ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Über zulässige Anfangswertaufgaben für quasi lineare partielle Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion

von M. Burnat (Warszawa)

Für das Gleichungssystem

$$(1_\nu) \qquad L^{(\nu)}(u) = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_\mu} - a^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_n, u) = 0\,,$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, k\,, \qquad 1 < k \leqslant n$$

kann man folgende Anfangswertaufgaben stellen:

a) Auf einer $n-1$ dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$S_{n-1} \qquad (x_\mu = \Phi_\mu(s_1, \ldots, s_{n-1}),\ \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

soll die Lösung u die Anfangsbedingung

$$(2) \qquad u\big(\Phi_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \Phi_n(s_1, \ldots, s_{n-1})\big) = \Psi(s_1, \ldots, s_{n-1})$$

erfüllen.

b) Auf einer $n-k$ dimensionalen Mannigfaltigkeit S_{n-k} ist die Lösung u vorgegeben.

Es ist bekannt, daß die Aufgabe b) korrekt gestellt ist [1], das heißt immer eine Lösung besitzt, welche stetig von der Anfangsbedingung aghängt. Im Gegensatz dazu ist die Aufgabe a) nicht für jede Anfangsbedingung (2) lösbar. Es kommt aber in manchen Fällen vor, daß wir wissen wollen welche Anfangswertaufgaben a) für das System (1) lösbar sind. Solche Aufgaben werden wir für das System (1) zulässig nennen. Als Beispiel kann uns folgende Aufgabe dienen.

Betrachten wir das Gleichungssystem:

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{(p)}(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} = a^{(p)}(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k)\,,$$
$$p = 1, 2, \ldots, k\,.$$

[1] Siehe [1], Seite 79-84.

Um einige Lösungen des Systems (3) zu erhalten, können wir uns auf die Klasse von $u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n)$ beschränken, für welche Funktionen $f_1(z), \dots, f_{k-1}(z)$ existieren, so daß

$$u_i = f_i(u_k), \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \tag{4}$$

Wenn wir jetzt (4) in (3) einsetzen, dann bekommt (3) die Gestalt (1) mit einer unbekannten Funktion u_k:

$$\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu^{(p)}(x_1, \dots, x_n, u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_\mu} = b^{(p)}(x_1, \dots, x_n, u_k), \quad p = 1, 2, \dots, k. \tag{5}$$

Im Falle wenn die Anfangswertaufgabe a) für das System (5) zulässig ist, kann die Auflösung des Systems (3) auf die Auflösung einer Gleichung erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion zurückgeführt werden.

Die genannte Klasse (die Klasse der einfachen Wellen, siehe Kap. III) ist recht eng. Führen wir aber in (3), mit Hilfe

$$\begin{aligned} u_p &= u_p(y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_k), \quad p = 1, 2, \dots, k, \\ x_\mu &= x_\mu(y_1, \dots, y_n), \quad \mu = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{6}$$

neue Veränderliche und neue unbekannte Funktionen $v_1, \dots, v_k$ ein, dann erhält man im allgemeinen für jede Transformation (6) eine wesentlich neue Klasse von Lösungen des Systems (3) (siehe Schlußbemerkung). In diesem Sienne scheint die angegebene Klasse recht breit zu sein. Es entsteht die Frage, wie weit man auf diesem Wege alle Lösungen von (3) bekommen kann.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, manche Kriterien der Zulässigkeit der Aufgabe a) für das System (1) anzugeben. Die Arbeit besteht aus drei Teilen und einer Schlußbemerkung. Im Kap. I geben wir die Bezeichnungen und einige einfache Hilfssätze an. Im Kap. II beschäftigen wir uns mit der Zulässigkeit der Aufgabe a). Die erhaltenen Resultate sind von lokalem Charakter. Kapitel III ist einigen aerodynamischen Anwendungen gewidmet. In der Schlußbemerkung wird die Tragweite unserer Kriterien besprochen und es werden einige weitere offene Probleme gestellt.

Am Schluß möchte ich Herrn J. Bonder für die zahlreichen Diskussionen, welche in meiner Arbeit eine fundamentale Rolle spielten, herzlichen Dank ausdrücken. Es ist auch meine Pflicht Herrn J. Szarski für seine sehr eingehenden Bemerkungen zu danken.

I. Voraussetzungen und Hilfsbemerkungen

Wir betrachten in einem n-dimensionalen Raume $(p_1, \dots, p_n)$ m-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten $(m \leqslant n)$.

