ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Quelques théorèmes sur les intégrales bornées de certaines équations différentielles ordinaires du second ordre

par T. Dłotko (Katowice)

Il existe un nombre considérable de travaux sur les solutions bornées des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre. Les méthodes qui y sont utilisées peuvent parfois être appliquées à certains types, relativement simples, d'équations ou de systèmes d'équations non linéaires.

Dans la première partie de cette note je me propose d'établir, en appliquant les mêmes méthodes, quelques conditions suffisantes pour que les solutions des équations différentielles du type

$$a(t)u''+b(t)u'+\big(1+\varphi(t)\big)f(u)=\Phi(t) \tag{1}$$

puissent être prolongées indéfiniment à droite tout en restant bornées. Dans la seconde partie je vais démontrer quelques propositions analogues relatives à certains systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Quelques-uns des résultats que je vais obtenir ne seront que des généralisations de certains théorèmes, dûs à Ju. A. Klokoff [4], concernant des cas un peu plus simples. Je me permets de remercier M. A. Bielecki dont les précieux conseils et l'aide, m'ont permis de rédiger cette note.

I. Il nous sera commode d'énoncer séparément les hypothèses qui interviendront dans nos théorèmes.

Hypothèse H_1. Les fonctions $\Phi(t)$, $b(t)\geqslant 0$, $a(t)>0$ et la dérivée $a'(t)$ sont continues dans l'intervalle infini $[t_0,\infty)$ et

$$a'(t)\leqslant 2b(t)\,. \tag{2}$$

La fonction $f(u)$ est continue dans l'intervalle infini $(-\infty,+\infty)$ et

$$\lim_{|u|\to\infty}F(u)=\infty\,,\quad \text{où}\quad F(u)=\int_0^u f(s)\,ds\,. \tag{3}$$

En vertu de (3) la fonction $F(u)$ admet un minimum:

$$(4)\qquad -\mu = \min F(u) = F(\bar{u}) = \int_0^{\bar{u}} f(s)\,ds \leqslant 0\,,$$

d'où

$$(5)\qquad G(u) = F(u)+\mu = \int_{\bar{u}}^{u} f(s)\,ds \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad u \in (-\infty,\, \infty)\,.$$

HYPOTHÈSE H_2. Les fonctions $a(t)$ et $\Phi(t)$ satisfont aux inégalités

$$(6)\qquad a(t) \geqslant \delta = \text{const} > 0\,, \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0\,,$$

$$(7)\qquad \int_{t_0}^{\infty} |\Phi(t)|\,dt = \Lambda < \infty\,.$$

Ceci posé, nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Dans l'hypothèse* H_1 *toute solution* $u(t)$ *de l'équation différentielle*

$$(8)\qquad a(t)u''+b(t)u'+f(u) = \Phi(t)\,,$$

définie dans l'intervalle $[t_0,\, \beta)$, *où* $\beta > t_0$, *peut être prolongée sur l'intervalle* $[t_0,\, \infty)$ *tout entier. Si, en outre, l'hypothèse* H_2 *est remplie, toute solution* $u(t)$ *saturée à droite, c'est-à-dire prolongée sur l'intervalle* $[t_0,\, \infty)$ *tout entier, ainsi que sa dérivée* $u'(t)$, *restent bornées dans* $[t_0,\, \infty)$.

Démonstration. Soit $u(t)$ une solution de l'équation (8), définie dans l'intervalle $[t_0,\, \beta)$, où $t_0 < \beta \leqslant \infty$. On a donc

$$a(t)u''+b(t)u'+f\big(u(t)\big) = \Phi(t)$$

pour $t \in [t_0,\, \beta)$. Multiplions les deux membres de cette égalité par $2u'(t)$ et intégrons entre t_0 et t, en appliquant au premier terme du premier membre la formule d'intégration *per partes*. Il vient

$$(9)\qquad a(t)\big(u'(t)\big)^2+\int_{t_0}^{t} \big(2b(\tau)-a'(\tau)\big)\big(u'(\tau)\big)^2 d\tau+2G\big(u(t)\big) = a_0 v_0^2+2G(u_0)+2\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)u'(\tau)\,d\tau\,,$$

