$$-\frac{1}{s-1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{s-1}}\left\{\frac{(s-1)s}{2!}\cdot\frac{1}{(n+a)^{2}}+\frac{(s-1)s(s+1)}{3!}\cdot\frac{1}{(n+a)^{3}}+\dots\right\}$$

$$=-\frac{1}{s-1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{s-1}}\left\{\left(1-\frac{1}{n+a}\right)^{1-s}-1-\frac{s-1}{n+a}\right\}$$

$$=-\frac{1}{s-1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+a-1)^{s-1}}-\frac{1}{(n+a)^{s-1}}-\frac{s-1}{(n+a)^{s}}\right\}$$

$$=\vartheta(s,a)-\vartheta(s,a,i)-\frac{1}{(a+i)^{s-1}(s-1)}.$$

Changing the order of summation is correct because $\sigma>0$ and because of the absolute convergence of the series

$$\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{\sigma-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|s|(|s|+1)\dots(|s|+k)}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{(n+a)^{k+2}} = \sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{\sigma}}\left\{\left(1-\frac{1}{n+a}\right)^{-|s|}-1\right\}.$$

Since the series in the right-hand side of (3) is convergent for all values of s, the formula is proved by the method of analytic extensions. For $\omega=1$, $i=0$, $a=1$ we obtain from (1) the Landau formula (see [1]). Formula (3) may serve for an analytic extension of Hurwitz function to the whole complex plane.

Let us consider the second series (which is also convergent for all values of s):

(4) $$\varphi\left(\tfrac{1}{2},\,2a+2i+\tfrac{1}{2}(3-\omega),\,s\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{j}\frac{s(s+1)\dots(s+j)}{(j+1)!\,2^{s+j+1}}\{\vartheta(s+j+1,a)-\vartheta(s+j+1,a,i)\}$$
$$(i=-1,0,1,\dots).$$

The proof of (4) is analogous to the proof of (3), and we shall omit it.

For $\omega=1$, $i=-1$, $a=1$ we obtain the formula of Ramasvami (see [1]).

Reference

[1] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford 1951.

Reçu par la Rédaction le 31. 5. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur les domaines de transitivité d'un groupe de transformations

par S. Gołąb et E. Siwek (Kraków)

§ 1. Introduction. Soit dans l'espace X, dont nous désignerons les éléments par $x, y, \dots$, un groupe G de transformations

(1) $$y=f(x,p),$$

où la lettre p désigne certains paramètres $p_1, p_2, \dots, p_q$. Supposons que pour chaque p la transformation (1) soit définie dans l'espace X tout entier.

Considérons le cas général où le groupe G n'est pas transitif, c'est-à-dire, pour un point x fixe, l'ensemble de toutes les images $f(x,p)$ de ce point n'épuise pas tout l'espace X. Posons pour un point x

$$\mathcal{T}(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\underset{y}{E}\,\{\Sigma_p[y=f(x,p)]\}.$$

L'ensemble $\mathcal{T}(x)$ est composé de toutes les images de l'élément x pour toutes les transformations du groupe G (1). Considérons deux ensembles $\mathcal{T}(x_1)$ et $\mathcal{T}(x_2)$ correspondant à différents éléments x_1 et x_2 de l'espace X. Il est facile de montrer que ces ensembles ne peuvent être qu'identiques ou disjoints. On peut donc décomposer l'espace X en couches disjointes $\mathcal{T}(x)$

$$X=\sum\mathcal{T}(x).$$

Nous appellerons les couches $\mathcal{T}(x)$ *domaines de transitivité du groupe* G, car dans chaque couche $\mathcal{T}(x)$ le groupe G est déjà transitif.

Si le groupe G est transitif (par exemple si G est le groupe affine général) l'espace X forme une seule couche. Si, par exemple, G est le groupe centro-affine, alors il n'est pas transitif et l'espace X se décompose en deux couches: l'une d'elles ne contient qu'un seul point (le centre), l'autre tout le reste.