Wenn eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit M_m auf einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit N_k liegt $(m \leqslant k)$, dann schreiben wir $M_m \subset N_k$.

Eine Schar von Mannigfaltigkeiten welche von Parametern $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ abhängt, bezeichnen wir durch $M_k^{(\mu_1, \dots, \mu_r)}$, oder kurz durch $M_k^{(\mu)}$.

Wenn eine Schar $M_k^{(\mu_1, \dots, \mu_{m-k})}$ und eine Mannigfaltigkeit N_m $(k \leqslant m)$ gegeben ist, für welche:

1) $M_k^{(\mu)} \subset N_m$ für jedes (μ);

2) durch jeden Punkt von N_m geht genau eine Mannigfaltigkeit der schar $M_k^{(\mu)}$; dann sagen wir, daß N_m durch die Schar $M_k^{(\mu)}$ abgeschichtet ist.

Es sei jetzt ein System von totalen Differentialgleichungen gegeben:

$$dp_i = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(p_1, \dots, p_n)\,dp_j, \quad k < n, \quad i = k+1, \dots, n. \tag{7}$$

Die Funktionen

$$p_i = p_i(p_1, \dots, p_k), \quad i = k+1, \dots, n. \tag{8}$$

sind Lösungen des Systems (7), wenn

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j}(p_1, \dots, p_k) \equiv b_{ij}\big(p_1, \dots, p_k, p_{k+1}(p_1, \dots, p_k), \dots, p_n(p_1, \dots, p_k)\big), \quad i = k+1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Die Mannigfaltigkeit welche durch (8) dargestellt ist, nennen wir Integralmannigfaltigkeit des Systems (7).

Wir sagen, daß das System (7) vollständig integrierbar [2] ist, wenn es eine Schar von Integralmannigfaltigkeiten $M_k^{(\mu_1, \dots, \mu_{n-k})}$ besitzt, welche den ganzen Raum $(p_1, \dots, p_n)$ abschichten.

Es gilt folgender

SATZ [3]. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System von totalen Differentialgleichungen* (7) *vollständig integrierbar sei, lautet* (*unter der Voraussetzung, daß die* b_{ij} *einmal stetig differenzierbar sind*)

$$\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial p_\beta} - \frac{\partial b_{i\beta}}{\partial p_\alpha} + \sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial b_{i\alpha}}{\partial p_j}b_{j\beta} - \frac{\partial b_{i\beta}}{\partial p_j}b_{j\alpha}\right) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, k, \quad i = k+1, \dots, n. \tag{9}$$

Wir formulieren noch den

HILFSSATZ 1. *Wenn das System* (7) *vollständig integrierbar ist,* b_{ij} *einmal stetig differenzierbar sind und* $b_{n,j}(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) \equiv 0$ $(j = 1, 2, \dots, k)$, *dann ist das System*

$$dp_i = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)\,dp_j, \quad i = k+1, \dots, n-1$$

im Raume $(p_1, \dots, p_{n-1})$ *vollständig integrierbar.*

[2] Siehe [2], Seite 26-30, auch [3], [4].

[3] Siehe [2], Seite 26-30, auch [3], [4].

Der Hilfssatz ist eine einfache Folge der Bedingung (9).

Betrachten wir jetzt das System (1). Die Räume $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(x_1, \ldots, x_n, u)$ werden wir entsprechend durch E_n und E_{n+1} bezeichnen. Folgende Voraussetzungen werden angenommen:

α) Die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_n, u)$, $a^{\nu}(x_1, \ldots, x_n, u)$ des Systems (1) besitzen stetige erste Ableitungen.

β) Die charakteristischen Vektoren $\boldsymbol{a}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}, a^{(\nu)})$ sind linear unabhängig und zwar ist:

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_k^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{(k)} & \ldots & a_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{10}$$

γ) Im Raume E_{n+1} existiert die $n-k+1$ parametrige Schar von Mannigfaltigkeiten $H_k^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k+1})}$, welche den Raum E_{n+1} abschichtet, wo $H_k^{(\lambda)}$ charakteristische Mannigfaltigkeiten [4] für alle Gleichungen (1_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ sind.