où $a_0 = a(t_0)$, $u_0 = u(t_0)$ et $v_0 = u'(t_0)$. Nous allons démontrer que la dérivée $u'(t)$ est bornée dans l'intervalle $[t_0,\, \beta)$ si celui-ci est fini. Dans ce but, supposons que $\beta < \infty$. Il s'ensuit que

$$A = \inf_{t_0 \leqslant t \leqslant \beta} a(t) > 0\,, \qquad 0 \leqslant M < \frac{2}{A}\int_{t_0}^{\beta} |\Phi(\tau)|\,d\tau < \infty$$

et

$$0 \leqslant N = A^{-1}\big(a_0 v_0^2+2G(u_0)\big)\,.$$

Donc, à cause de l'identité (9) et l'inégalité (5), on a

$$|u'(t)|^2 \leqslant N+\frac{2}{A}\int_{t_0}^{t} |\Phi(\tau)|\,|u'(\tau)|\,d\tau\,.$$

Mais

$$|u'(t)| \leqslant |u'(t)|^2+1\,, \quad \text{donc}$$

$$|u'(t)| \leqslant N+1+\int_{t_0}^{t} 2A^{-1}|\Phi(\tau)|\,|u'(\tau)|\,d\tau$$

et par conséquent

$$(10)\qquad |u'(t)| \leqslant (N+1)\exp\Big(\int_{t_0}^{\beta} 2A^{-1}|\Phi(\tau)|\,d\tau\Big) < \infty\,,$$

en vertu du lemme bien connu suivant (cf. [1], chap. II, § 2):

Si $c = \text{const} \geqslant 0$, si les fonctions $u(t) \geqslant 0$ et $v(t) \geqslant 0$ sont continues pour $t \in [t_0,\, \beta)$ et si

$$u(t) \leqslant c+\int_{t_0}^{t} v(\tau)u(\tau)\,d\tau\,, \quad \text{pour} \quad t \in [t_0,\, \beta)\,,$$

alors

$$u(t) \leqslant c\exp\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau\,, \quad \text{pour} \quad t \in [t_0,\, \beta)\,.$$

Ainsi nous avons démontré que la dérivée $u'(t)$ reste bornée dans l'intervalle fini $[t_0,\, \beta)$. Mais il en résulte facilement, que les fonctions $u(t)$ et $u''(t)$ doivent aussi être bornées et, par conséquent, les fonctions $u(t)$ et $u'(t)$ tendent vers des limites finies bien déterminées, lorsque t tend vers β en croissant (voir p. ex. [3], théorème 1, p. 135). Évidemment, cela suffit pour que la solution $u(t)$ admette un prolongement au-delà de β et, en se basant sur ces faits, on démontre d'une manière bien connue (cf. [3], théorème 2, p. 135) que l'on peut prolonger la solution en question sur l'intervalle $[t_0,\, \infty)$ tout entier.

Envisageons maintenant le cas plus particulier où, outre l'hypothèse H_1, l'hypothèse H_2 est aussi remplie. Nous allons prouver que toutes les solutions saturées à droite de l'équation (8), ainsi que leurs dérivées du premier ordre, sont alors bornées dans tout l'intervalle $[t_0,\, \infty)$. En effet, supposons que $u(t)$ soit une solution particulière définie dans $[t_0,\, \infty)$. Puisque, d'après (6),

$$A = \inf_{t_0 \leqslant t \leqslant \beta} a(t) \geqslant \delta > 0$$

pour tout $\beta > t_0$, il résulte de (10) et (7) que

(11) $$|u'(t)| \leqslant K = (N+1)\exp\Big(2\delta^{-1}\int_{t_0}^{\infty} |\Phi(t)|dt\Big)$$

pour $t \geqslant t_0$. L'égalité (9) est maintenant valable pour tout $t \geqslant t_0$ et son second membre ne surpasse pas le nombre constant

$$2C = a_0 v_0^2 + 2G(u_0) + 2K\int_{t_0}^{\infty} |\Phi(t)|dt \geqslant 0\,,$$

où $a_0 = a(t_0)$, $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Tous les trois termes du premier membre de l'identité (9) étant non négatifs à cause de (2) et (5), on a évidemment, pour $t \geqslant t_0$,

$$G\big(u(t)\big) = F\big(u(t)\big) + \mu \leqslant C\,,$$

c'est-à-dire

(12) $$F\big(u(t)\big) \leqslant C - \mu\,, \qquad a(t)\big(u'(t)\big)^2 \leqslant 2C\,,$$

d'où

(13) $$|u'(t)| \leqslant (2C\delta^{-1})^{1/2}$$

et

(14) $$\int_{t_0}^{\infty} \big(2b(t) - a'(t)\big)^2\big(u'(t)\big)^2 dt \leqslant 2C\,.$$