(1) Lie et Engel appellent les ensembles $\mathcal{T}(x)$ *die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten* (*Theorie der Transformationsgruppen I*, p. 224).

Il en résulte qu'on peut transformer les vecteurs non nuls (contra- ou covariants) d'une façon arbitraire, c'est-à-dire on peut toujours trouver un système de cordonnées dans lequel les composantes d'un vecteur fixe non nul prennent des valeurs données.

La considération des tenseurs d'ordre plus élevé conduit au problème non trivial consistant à déterminer les domaines de transitivité de certains groupes. Ce problème conduit à celui de l'existence des solutions d'un système d'équations algébriques et il se complique pour les espaces réels.

Le but de cette note est de donner la décomposition de l'espace X_4, à quatre dimensions, des tenseurs mixtes de l'espace à deux dimensions, en domaines de transitivité par rapport au groupe G_4 de transformations des composantes de ces tenseurs.

Nous supposons réel l'espace dans lequel nous considérons les tenseurs et, par conséquent, les composantes T^λ_μ du tenseur ainsi que les paramètres $\boldsymbol{p}$ du groupe G_4 sont réels. L'étude d'autres types de tenseurs du second ordre fera l'objet d'un travail du second des auteurs.

Le problème de la détermination des domaines de transitivité pour les espaces de tenseurs s'est posé à l'occasion de la recherche des comitants algébriques des tenseurs. Les applications seront étudiées dans un travail du premier des auteurs.

§ 2. Désignons par (x_1, x_2, x_3, x_4) (où $x_1 = T^1_1$, $x_2 = T^1_2$, $x_3 = T^2_1$, $x_4 = T^2_2$) les coordonnées d'un point $\boldsymbol{x} \in X_4$. En considérant la loi de transformation des composantes d'un tenseur mixte T^λ_μ:

$$T^{\lambda'}_{\mu'} = T^\lambda_\mu A^{\lambda'}_\lambda A^\mu_{\mu'}$$

et en désignant par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (où: $\alpha = A^{1'}_1$, $\beta = A^{1'}_2$, $\gamma = A^{2'}_1$, $\delta = A^{2'}_2$) les paramètres du groupe G_4, nous pouvons mettre la formule (1) sous la forme suivante:

$$(2)\qquad \begin{aligned} (\alpha\delta-\beta\gamma)y_1 &= \alpha\delta x_1 - \alpha\gamma x_2 + \beta\delta x_3 - \beta\gamma x_4\,,\\ (\alpha\delta-\beta\gamma)y_2 &= -\alpha\beta x_1 + \alpha^2 x_2 - \beta^2 x_3 + \alpha\beta x_4\,,\\ (\alpha\delta-\beta\gamma)y_3 &= \gamma\delta x_1 - \gamma^2 x_2 + \delta^2 x_3 - \gamma\delta x_4\,,\\ (\alpha\delta-\beta\gamma)y_4 &= -\beta\gamma x_1 + \alpha\gamma x_2 - \beta\delta x_3 + \alpha\delta x_4\,. \end{aligned}$$

On sait bien que la trace $\sigma(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_4$ de la matrice:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

ainsi que son déterminant:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = x_1x_4 - x_2x_3$$

sont les comitants scalaires (invariants) du tenseur T^λ_μ. Par conséquent les égalités:

$$(3)\qquad \sigma(\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x})\,, \qquad \omega(\boldsymbol{y}) = \omega(\boldsymbol{x})$$

sont les conditions nécessaires d'existence d'une solution du système d'équations (2) par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, telle que

$$(4)\qquad \Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

(cette restriction résulte de la définition du groupe G_4).