Die Voraussetzung γ) kann auch in einer anderen Formulierung angegeben werden, welche mit der obigen gleichbedeutend ist. Auf Grund der Bedingung (10) können wir ein neues Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(\mu)}(u) &= \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n, u) L^{(\nu)}(u) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{a}_\nu^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} - \tilde{a}^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n, u) , \\ & \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned} \tag{11}$$

bauen, welches dem System (1) äquivalent ist und dessen charakteristische Vektoren folgender Gestalt sind:

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(\mu)} = (\underbrace{0, \ldots, 0, \overset{\mu}{\overset{\downarrow}{1}}, 0, \ldots, 0}_{k}, a_1^{(\mu)}, \ldots, a_{n-k+1}^{(\mu)}) , \qquad \mu = 1, 2, \ldots, k . \tag{12}$$

Daraus folgt, daß die Mannigfaltigkeiten $H_k^{(\lambda)}$ (wenn sie existieren) folgende parametrische Darstellung zulassen:

$$\begin{aligned} & x_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) , \\ & x_i = x_i(x_1, \ldots, x_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k+1}) \qquad (i = k+1, \ldots, n) , \\ & u = u(x_1, \ldots, x_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k+1}) . \end{aligned}$$

[4] Siehe [5].

Wegen (12) sind $H_k^{(\lambda)}$ die Integralmannigfaltigkeiten des Systems der totalen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dx_i &= \sum_{\mu=1}^{k} d_{i-k}^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n, u)\, dx_\mu , \qquad i = k+1, \ldots, n , \\ du &= \sum_{\mu=1}^{k} d_{n-k+1}^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n, u) dx_\mu . \end{aligned} \tag{13}$$

Die neue Formulierung der Bedingung γ) lautet folgend:

γ') Das System von totalen Differentialgleichungen (13) soll vollständig integrierbar sein.

Auf Grund unserer Voraussetzungen α), β), γ) können wir noch formulieren:

HILFSSATZ 2 [5]. *Die Mannigfaltigkeit R_n ist dann und nur dann eine Integralmannigfaltigkeit des Systems* (1), *wenn sie sich als $n-k$ parametrische Schar von charakteristischen Mannigfaltigkeiten $H_k^{(\lambda)}$ darstellen läßt.*

Die n-dimensionale Mannigfaltigkeit R_n ist eine Integralmannigfaltigkeit des Systems (1), wenn ihre tangentialen Richtungen stets alle charakteristischen Vektoren $\boldsymbol{a}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ umfassen.

II. Zulässige Anfangswertaufgaben

Die Anfangswertaufgabe a) werden wir folgenderweise formulieren: es sei in E_{n+1} eine $n-1$ dimensionale Anfangsmannigfaltigkeit A_{n-1} gegeben; man soll eine Integralmannigfaltigkeit R_n des Systems (1) finden, so daß $A_{n-1} \subset R_n$. A_{n-1} werden wir in der Gestalt

$$\begin{aligned} & x_\mu = x_\mu(s_1, \ldots, s_n) , \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n , \\ & u = u(s_1, \ldots, s_{n-1}) \end{aligned} \tag{14}$$

schreiben. Wenn wir jetzt durch $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{n-1}$ die zu A_{n-1} tangentialen Vektoren bezeichnen werden, dann gilt der folgende

SATZ 1. *Wenn die Voraussetzung α) stattfindet,*

$$\boldsymbol{a}^{(\nu_0)} \notin [\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{n-1}] \text{ [6]}$$

auf A_{n-1} gilt und A_{n-1} zulässig ist, dann sind auf der Mannigfaltigkeit A_{n-1} die Vektoren

$$\boldsymbol{a}^{(\nu)}, \boldsymbol{a}^{(\nu_0)}, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{n-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

linear abhängig.

[5] Siehe [5].

[6] $[\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_r]$ bedeutet den auf $\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_r$ aufgespannten Vektorraum.

Beweis. Aus der Voraussetzung der Zulässigkeit von A_{n-1}, folgt die Existenz einer Integralmannigfaltigkeit des Systems (1) R_n, so daß $A_{n-1} \subset R_n$. Bezeichnen wir durch $r_1, \ldots, r_n$ die zu R_n tangentialen Vektoren. Dann ist:

$$a^{(\nu)} \in [r_1, \ldots, r_n] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

und auf A_{n-1}

$$s_\mu \in [r_1, \ldots, r_n] \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Zwischen den Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}, s_1, \ldots, s_{n-1}$ müssen also jede $n+1$, beliebig gewählte Vektoren linear abhängig sein. Insbesondere sind

$$a^{(\nu)}, a^{(\nu_0)}, s_1, \ldots, s_{n-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

linear abhängig.