Ainsi nous avons montré que la dérivée $u'(t)$ est bornée dans l'intervalle $[t_0, \infty)$. Quant à la solution elle-même, en vertu de (3) et (12), si nous savions résoudre l'inégalité (12) pour toute valeur possible de C, nous pourrions en obtenir une limitation exacte de l'ensemble des valeurs de toute solution particulière de l'équation (8).

Remarque I. Nous avons obtenu, en passant, l'évaluation (14) bien connue dans les cas plus spéciaux.

Remarque II. La condition (2) est essentielle. Si nous l'avions rejetée, le théorème 1 ne subsisterait plus; en effet, l'équation linéaire et homogène

$$t^2(1+\ln t)u'' + tu' + u = 0\,, \qquad t > 1$$

admet la solution particulière $u(t) = -\ln t$ non bornée dans l'intervalle $[1, \infty)$ bien que toutes les autres conditions du théorème soient remplies.

Cependant, même dans le cas où la condition (2) n'est pas satisfaite, si la dérivée $u'(t)$ d'une solution particulière de l'équation (8) est bornée dans $[t_0, \infty)$, il en sera de même de la solution $u(t)$ elle-même, car l'intégrale

$$\int_{t_0}^{\infty} |\Phi(t)||u'(t)|dt$$

sera encore finie.

Théorème 2. *Dans l'hypothèse* H_1 *toute solution* $u(t)$ *de l'équation différentielle homogène*

$$a(t)u'' + b(t)u' + f(u) = 0$$

définie dans l'intervalle $[t_0, \beta)$, $\beta > t_0$, *peut être prolongée sur l'intervalle* $[t_0, \infty)$ *tout entier et reste bornée dans cet intervalle.*

Démonstration. Grâce au théorème 1 nous pouvons admettre que toutes les intégrales que nous allons envisager sont définies dans l'intervalle $[t_0, \infty)$. La fonction $\Phi(t)$ étant supposée partout nulle, l'inégalité

$$F\big(u(t)\big) \leqslant \text{const}$$

résulte immédiatement de la formule (9), ce qui achève la démonstration.

Remarque. Ce résultat généralise un théorème, dû à Ju. A. Klokoff (cf. [4], théorème I, p. 190), qui s'obtient du théorème 2 en posant $b(t) \equiv 0$, pour $t \geqslant t_0$.

Nous nous occuperons maintenant de l'équation (1). Admettons l'hypothèse suivante:

Hypothèse H_3. La fonction $\varphi(t)$ et sa dérivée $\varphi'(t)$ sont définies et continues dans l'intervalle $[t_0, \infty)$.

Soit $u(t)$ une solution de l'équation (1) définie dans l'intervalle $[t_0, \beta)$, où $t_0 < \beta \leqslant \infty$. Tout à fait comme dans la démonstration du théorème 1, nous obtenons la formule

(15) $$a(t)\big(u'(t)\big)^2 + \int_{t_0}^{t} \big(2b(\tau) - a'(\tau)\big)\big(u'(\tau)\big)^2 d\tau + 2G\big(u(t)\big)\big(1+\varphi(t)\big) - \\ - 2\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau)\,G\big(u(\tau)\big)\,d\tau = a_0 v_0^2 + 2G_0(1+\varphi_0) + 2\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)\,u'(\tau)\,d\tau\,,$$