Il s'ensuit qu'il existe, pour chaque domaine de transitivité $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$, des nombres c_1 et c_2 tels que $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \subset H(c_1, c_2)$, où $H(c_1, c_2)$ désigne une surface à deux dimensions, plongée dans l'espace X_4 et définie par les équations:

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = c_1\,, \qquad \omega(\boldsymbol{x}) = c_2\,.$$

Il reste donc à examiner quelles sont, parmi les surfaces $H(c_1, c_2)$, celles qui forment des domaines de transitivité et celles qui se décomposent en plusieurs domaines de transitivité. Dans ce but il suffit d'examiner l'existence des solutions du système (2), en supposant que les données x_i et y_i sont liées par (3). Remarquons encore que, d'après la première des égalités (3), la quatrième équation du système (2) est équivalente à la première et que, par suite, le système (2) se réduit au système de trois équations:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Delta y_1 &= \alpha\delta x_1 - \alpha\gamma x_2 + \beta\delta x_3 - \beta\gamma x_4\,,\\ \Delta y_2 &= -\alpha\beta x_1 + \alpha^2 x_2 - \beta^2 x_3 + \alpha\beta x_4\,,\\ \Delta y_3 &= \gamma\delta x_1 - \gamma^2 x_2 + \delta^2 x_3 - \gamma\delta x_4\,. \end{aligned}$$

Le système (5) étant homogène il suffit de chercher des solutions, par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, satisfaisant à la condition:

$$(6)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1\,.$$

§ 3. Nous décomposons l'espace X_4 en ensembles disjoints $H(c_1, c_2)$

$$X_4 = \sum_{c_1, c_2} H(c_1, c_2)\,, \qquad -\infty < c_1 < \infty\,, \qquad -\infty < c_2 < \infty\,.$$

Théorème. *Tout ensemble $H(c_1, c_2)$, tel que $-\infty < c_1 < \infty$, $-\infty < c_2 < \infty$ et $c_2 \neq c_1^2/4$, est un domaine de transitivité. Tout ensemble $H(c_1, c_1^2/4)$, où $-\infty < c_1 < \infty$, se compose de deux domaines de transitivité, l'un d'eux ne contenant qu'un seul point $\boldsymbol{x}^\circ(c_1) = (c_1/2, 0, 0, c_1/2)$, l'autre contenant tout le reste $H(c_1, c_1^2/4) - \boldsymbol{x}^\circ(c_1)$.*

Démonstration. Nous considérons les cas suivants:

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & c_2 = 0\,, & c_1 = 0\,,\\ \text{II.} & c_2 = c_1^2/4\,, & c_1 \neq 0\,,\\ \text{III.} & c_2 < c_1^2/4\,, & -\infty < c_1 < \infty\,.\\ \text{IV.} & c_2 > c_1^2/4\,, & -\infty < c_1 < \infty\,. \end{array}$$

I. Pour démontrer que $H(0,0)$ se compose de deux domaines de transitivité, à savoir du point $\boldsymbol{x}^\circ(0) = (0,0,0,0)$ et du reste, choisissons dans le reste le point $\boldsymbol{x}_1 = (0,1,0,0)$. En substituant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ dans (5) on obtient:

$$a\gamma = -\Delta y_1, \quad a^2 = \Delta y_2, \quad \gamma^2 = -\Delta y_3. \tag{7}$$

Il s'agit de montrer que pour $\boldsymbol{y} \in H(0,0)$ et $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\circ(0)$ le système (7) n'admet pas de solutions satisfaisant à la condition (4) et que, pour $\boldsymbol{y} \in H(0,0)$ et $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^\circ(0)$, le système (7) admet toujours des solutions satisfaisant à la condition (6). La condition $\boldsymbol{y} \in H(0,0)$ prend la forme:

$$y_1^2 + y_2 y_3 = 0. \tag{8}$$

Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\circ(0)$, on a d'après (7):

$$a = \gamma = 0,$$

ce qui reste en contradiction avec (4).