Aus dem Beweise folgt auch, daß für k die Ungleichung $k \leqslant n$ gelten muß.

Um hinreichende Kriterien der Zulässigkeit von A_{n-1} zu erhalten, werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 2. *Wenn wir die Voraussetzungen* α), β), γ) *annehmen, wenn auf* A_{n-1}

$$a^{(\nu_0)} \notin [s_1, \ldots, s_{n-1}]$$

gilt und wenn auf A_{n-1} *die Vektoren*

$$a^{(\nu)}, a^{(\nu_0)}, s_1, \ldots, s_{n-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

linear abhängig sind, dann ist die Anfangswertaufgabe A_{n-1} *zulässig.*

Beweis. Für den Beweis bauen wir eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit A_n, welche für die Gleichung (1_{ν_0}) nicht charakteristisch ist, und für die: $A_{n-1} \subset A_n$, $A_n \subset E_{n+1}$. Durch jeden Punkt von A_n geht genau eine Mannigfaltigkeit $H_k^{(\lambda)}$, und der Durchschnitt

$$P_{k-1}^{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k+1})} = A_n \cdot H_k^{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k+1})}$$

muß für jedes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k+1})$ nicht leer sein. Aus der Tatsache, daß A_n nicht charakteristisch ist, folgt, daß $P_{k-1}^{(\lambda)}$, $k-1$ dimensionale Mannigfaltigkeiten sind.

$P_{k-1}^{(\lambda)}$ besitzen noch folgende Eigenschaften:

1) $P_{k-1}^{(\lambda)}$ sind nichtcharakteristisch für die Gleichung (1_{ν_0}).

2) Wenn wir durch jeden Punkt von $P_{k-1}^{(\lambda)}$ die Charakteristik der Gleichung (1_{ν_0}) durchführen, dann bekommen wir die Mannigfaltigkeit $H_k^{(\lambda)}$.

3) Aus der Voraussetzung γ) folgt, daß A_n durch die Schar $P_{k-1}^{(\lambda)}$ abgeschichtet ist.

Wir werden jetzt folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 3. *Wenn jede Mannigfaltigkeit* $P_{k-1}^{(\lambda)}$, *welche mit* A_{n-1} *gemeinsame Punkte besitzt, völlig in* A_{n-1} *liegt, dann ist* A_{n-1} *zulässig.*

Die Voraussetzung des obigen Hilfssatzes kann auch so formuliert werden: die $n-k$ parametrische Mannigfaltigkeitenschar $P_{k-1}^{(\nu_1, \ldots, \nu_r)}$ (7), welche aus allen Mannigfaltigkeiten $P_{k-1}^{(\lambda)}$ besteht, die mit A_{n-1} gemeinsame Punkte besitzen, soll A_{n-1} abschichten.

Um die Zulässigkeit von A_{n-1} zu beweisen, brauchen wir nur eine Integralmannigfaltigkeit R_n des Systems (1) zu bauen, so daß $A_{n-1} \subset R_n$. Um sie herzustellen, genügt es durch jeden Punkt auf A_{n-1} eine charakteristische Kurve der Gleichung (1_{ν_0}) zu führen. Dann wird, wegen der Eigenschaften 1), 2) von $P_{n-1}^{(\lambda)}$ und wegen unserer Voraussetzung, die erhaltene n-dimensionale Mannigfaltigkeit durch eine $n-k$ (7) parametrige Schar von charakteristischen Mannigfaltigkeiten $H_k^{(\lambda)}$ erzeugt. Hilfssatz 2 ergibt also, daß wir eine Integralmannigfaltigkeit bekommen haben.

Zum Beweise des Satzes 2 genügt es nun zu zeigen, daß $P_{k-1}^{(\nu)}$ die Mannigfaltigkeit A_{n-1} abschichtet.

Um das einzusehen, können wir auf A_n die Koordinaten $(s_1, \ldots, s_n)$ so annehmen, daß $s_n = 0$ die Gleichung von A_{n-1} wird.

$$x_i = x_i(s_1, \ldots, s_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$u = u(s_1, \ldots, s_n)$$

soll die parametriesche Darstellung von A_n in E_{n-1} sein. Durch s_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnen wir die zu A_n tangentialen Vektoren in der Richtung s_μ (8).