où $t \in [t_0, \beta)$, $a_0 = a(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $G_0 = G(u_0)$. Cette formule est beaucoup plus compliquée que la formule (9). C'est pourquoi nous ne pourrons pas l'exploiter sans hypothèses H_1 et H_3, que $\varphi(t) \geqslant -1$ et $\varphi'(t) \leqslant 0$. Tous les termes du premier membre de l'égalité (15) étant non négatifs, le raisonnement de la première partie de la démonstration du théorème 1 s'applique encore ici et nous constatons sans peine que chaque solution de l'équation (1) peut alors être prolongée sur l'intervalle $[t_0, \infty)$ tout entier. Bien plus, si $\varphi(t) \geqslant \lambda > -1$, pour $t \geqslant t_0$, et si les inégalités (6) et (7) ont lieu, la suite de la démonstration du théorème 1 est aussi applicable. Donc nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3. *Dans les hypothèses* H_1 *et* H_3, *si* $\varphi(t) \geqslant -1$ *et* $\varphi'(t) \leqslant 0$, *pour* $t \geqslant t_0$, *toute solution* $u(t)$ *de l'équation* (1) *définie dans l'intervalle* $[t_0, \beta)$ *peut être prolongée sur l'intervalle infini* $[t_0, \infty)$. *Si, en outre* $\varphi(t) \geqslant \lambda > -1$ *pour* $t \geqslant t_0$ *et si l'hypothèse* H_2 *est remplie, toutes les solutions et leurs dérivées sont bornées dans tout l'intervalle* $[t_0, \infty)$.

Remarque. Dans le cas où $\Phi(t) \equiv 0$ dans $[t_0, \infty)$, la condition (6) n'est pas indispensable lorsqu'il s'agit de prouver que les solutions sont bornées (dans ce cas, leurs dérivées peuvent ne pas être bornées).

THÉORÈME 4. *Dans les hypothèses* H_1, H_2 *et* H_3, *si*

$$\lim_{t\nearrow\infty} \varphi(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{\infty} |\varphi'(t)| dt < \infty,$$

toute solution $u(t)$ *de l'équation différentielle homogène*

$$a(t)u'' + b(t)u' + \big(1+\varphi(t)\big)f(u) = 0, \tag{16}$$

définie dans l'intervalle $[t_0, \infty)$, *est bornée dans cet intervalle.*

Démonstration. La formule (15) prend, dans le cas envisagé, la forme simplifiée

$$a(t)\big(u'(t)\big)^2 + \int_{t_0}^{t} \big(2b(\tau) - a'(\tau)\big)\big(u'(\tau)\big)^2 d\tau + 2G\big(u(t)\big)\big(1+\varphi(t)\big) = c + 2\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau) G\big(u(\tau)\big) d\tau, \tag{17}$$

où $c = a_0 v_0^2 + 2G_0(1+\varphi_0)$. Fixons un nombre $t_1 \geqslant t_0$ tel que l'on ait $1+\varphi(t) \geqslant \frac{1}{2}$ pour $t \geqslant t_1$. Nous aurons, en vertu de (17), pour $t \geqslant t_1$

$$G\big(u(t)\big) \leqslant c_1 + 2\int_{t_0}^{t} |\varphi'(\tau)|\, G\big(u(\tau)\big) d\tau$$

où $c_1 = c + 2\int_{t_0}^{t} |\varphi'(\tau)| G\big(u(\tau)\big) d\tau$ et par conséquent

$$F\big(u(t)\big) = G\big(u(t)\big) - \mu \leqslant c_1 \exp\Big(2\int_{t_0}^{t} |\varphi'(\tau)|\, d\tau\Big)$$

pour $t \geqslant t_1$; donc la fonction $u(t)$ est bornée encore dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ puisqu'elle est continue.

Remarque. En admettant que $a(t) \equiv 1$ et $b(t) \equiv 0$ partout dans l'intervalle $[t_0, \infty)$, on obtient du théorème 4, comme cas particulier, un théorème dû à Ju. A. Klokoff (voir [4], théorème II, p. 191-192).

II. Passons aux systèmes d'équations différentielles de la forme

$$a_i(t)u_i'' + b_i(t)u_i' + \big(1+\varphi_i(t)\big)\frac{\partial F}{\partial u_i}\big(u_1(t), \ldots, u_n(t)\big) = \Phi_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

D'abord nous énoncerons quelques hypothèses.