Si $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^\circ(0)$, on a, en vertu de (8), $y_2^2 + y_3^2 > 0$. Dans ce cas le système (7) admet les solutions suivantes:

$$a = -\operatorname{sg} y_1 \operatorname{sg} y_2 \sqrt{|y_2|}, \quad \beta = \sqrt{|y_2|}, \quad \gamma = \sqrt{|y_3|},$$
$$\delta = -\operatorname{sg} y_1 \left(\frac{1}{\sqrt{|y_2|}} + \operatorname{sg} y_2 \sqrt{|y_3|}\right)$$

pour $y_2 \neq 0$, et:

$$a = 0, \quad \beta = \frac{\operatorname{sg} y_3}{\sqrt{|y_3|}}, \quad \gamma = \sqrt{|y_3|}, \quad \delta = 0$$

pour $y_2 = 0$, qui satisfont à la condition (6); nous posons

$$\operatorname{sg} a \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad a < 0, \\ 0 & \text{pour} \quad a = 0, \\ 1 & \text{pour} \quad a > 0. \end{cases}$$

En substituant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ(0)$ et $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\circ(0)$ dans (5) il est facile de voir que le point $\boldsymbol{x}^\circ(0)$ forme un domaine de transitivité.

II. Considérons l'ensemble $H(c_1, c_1^2/4)$ tel que $c_1 \neq 0$. Il est facile de vérifier que le point $\boldsymbol{x}^\circ(c_1) = (c_1/2, 0, 0, c_1/2) \in H(c_1, c_1^2/4)$ forme un domaine de transitivité. Choisissons dans $H(c_1, c_1^2/4)$ le point $\boldsymbol{x}_2(c_1) \neq \boldsymbol{x}^\circ(c_1)$ de coordonnées

$$\boldsymbol{x}_2(c_1) = (c_1, c_1/2, -c_1/2, 0).$$

Il s'agit de montrer que le système d'équations (5) admet pour $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2(c_1)$, $\boldsymbol{y} \in H(c_1, c_1^2/4)$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^\circ(c_1)$, $c_1 \neq 0$, des solutions telles que $\Delta \neq 0$. Après la substitution $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2(c_1)$ le système (5) prend la forme:

$$2a\delta - a\gamma - \beta\delta = \frac{2\Delta}{c_1} y_1, \quad (a-\beta)^2 = \frac{2\Delta}{c_1} y_2, \quad (\gamma-\delta)^2 = -\frac{2\Delta}{c_1} y_3 \tag{9}$$

et la condition $\boldsymbol{y} \in H(c_1, c_1^2/4)$ devient:

$$(c_1/2 - y_1)^2 + y_2 y_3 = 0. \tag{10}$$

Par la substitution:

$$a = u_1, \quad \beta = u_1 - u_2, \quad \gamma = u_3, \quad \delta = u_3 - u_4,$$

le système (9) prend la forme plus simple

$$u_2 u_4 = \frac{2\Delta}{c_1}\left(\frac{c_1}{2} - y_1\right), \quad u_2^2 = \frac{2\Delta}{c_1} y_2, \quad u_3^2 = -\frac{2\Delta}{c_1} y_3 \tag{9'}$$

et on a:

$$\Delta = u_2 u_3 - u_1 u_4.$$

Puisque $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^\circ(c_1)$, on a d'après (10): $y_2^2 + y_3^2 > 0$.

Pour $y_2 \neq 0$, le système (9') a les solutions suivantes:

$$u_1 = \sqrt{|y_2|}, \quad u_2 = \operatorname{sg} y_2 \sqrt{\frac{2|y_2|}{|c_1|}}, \quad u_4 = \operatorname{sg}\left(\frac{c_1}{2} - y_1\right) \sqrt{\frac{2|y_3|}{|c_1|}},$$
$$u_3 = \operatorname{sg} c_1 \sqrt{\frac{|c_1|}{2|y_2|}} + \frac{\operatorname{sg}(c_1/2 - y_1)}{\operatorname{sg} y_2} \sqrt{|y_3|},$$

qui satisfont à la condition (6), puisque

$$\Delta = u_2 u_3 - u_1 u_4 = \operatorname{sg} y_2 \operatorname{sg} c_1 = \pm 1.$$