Wenn wir jetzt mit $W_1, \ldots, W_{k-1}$ die zur $P_{k-1}^{(\lambda)}$ tangentialen Vektoren bezeichnen werden, dann ist

$$W_\mu(P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(\mu)}(P) a^{(i)}(P) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(\mu)}(P) s_i(P) \tag{15}$$

für $P \in A_n$, wo $\alpha_i^{(\mu)}(P)$, $\beta_i^{(\mu)}(P)$ passend gewählte, einmal stetig differenzierbare Funktionen sind. Beide Gleichungen folgen unmittelbar aus der Tatsache, daß:

$$P_{k-1}^{(\lambda)} \subset H_{k-1}^{(\lambda)} \quad \text{und} \quad P_{k-1}^{(\lambda)} \subset A_n.$$

Weiter folgt aus unseren Voraussetzungen in Satz 2, daß:

$$a^{(\nu)}(Q) = \gamma_\nu(Q) a^{(\nu_0)}(Q) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^{(\nu)}(Q) s_i(Q) \tag{16}$$

für

$$Q \in A_{n-1}, \quad \gamma_\nu^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i^{(\nu)})^2 \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

(7) Im Falle wenn $P_{k-1}^{(\nu)}$ die A_{n-1} abschichtet, ist $r = n-k$.

(8) $s_1, \ldots, s_{n-1}$ werden wie vorher zu A_{n-1} tangential sein.

(15) und (16) ergibt entsprechend

$$\sum_{i\neq\nu_0} a_i^{(\mu)}(P)\boldsymbol{a}^{(i)}(P) = -a_0^{(\mu)}(P)\boldsymbol{a}^{(\nu_0)}(P) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(\mu)}(P)\boldsymbol{s}_i(P), \qquad P\in A_n,$$

$$\sum_{i\neq\nu_0} a_i^{(\mu)}(Q)\boldsymbol{a}^{i}(Q) = \Big(\sum_{i\neq\nu_0} a_i^{(\mu)}(Q)\gamma_i(Q)\Big)\boldsymbol{a}^{(\nu_0)}(Q) + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{\nu\neq\nu_0} a_\nu^{(\mu)}(Q)\mu_i^{(\nu)}(Q)\Big)\boldsymbol{s}_i(Q), \qquad Q\in A_{n-1}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\boldsymbol{a}^{(\nu_0)}, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n$ gelten die folgenden Identitäten:

$$(17)\quad \begin{aligned} -a_{\nu_0}^{(\mu)}(P) &\equiv \sum_{i\neq\nu_0} a_i^{(\mu)}(P)\gamma_i(P), \qquad P\in A_{n-1} \\ &\qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k-1), \\ \beta_i^{(\mu)}(P) &\equiv \sum_{\nu\neq\nu_0} a_\nu^{(\mu)}(P)\mu_i^{(\nu)}(P), \qquad P\in A_{n-1} \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \beta_n^{(\mu)}(P) &\equiv 0, \qquad P\in A_{n-1}. \end{aligned}$$

Wir können nun die Mannigfaltigkeiten $P_{k-1}^{(\lambda)}$ parametrisch in A_n darstellen, nämlich:

$$(18)\qquad s_i = s_i(t_1, \ldots, t_{k-1}, \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist $\boldsymbol{W}_\mu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_i}{\partial t_\mu}\boldsymbol{s}_i$ und aus (15) folgt

$$(19)\qquad \frac{\partial s_i}{\partial t} = \beta_i^{(\mu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k-1).$$

In der Umgebung von A_{n-1} können $s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}}$ als Parameter auf $P_{k-1}^{(\lambda)}$ gewählt werden. Dabei folgt aus (17) und (19), daß die Permutation $i_1, \ldots, i_{k-1}$ die Zahl n nicht enthält. Wir können also annehmen, daß $i_\mu = \mu$ ist, ohne die Identität (17) zu verlieren.