HYPOTHÈSE H_4. Les fonctions $\Phi_i(t)$, $b_i(t) \geqslant 0$, $a_i(t) > 0$, $a_i'(t)$, $\varphi_i(t)$ et $\varphi_i'(t)$, $i = 1, \ldots, n$, sont continues dans l'intervalle $[t_0, \infty)$.

La fonction $F(u_1, \ldots, u_n)$ est définie et continue dans l'espace à n dimensions tout entier et

$$\lim_{\|u\|\to\infty} F(u_1, \ldots, u_n) = \infty, \tag{19}$$

où

$$\|u\| = (u_1^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}.$$

HYPOTHÈSE H_5. Les fonctions $a_i(t)$ et $\Phi_i(t)$ satisfont aux inégalités

$$a_i(t) \geqslant \delta > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0, \tag{20}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} |\Phi_i(t)|\, dt < \infty, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0. \tag{21}$$

HYPOTHÈSE H_6. Les fonctions $a_i(t)$, $a_i'(t)$, $b_i(t)$, $\varphi_i(t)$ et $\varphi_i'(t)$ satisfont, pour $t \geqslant t_0$, aux inégalités

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad a_i'(t) \leqslant 2_i b(t), \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\text{(b)} \quad a_i'(t) \leqslant 2b_i(t) + a_i(t)\varphi_i'(t)\big(1+\varphi_i(t)\big)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{22}$$

Admettons d'abord seulement les hypothèses H_4 et H_6 (a) et envisageons un système de fonctions $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ définies dans l'intervalle $[t_0, \beta)$, où $t_0 < \beta \leqslant \infty$, et satisfaisant aux équations (18). Multiplions les équations (18) membre à membre par $2u_i'(t)$ respectivement et intégrons-les en appliquant convenablement la formule d'intégration *per partes*. De même qu'auparavant il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\big(u_i'(t)\big)^2 + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} \big(2b_i(\tau) - a_i'(\tau)\big)\big(u_i'(\tau)\big)^2 d\tau + \\ &+ 2G\big(u_1(t), \ldots, u_n(t)\big)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\Big) - 2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} \varphi_i'(\tau) G\big(u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)\big) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i0} v_{i0}^2 + 2G_0\Big(1 + \sum_{i=1}^{n}\varphi_{i0}\Big) + 2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} \Phi_i(\tau) u_i'(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{23}$$

pour $t \in [t_0, \beta)$, où $G(u_1, \ldots, u_n) = F(u_1, \ldots, u_n) - \min F(u_1, \ldots, u_n)$, $a_{i0} = a_i(t_0)$, $u_{i0} = u_i(t_0)$, $v_{i0} = u_i'(t_0)$, $\varphi_{i0} = \varphi_i(t_0)$ et $G_0 = G(u_{10}, \ldots, u_{n0})$.

Cette formule, tout à fait analogue à l'équation (9), conduit aux théorèmes suivants:

THÉORÈME 5. *Si, dans les hypothèses* H_4 *et* H_6 (a), *on a de plus* $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t) \geqslant -1$ *et* $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i'(t) \leqslant 0$, *pour* $t \in [t_0, \infty)$, *toute solution du système d'équations* (18) *peut être prolongée sur tout l'intervalle* $[t_0, \infty)$.

Si, de plus, l'hypothèse H_5 *est remplie et si* $\varphi_i(t) \geqslant \lambda > -1$, *toute solution du système* (18) *saturée à droite, ainsi que sa dérivée, restent bornées dans l'intervalle* $[t_0, \infty)$.

Démonstration. En effet, en suivant le raisonnement de la démonstration du théorème 1 on constate sans peine que si une solution $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, est définie dans l'intervalle $[t_0, \beta)$, où $t_0 < \beta < \infty$, alors

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n} |u_i'(t)| \leqslant C + \delta^{-1} \int_{t_0}^{t} 2\Psi(\tau) v(\tau) d\tau$$

pour $t \in [t_0, \beta)$ où $\Psi(t) = \max_{i=1,\ldots,n} |\Phi_i(t)|$ et $C = n + \delta^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i0} v_{i0}^2 + 2G_0\big(1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i0}\big)\Big)$, d'où

$$|u_i'(t)| \leqslant v(t) \leqslant C \exp\Big(2 \int_{t_0}^{\beta} \Psi(\tau) d\tau\Big), \quad i = 1, \ldots, n$$

pour $t \in [t_0, \beta)$.