Pour $y_2 = 0$, $y_3 \neq 0$, le système (9') admet les solutions:

$$u_1 = \sqrt{\frac{|c_1|}{2|y_3|}}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = \frac{\operatorname{sg} y_3}{\operatorname{sg} c_1} \sqrt{\frac{2|y_3|}{|c_1|}}.$$

On a aussi

$$\Delta = -u_1 u_4 = -\operatorname{sg} y_3 \operatorname{sg} c_1 = \pm 1,$$

donc les solutions satisfont à la condition (6).

III. Considérons dans l'ensemble $H(c_1, c_2)$, où $c_2 < c_1^2/4$, le point $\boldsymbol{x}_3(c_1, c_2)$ de coordonnées:

$$\boldsymbol{x}_3(c_1, c_2) = (c_1/2, t, t, c_1/2),$$

où t est choisi de telle manière que

$$t > 0 \quad \text{et} \quad t^2 = c_1^2/4 - c_2.$$

Supposons encore que $\boldsymbol{y}$ soit un point arbitraire de $H(c_1, c_2)$; alors le système d'équations (5) prend la forme:

$$a\gamma - \beta\delta = \frac{\Delta}{t}\left(\frac{c_1}{2} - y_1\right), \quad a^2 - \beta^2 = \frac{\Delta}{t} y_2, \quad \delta^2 - \gamma^2 = \frac{\Delta}{t} y_3 \tag{11}$$

et la condition $\boldsymbol{y} \in H(c_1, c_2)$ devient:

(12) $$(c_1/2 - y_1)^2 + y_2 y_3 = t^2 .$$

Cherchons des solutions du système d'équations (11) telles que $\Delta = \eta(\boldsymbol{y})$ (désigné dans la suite simplement par η), où:

$$\eta^2(\boldsymbol{y}) = 1 .$$

Par la substitution:

$$a = \frac{u_1+u_2}{2}, \quad \beta = \frac{u_1-u_2}{2}, \quad \gamma = \frac{u_3+u_4}{2}, \quad \delta = \frac{u_3-u_4}{2},$$

le système (11) se transforme en système:

(11′) $$u_1u_4 - u_2u_3 = \frac{2\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right), \quad u_1u_2 = \frac{\eta}{t}y_2, \quad u_3u_4 = \frac{\eta}{t}y_3$$

et on a:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(u_2u_3 + u_1u_4) .$$

Pour $y_3 = 0$ on a, d'après (12):

$$y_1 - c_1/2 = \varepsilon t, \quad \text{où} \quad \varepsilon^2 = 1 .$$

Posons, pour $\varepsilon = 1$:

$$u_1 = \eta, \quad u_2 = y_2/t, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 2$$

et pour $\varepsilon = -1$:

$$u_1 = y_2/t, \quad u_2 = \eta, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 0 .$$

Dans ces deux cas les u_1, u_2, u_3, u_4, satisfont au système d'équations (11′) ainsi qu'à la condition:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(u_2u_3 + u_1u_4) = \eta .$$

Si $y_3 \neq 0$, substituons dans (11′):

$$u_1 = z_1/z_3, \quad u_2 = z_2, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = z_3 \quad (z_3 \neq 0)$$

d'où il suit:

(11″) $$z_1 - z_2 = \frac{2\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right), \quad z_1z_2 = \frac{y_2y_3}{t}, \quad z_3 = \frac{\eta}{t}y_3$$

et

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) .$$

Maintenant il suffit de résoudre le système composé des deux premières équations du système (11″). Ce système se réduit à une équation, soit:

$$z_1^2 - z_1\frac{2\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right) - \frac{y_2y_3}{t^2} = 0$$

qui admet, d'après (12), deux solutions réelles:

$$z_1^* = \frac{\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right) + 1 \quad \left(\text{alors} \quad z_2^* = -\frac{\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right) + 1\right)$$

et

$$z_1^{**} = \frac{\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right) - 1 \quad \left(\text{alors} \quad z_2^{**} = -\frac{\eta}{t}\left(y_1 - \frac{c_1}{2}\right) - 1\right).$$

