - \left\{\frac{n}{d}\right\}}{2}.$$

Отсюда

$$\sum_{d=1}^{n} \mu_2(d) \left(1 + 2 + \ldots + E\left(\frac{n}{d}\right)\right) = \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu_2(d)}{d^2} + O\left(n \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu_2(d)}{d}\right) \tag{12}$$
$$= \frac{1}{2\zeta_2(s)} n^2 + O\left(\frac{n^2}{2} \sum_{d=n+1}^{\infty} \frac{\mu_2(d)}{d^2} + n \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu_2(d)}{d}\right).$$

Пусть $\tau(n)$ число делителей числа n. Нетрудно видеть, что $|\mu_2(n)| \leqslant \tau(n) = O(n^\varepsilon)$. Отсюда получаем оценку

$$\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu_2(d)}{d} = O\left(\int_0^n x^{\varepsilon-1} dx\right) = O(n^\varepsilon),$$

а также оценку

$$\sum_{d=n+1}^{\infty} \frac{\mu_2(d)}{d^2} = O(n^{-1+\varepsilon}).$$

Поэтому имеем окончательно:

$$\varphi_2(1)+\varphi_2(2)+\ldots+\varphi_2(n) = \frac{1}{2\zeta_2(s)}n^2+O(n^{1+\varepsilon}). \tag{13}$$

§ 5. Имеет место следующее предложение: *Множество всех чисел $\varphi_2(n)/n$, где $n=1,3,5,7,\ldots$, плотно в интервале $(0,1)$; множество всех чисел $\varphi_2(n)/n$, где $n=2,4,6,8,\ldots$, плотно в интервале $(0,1/2)$.*

Доказательство. Рассмотрим лишь случай нечётного n, ибо случай чётного n аналогичен. Пусть a, b действительные числа, $0\leqslant a<b\leqslant 1$, $b-a>0$, $1-b\geqslant 0$. При $k>k_0$ имеем $2/p_k<b-a$, $1-2/p_k>a$. Ясно, что $\prod\limits_{n=k}^{\infty}(1-2/p_n)=0$. Ясно также, что существует минимальное l такое, что

$$\left(1-\frac{2}{p_k}\right)\left(1-\frac{2}{p_{k+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{p_{k+l}}\right)\leqslant a;$$

тогда

$$u=\left(1-\frac{2}{p_k}\right)\left(1-\frac{2}{p_{k+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{p_{k+l-1}}\right)>a,$$

$$u\left(1-\frac{2}{p_{k+l}}\right)\leqslant a,\qquad u\leqslant a+\frac{2u}{p_{k+l}}<a+\frac{2}{p_k}<b;\qquad a<u<b.$$

Пусть $n=p_k\ldots p_{k+l-1}$. Тогда $a<\varphi_2(n)/n<b$.

Доказанная теорема — аналог теоремы В. Серпинского о $\varphi(n)$ [1].

Легко доказывается также аналог теоремы Шинцеля: *Существует бесконечная последовательность целых положительных чисел $n_1<n_2<\ldots$ таких, что*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\varphi_2(n_l+i)}{\varphi_2(n_l+i-1)}=a_i\ (^2),\qquad \text{где}\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

§ 6. Докажем аналог теоремы А. Шинцеля (A. Schinzel, *Sur un problème concernant la fonction* $\varphi(n)$, Чехосл. матем. журнал 6 (81) (1956), с. 164-165) [3].

Для каждого натурального k существует натуральное m такое, что уравнение $\varphi_2(x)=m$ имеет больше, чем k решений в натуральных числах x.

Для доказательства запишем формулы (1) и (2) так:

$$\varphi_2(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{\varepsilon_p}{p}\right),\qquad \text{где}\qquad \varepsilon_p=\begin{cases}1, & \text{если}\quad p=2,\\ 2, & \text{если}\quad p>2.\end{cases}$$

(1) См. также P. Erdös, *On the density of some sequences of numbers*, Journ. London Math. Soc. 13 (1938), с. 119-127.

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Эрдёша (*Some remarks on Euler's φ function*, Acta Arithm. 4 (1958), с. 10-19).

(3) См. S. Pillai, *On some functions connected with $\varphi(n)$*, Bull. Amer. Math. Soc. 35 1929), с. 835-837, P. Erdös, Quarterly Journal of Math. 6 (1935), с. 213.

Положим

$$m=(p_1-\varepsilon_{p_1})(p_2-\varepsilon_{p_2})\ldots(p_k-\varepsilon_{p_k}).$$

Пусть

$$\begin{aligned} x_i &= p_1p_2\ldots p_{i-1}(p_i-\varepsilon_{p_i})p_{i+1}p_{i+2}\ldots p_k, \qquad i=1,\ldots,k,\\ x_{k+1} &= p_1p_2\ldots p_k;\qquad p_i-\varepsilon_{p_i}=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\ldots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}}. \end{aligned}\tag{14}$$

Тогда

$$x_i=p_1^{\gamma_1+1}p_2^{\gamma_2+1}\ldots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}+1}p_{i+1}p_{i+2}\ldots p_k.$$

Поэтому

$$\varphi_2(x_i)=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\ldots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}}(p_1-\varepsilon_{p_1})(p_2-\varepsilon_{p_2})\ldots (p_{i-1}-\varepsilon_{p_{i-1}})(p_{i+1}-\varepsilon_{p_{i+1}})\ldots(p_k-\varepsilon_{p_k}).$$

Из (14):

$$\varphi_2(x_i)=(p_1-\varepsilon_{p_1})\ldots(p_{i-1}-\varepsilon_{p_{i-1}})(p_i-\varepsilon_{p_i})(p_{i+1}-\varepsilon_{p_{i+1}})\ldots(p_k-\varepsilon_{p_k})=m,$$

где $i=1,2,\ldots,k$. Поэтому $\varphi_2(x_{k+1})=m$.

Reçu par la Rédaction le 8. 9. 1960