qui est en contradiction avec (12). Pour terminer la démonstration il suffit de prendre l'intégrale de la fonction $\Phi(x)$

$$\int_{E_f} \Phi(x)\,d\mu = \gamma = \int_E\int_E |x-y|^\alpha d\mu d\mu + \int_E f(x)\,d\mu \,.$$

**Travaux cités**

[1] F. Leja, *O rozwartości arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej zbioru*, Zeszyty Naukowe UJ, Nr 3 (1957), p. 49-60.

[2] C. de la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 2 (1932), Note I, p. 223.

[3] G. Björck, *Distributions of positive mass, which maximize a certain generalized energy integral*, Arkiv för Matematik, b. 3, 3 (1956), p. 255-269.

*Reçu par la Rédaction le 26. 6. 1960*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

# Series containing the Hurwitz function

by O. M. Fomenko (Krasnodar, USSR)

Notations. We shall denote by $\vartheta(s, a)$ the Hurwitz function which for $\sigma > 1$, where $\sigma = \mathrm{Re}\, s$, is defined by the series

$$(1) \qquad \vartheta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \qquad (0 < a \leqslant 1)\,.$$

The Lerch function is defined by the series

$$(2) \qquad \varphi(x, b, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x n}}{(n+b)^s},$$

where $\sigma > 1$, and $b$ is a real constant different from 0 or a negative integer. Further, let $\omega$ denote a fixed value equal to 1 or $-1$, and let

$$\vartheta(s, a, i) = \sum_{n=0}^{i} \frac{1}{(n+a)^s} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$\vartheta(s, a, -1) \equiv 0\,.$$

In the present note we shall deal with two series which contain the Hurwitz function: the formula

$$(3) \qquad \vartheta(s, a) - \vartheta(s, a, i) - \frac{1}{\left(a - \frac{1}{2}(\omega - 1) + i\right)^{s-1}(s-1)}$$
$$= -\sum_{j=0}^{\infty} \omega^{j+1} \frac{s(s+1)\ldots(s+j)}{(j+2)!} \{\vartheta(s+j+1, a) - \vartheta(s+j+1, a, i)\}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

holds for all values of $s$. The proof of this formula consists of considering two particular cases $\omega = 1$ and $\omega = -1$. Let for instance $\omega = 1$. We shall rewrite the right-hand side of (3) in the following way:

$$-\frac{1}{s-1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{s-1}}\left\{\frac{(s-1)s}{2!}\cdot\frac{1}{(n+a)^{2}}+\frac{(s-1)s(s+1)}{3!}\cdot\frac{1}{(n+a)^{3}}+\dots\right\}$$

$$=-\frac{1}{s-1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{s-1}}\left\{\left(1-\frac{1}{n+a}\right)^{1-s}-1-\frac{s-1}{n+a}\right\}$$

$$=-\frac{1}{s-1}\sum_{n=i+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+a-1)^{s-1}}-\frac{1}{(n+a)^{s-1}}-\frac{s-1}{(n+a)^{s}}\right\}$$

$$=\vartheta(s,a)-\vartheta(s,a,i)-\frac{1}{(a+i)^{s-1}(s-1)}\,.$$

Changing the order of summation is correct because $\sigma>0$ and because of the absolute convergence of the series

$$\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{\sigma-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|s|(|s|+1)\dots(|s|+k)}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{(n+a)^{k+2}}$$
$$=\sum_{n=i+1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{\sigma}}\left\{\left(1-\frac{1}{n+a}\right)^{-|s|}-1\right\}.$$

Since the series in the right-hand side of (3) is convergent for all values of $s$, the formula is proved by the method of analytic extensions. For $\omega=1$, $i=0$, $a=1$ we obtain from (1) the Landau formula (see [1]). Formula (3) may serve for an analytic extension of Hurwitz function to the whole complex plane.

Let us consider the second series (which is also convergent for all values of $s$):

(4) $\varphi\left(\tfrac{1}{2},\,2a+2i+\tfrac{1}{2}(3-\omega),\,s\right)$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{j}\,\frac{s(s+1)\dots(s+j)}{(j+1)!\,2^{s+j+1}}\,\{\vartheta(s+j+1,a)-\vartheta(s+j+1,a,i)\}$$
$$(i=-1,0,1,\dots)\,.$$

The proof of (4) is analogous to the proof of (3), and we shall omit it.

For $\omega=1$, $i=-1$, $a=1$ we obtain the formula of Ramasvami (see [1]).

## Reference

[1] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford 1951.

*Reçu par la Rédaction le 31. 5. 1960*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

# Sur les domaines de transitivité d'un groupe de transformations

par S. Gołąb et E. Siwek (Kraków)

**§ 1. Introduction.** Soit dans l'espace $X$, dont nous désignerons les éléments par $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\dots$, un groupe $G$ de transformations

(1) $$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\,,$$

où la lettre $\boldsymbol{p}$ désigne certains paramètres $p_1, p_2, \dots, p_q$. Supposons que pour chaque $\boldsymbol{p}$ la transformation (1) soit définie dans l'espace $X$ tout entier.

Considérons le cas général où le groupe $G$ n'est pas transitif, c'est-à-dire, pour un point $\boldsymbol{x}$ fixe, l'ensemble de toutes les images $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ de ce point n'épuise pas tout l'espace $X$. Posons pour un point $\boldsymbol{x}$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\overset{\mathrm{df}}{=}\underset{\boldsymbol{y}}{E}\,\{\Sigma_{\boldsymbol{p}}[\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})]\}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ est composé de toutes les images de l'élément $\boldsymbol{x}$ pour toutes les transformations du groupe $G$ (¹). Considérons deux ensembles $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_1)$ et $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_2)$ correspondant à différents éléments $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ de l'espace $X$. Il est facile de montrer que ces ensembles ne peuvent être qu'identiques ou disjoints. On peut donc décomposer l'espace $X$ en couches disjointes $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$

$$X=\sum\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\,.$$

Nous appellerons les couches $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ *domaines de transitivité du groupe* $G$, car dans chaque couche $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ le groupe $G$ est déjà transitif.

Si le groupe $G$ est transitif (par exemple si $G$ est le groupe affine général) l'espace $X$ forme une seule couche. Si, par exemple, $G$ est le groupe centro-affine, alors il n'est pas transitif et l'espace $X$ se décompose en deux couches: l'une d'elles ne contient qu'un seul point (le centre), l'autre tout le reste.

(¹) Lie et Engel appellent les ensembles $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ *die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten* (*Theorie der Transformationsgruppen I*, p. 224).