Ainsi

$$\Delta^* = \tfrac{1}{2}(z_1^* + z_2^*) = 1, \quad \Delta^{**} = \tfrac{1}{2}(z_1^{**} + z_2^{**}) = -1 .$$

IV. Considérons dans l'ensemble $H(c_1, c_2)$, où $c_2 > c_1^2/4$, le point $\boldsymbol{x}_4(c_1, c_2)$ de coordonnées:

$$\boldsymbol{x}_4(c_1, c_2) = (c_1/2, t, -t, c_1/2),$$

où

$$t = \sqrt{c_2 - c_1^2/4} .$$

Supposons encore que $\boldsymbol{y}$ soit un point arbitraire de $H(c_1, c_2)$; alors le système d'équations (9) prend la forme:

(13) $$a\gamma + \beta\delta = \frac{\Delta}{t}\left(\frac{c_1}{2} - y_1\right), \quad a^2 + \beta^2 = \frac{\Delta}{t}y_2, \quad \gamma^2 + \delta^2 = -\frac{\Delta}{t}y_3$$

et la condition $\boldsymbol{y} \in H(c_1, c_2)$ devient

(14) $$(c_1/2 - y_1)^2 + y_2y_3 = -t^2 .$$

Le système (13) ne peut avoir des solutions réelles que pour

$$\operatorname{sg}\Delta = \operatorname{sg}y_2 = -\operatorname{sg}y_3,$$

mais, d'après la condition (14), on doit avoir

$$y_2y_3 < 0$$

et nous pouvons chercher des solutions du système (13) telles que:

$$\Delta = \operatorname{sg}y_2 = -\operatorname{sg}y_3 .$$

Par la substitution:

$$\gamma = \vartheta a, \quad \delta = \varkappa\beta,$$

le système (13) se transforme en système:

(13′) $$\vartheta a^2 + \varkappa\beta^2 = \frac{\operatorname{sg}y_2}{t}\left(\frac{c_1}{2} - y_1\right), \quad a^2 + \beta^2 = \frac{|y_2|}{t}, \quad \vartheta^2a^2 + \varkappa^2\beta^2 = \frac{|y_3|}{t}$$

et on a:

$$\Delta = a\beta(\varkappa - \vartheta) .$$

En posant dans (13′):

$$v \overset{\mathrm{df}}{=} c_1/2 - y_1$$

et en supposant que $\vartheta \neq v/y_2$, nous obtiendrons pour $\varkappa$ l'expression:

$$\varkappa = \frac{\vartheta v + y_3}{\vartheta y_2 - v}.$$

Maintenant, à partir du système (13′), nous pouvons calculer α^2 et β^2, qui s'expriment par les formules:

$$\alpha^2 = \frac{t \operatorname{sg} y_2}{m(\vartheta)}, \qquad \beta^2 = \frac{(\vartheta y_2 - v)^2 \operatorname{sg} y_2}{t m(\vartheta)},$$

où

$$m(\vartheta) \overset{\mathrm{df}}{=} \vartheta^2 y_2 - 2\vartheta v - y_3 .$$

D'après (14) on a:

$$m(\vartheta) \neq 0 \quad \text{pour} \quad -\infty < \vartheta < \infty ,$$

et par suite:

$$\operatorname{sg} m(\vartheta) = \operatorname{sg} y_2 .$$

Les expressions:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{t}{|m(\vartheta)|}}, \qquad \beta = (\vartheta y_2 - v)\sqrt{\frac{1}{t|m(\vartheta)|}}, \qquad \varkappa = \frac{\vartheta v + y_3}{\vartheta y_2 - v}$$