In so gewählten Parametern bekommt (18) die Form:

$$(20)\qquad s_i = s_i(s_1, \ldots, s_{k-1}; \lambda) \qquad (i = k, k+1, \ldots, n).$$

Aus (19) folgt:

$$\beta_i^{(\mu)}(s_1, \ldots, s_n) \underset{(s_1,\ldots,s_n)}{\equiv} \begin{cases} 0, & i\neq\mu \\ 1, & i=\mu \end{cases} \qquad (\mu, i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

und schließlich bekommen wir, daß die Funktionen (20) Lösungen der totalen Differentialgleichungen

$$(21)\qquad ds_i = \sum_{\mu=1}^{k-1}\beta_i^{(\mu)}(s_1, \ldots, s_n)\,ds_\mu \qquad (i = k, k+1, \ldots, n)$$

sind. In anderen Worten $P_{k-1}^{(\lambda)}$ sind Integralmannigfaltigkeiten von (21). Weiter gilt der

HILFSSATZ 4. *Die totalen Differentialgleichungen* (21) *sind vollständig integrierbar.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß A_n durch die Schar $P_{k-1}^{(\lambda)}$ abgeschichtet ist.

Die totalen Differentialgleichungen (21) haben, wegen (17), auf A_{n-1} ($s_n = 0$) die folgende Gestalt:

$$(22_1)\qquad ds_i = \sum_{\mu=1}^{k-1}\beta_i^{(\mu)}(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)\,ds_\mu, \qquad i = k, k+1, \ldots, n-1,$$

$$(22_2)\qquad ds_n = 0.$$

Hilfssatz 4 und 1 ergeben, daß die totalen Differentialgleichungen (22_1) im Raume $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ (auf A_{n-1}) vollständig integrierbar sind. Wenn wir also durch

$$s_i = \Psi_i(s_1, \ldots, s_{k-1}; \nu) \qquad (i = k, k+1, \ldots, n-1)$$

die Lösungen des Systems (22_1) bezeichnen werden, dann wird A_{n-1} durch die Mannigfaltigkeiten

$$(23)\qquad \begin{aligned} &s_i = \Psi_i(s_1, \ldots, s_{k-1}; \nu) \qquad (i = k, k+1, \ldots, n-1), \\ &s_n = 0 \end{aligned}$$

abgeschichtet. Dabei sind die Funktionen (23) Lösungen des Systems (21). Aus der Tatsache, daß durch jeden Punkt auf A_n genau eine Mannigfaltigkeit $P_{k-1}^{(\lambda)}$ geht, folgt aber, daß die Scharen $P_{k-1}^{(\lambda)}$ und (23) identisch sind. Daraus folgt, daß A_{n-1} durch $P_{k-1}^{(\lambda)}$ abgeschichtet ist.

Damit ist der Beweis des Satzes 2 beendet.

III. Aerodynamische Anwendungen

Wir betrachten die Gleichungen der nicht stationären, kompressiblen, nichtviskosen und nicht wärmeleitenden Strömung

$$(24)\qquad \begin{aligned} a_t + ua_x + va_y + wa_z + \frac{k-1}{2}a(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{2}{k-1}aa_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{2}{k-1}aa_y &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{2}{k-1}aa_z &= 0, \end{aligned}$$

wo u, v, w Geschwindigkeitskomponenten der Strömung, a die Schallgeschwindigkeit und k konstant ist.

In der Aerodynamik spielt eine Klasse von Strömungen, welche einfache Wellen genant werden, eine wichtige Rolle (9). Allgemein wird eine Strömung

$$(25)\qquad \begin{aligned} u &= u(t,x,y,z), \quad & v &= v(t,x,y,z),\\ w &= w(t,x,y,z), \quad & a &= a(t,x,y,z) \end{aligned}$$

im Gebiet D der Veränderlichen (t,x,y,z) eine einfache Welle darstellen, wenn die Abbildung (25) das Gebiet D auf eine Kurve im Raume u,v,w,a abbildet. Wir werden immer voraus setzen, daß $a \not\equiv \text{const}$. Bei dieser Voraussetzung können wir die Definition der einfachen Welle folgendermaßen formulieren: die Strömung u,v,w,a ist dann und nur dann eine einfache Welle, wenn solche Funktionen $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ existieren, für die

$$(26)\qquad u = f_1(a), \quad v = f_2(a), \quad w = f_3(a).$$

Wir werden voraussetzen, daß die Funktionen f_1, f_2, f_3 stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen.