Les $u_i'(t)$ étant bornées pour $t \in [t_0, \beta)$, il en est de même des fonctions $u_i(t)$ et $u_i''(t)$. Donc toutes les fonctions $u_i(t)$ et $u_i'(t)$ tendent vers des limites bien déterminées lorsque t tend vers β en croissant et, par conséquent, la solution en question se prolonge au-delà de β, ce qui suffit pour démontrer que l'on peut prolonger cette solution jusqu'à l'infini. La première partie du théorème est ainsi établie.

Quant à la seconde, nous pouvons encore appliquer, sans modifications essentielles, le raisonnement suivi dans la démonstration du théorème 1.

Remarque. En admettant que $\Phi_i(t) \equiv 0$, $b_i(t) \equiv 0$ et $\varphi_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, pour $t \geqslant t_0$ nous obtenons, comme cas particulier du théorème 5, un théorème plus simple, dû à Ju. A. Klokoff (voir [4], théorème III, p. 192).

THÉORÈME 6. *Dans les hypothèses* H_4 *et* H_6 (a) *et sous la condition que*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_i(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{\infty} |\varphi'(t)| dt < \infty, \quad i = 1, \ldots, n$$

toute solution $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ *définie dans l'intervalle* $[t_0, \infty)$ *tout entier, du système d'équations différentielles homogènes*

$$a_i(t) u_i'' + b_i(t) u_i' + \big(1 + \varphi_i(t)\big) \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{24}$$

est bornée partout dans $[t_0, \infty)$.

Démonstration. En effet, il n'y a qu'à appliquer le raisonnement de la démonstration du théorème 4 pour montrer que la fonction

$$G\big(u_1(t), \ldots, u_n(t)\big) \leqslant \bar{C} \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} |\varphi_i(t)| dt\Big),$$

ce qui suffit pour achever la démonstration.

Remarque. En adjoignant aux hypothèses du théorème 6 encore la condition $a_i(t) \geqslant \delta > 0$, $i = 1, \ldots, n$ nous pourrions démontrer sans peine que les fonctions $u_i'(t)$ sont aussi bornées, car nous aurions, dans ce cas,

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i'(t)\big)^2 \leqslant \text{const}$$

pour les valeurs suffisamment grandes de t.

THÉORÈME 7. *Dans les hypothèses* H_4 *et* H_6 (b) *et sous la condition que*

$$d^2 \geqslant \varphi_i(t) \geqslant \eta > -1 \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0,$$

toute solution $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ *peut être prolongée sur tout l'intervalle* $[t_0, \infty)$. *Si l'hypothèse* H_5 *est encore remplie, toute solution* $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, *est bornée pour* $t \geqslant t_0$, *ainsi que la dérivée* $u_i'(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Comme dans les démonstrations précédentes, soient $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, des solution du système d'équations différentielles (18) et $t \in [t_0, \beta)$. Nous aurons alors l'égalité

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t)}{1+\varphi_i(t)} \big(u_i'(t)\big)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{2b_i(\tau)\big(1+\varphi_i(\tau)\big) + a_i(\tau)\varphi_i(\tau) - a_i'(\tau)\big(1+\varphi_i(\tau)\big)}{\big(1+\varphi_i(\tau)\big)^2} \big(u_i'(\tau)\big)^2 d\tau + \\ &+ 2G(u_1, \ldots, u_n) = 2\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{\Phi_i(\tau)}{1+\varphi_i(\tau)} u_i'(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t_0) v_{i0}^2}{1+\varphi_i(t_0)} + 2G(u_{10}, \ldots, u_{n0}). \end{aligned} \tag{25}$$

De l'égalité (25) et des hypothèses admises nous déduisons enfin la conclusion du théorème (7) en suivant le raisonnement de la démonstration du théorème 5.

Travaux cités

[1] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.

[2] A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, New York 1955.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*, Leipzig 1955.

[4] Ju. A. Klokoff (Ю. Я. Клоков), *Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Успехи Мат. Наук, Том XIII, вып. 2 (80) (1958), p. 189-192.

Reçu par la Rédaction le 9. 1. 1960