(ϑ quelconque, mais $\vartheta \neq v/y_2$), satisfont donc au système d'équations (13′) ainsi qu'à la condition

$$\Delta = \alpha\beta(\varkappa - \vartheta) = \operatorname{sg} y_2 = \pm 1 .$$

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

La décomposition de l'espace X_4 en domaines de transitivité $D(c_1, c_2)$ et $\boldsymbol{x}^\circ(c_1)$ peut donc être représentée sous la forme suivante:

$$X_4 = \sum_{-\infty < c_1 < \infty} \boldsymbol{x}^\circ(c_1) + \sum_{\substack{-\infty < c_1 < \infty \\ -\infty < c_2 < \infty}} D(c_1, c_2) , \tag{15}$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^\circ(c_1): & \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 , \\ x_1 = x_4 = \dfrac{c_1}{2}, \quad -\infty < c_1 < \infty , \end{cases} \\[2ex] D(c_1, c_2): & \left.\begin{cases} x_1 + x_4 = c_1 , & -\infty < c_1 < \infty \\ x_1 x_4 - x_2 x_3 = c_2 , & -\infty < c_2 < \infty \end{cases}\right\} \quad c_2 \neq \dfrac{c_1^2}{4} , \\[2ex] D\left(c_1, \dfrac{c_1^2}{4}\right): & \begin{cases} x_1 + x_4 = c_1 , \\ x_1 x_4 - x_2 x_3 = \dfrac{c_1^2}{4}, \quad -\infty < c_1 < \infty , \\ (x_1 - x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 . \end{cases} \end{cases} \tag{16}$$

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur les domaines de transitivité du groupe de transformations des composantes d'un tenseur covariant du second ordre

par E. Siwek (Kraków)

§ 1. Introduction. Dans la note [1] nous avons considéré la notion générale de décomposition d'un espace d'objets géométriques d'un type donné en domaines de transitivité, ainsi que la décomposition dans le cas particulier où l'objet géométrique est un tenseur mixte de l'espace à deux dimensions.

Le but de la présente note est d'étudier le cas d'un tenseur covariant $a_{\lambda\mu}$ du second ordre de l'espace à deux dimensions. Dans le cas d'un tenseur contravariant la méthode et les résultats sont tout à fait analogues.

§ 2. Un tenseur $a_{\lambda\mu}$ de l'espace à deux dimensions (c'est-à-dire les indices parcourent les valeurs: $\lambda = 1, 2$; $\mu = 1, 2$) possède quatre composantes dont la matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se transforme, dans un changement du système de coordonnées, d'après la formule:

$$a_{\lambda'\mu'} = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\mu'}^{\mu} a_{\lambda\mu} . \tag{1}$$

($A_{\lambda'}^{\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \partial\xi^\lambda/\partial\xi^{\lambda'}$, où ξ^λ sont les coordonnées d'un point de l'espace dans lequel nous considérons le tenseur $a_{\lambda\mu}$ et $\xi^{\lambda'}$ sont les coordonnées du même point dans le nouveau système).

Admettons les notations suivantes:

$$x_1 = a_{11} , \quad x_2 = a_{12} , \quad x_3 = a_{21} , \quad x_4 = a_{22} , \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) ,$$
$$\alpha = A_{1'}^{1} , \quad \beta = A_{2'}^{1} , \quad \gamma = A_{1'}^{2} , \quad \delta = A_{2'}^{2} , \qquad W(\boldsymbol{x}) = x_1 x_4 - x_2 x_3 ,$$

et considérons l'espace X_4 (dit espace des composantes du tenseur $a_{\lambda\mu}$) de tous les points $\boldsymbol{x}$ de coordonnées *réelles* $x_1, \ldots, x_4$. Soient

$$\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$