Durch Einsetzen von (26) in (24) erhält (24) die Gestalt:

$$(27)\qquad \begin{aligned} a_t+\left(f_1+\frac{k-1}{2}af_1'\right)a_x+\left(f_2+\frac{k-1}{2}af_2'\right)a_y+\left(f_3+\frac{k-1}{2}af_3'\right)a_z &= 0,\\ f_1'a_t+\left(f_1f_1'+\frac{2a}{k-1}\right)a_x+f_2f_1'a_y+f_3f_1'a_z &= 0,\\ f_2'a_t+f_1f_2'a_x+\left(f_2f_2'+\frac{2a}{k-1}\right)a_y+f_3f_2'a_z &= 0,\\ f_3'a_t+f_1f_3'a_x+f_2f_3'a_y+\left(f_3f_3'+\frac{2a}{k-1}\right)a_z &= 0. \end{aligned}$$

Außer der Voraussetzung $a \not\equiv \text{const}$, werden wir im weiteren $a_t^2+a_x^2+a_y^2+a_z^2 \neq 0$ annehmen. Daraus folgt, daß die Determinante der Koeffizienten des Systems (27) gleich Null sein muß, was mit der Identität

$$(28)\qquad \left(f_1'(s)\right)^2+\left(f_2'(s)\right)^2+\left(f_3'(s)\right)^2 \underset{s}{\equiv} \left(\frac{2}{k-1}\right)^2$$

gleichbedeutend ist. Daraus folgt, daß die Gleichungen (27) linear abhängig sind, und statt (27) können wir das gleichbedeutende System mit drei unabhängigen Gleichungen betrachten

$$(29)\qquad \begin{aligned} f_1'a_t+\left[f_1f_1'+f_2f_2'+f_3f_3'+\frac{2a}{k-1}\right]a_x &= 0,\\ -f_2'a_x+f_1'a_y &= 0, \quad -f_3'a_y+f_2'a_z = 0. \end{aligned}$$

Wir können uns leicht überzeugen, daß für $f_i'(s) \neq 0$ $(i=1,2,3)$, die Bedingungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ Kap. I erfüllt sind. Wir können also die Sätze 1 und 2 anwenden.

(9) Siehe [6], Seite 59, 77 und [7].

Unser Ziel ist es zwei Fragen zu beantworten.

I. Wenn eine Strömung eine einfache Welle (26) ist, dann muß für $t=t_0$ die Anfangsbedingung folgende Form haben:

$$(30)\qquad \begin{aligned} u(t_0,x,y,z) &= f_1\big[A(x,y,z)\big], \quad & v(t_0,x,y,z) &= f_2\big[A(x,y,z)\big],\\ w(t_0,x,y,z) &= f_3\big[A(x,y,z)\big], \quad & a(t_0,x,y,z) &= A(x,y,z). \end{aligned}$$

Es seien jetzt Funktionen f_1, f_2, f_3 beliebig angegeben (nur (28) soll befriedigt sein). Wir sollen alle Anfangsbedingungen der Gestalt (30) angeben, von welchen anfangend die Lösung des Systems (24) eine einfache Welle (26) ist. Mit anderen Worten, es sollen alle Funktionen $A(x,y,z)$ angegeben werden, für welche die Anfangsbedingung

$$a(t_0,x,y,z) = A(x,y,z)$$

für das System (29) zulässig ist.

Als unmittelbare Folge der Sätze 1 und 2 bekommen wir.

Satz 3. *Die Lösung der Anfangswertaufgabe* (30) *für das System* (24) *existiert und stellt eine einfache Welle dar, dann und nur dann wenn die Funktion* $A(x,y,z)$ *folgende Bedingungen erfüllt:*

$$f_1'(A)\frac{\partial A}{\partial y}-f_2'(A)\frac{\partial A}{\partial x}=0, \qquad f_2'(A)\frac{\partial A}{\partial z}-f_3'(A)\frac{\partial A}{\partial y}=0.$$

II. Einfachkeitshalber werden wir uns jetzt nur mit solchen Strömungen beschäftigen, welche von der Koordinate z unabhängig sind und $w \equiv 0$ erfüllen. In diesem Falle vereinfachen sich (24), (26), (28) und (29). Nach der Vereinfachung werden wir sie entsprechend durch (24′), (26′), (28′) und (29′) bezeichnen.

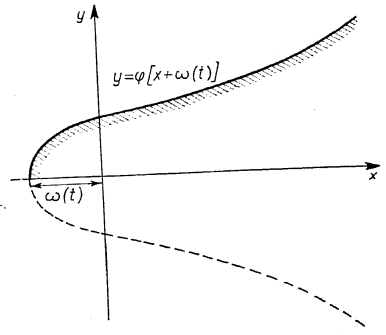

Fig. 1

Zwei Fälle sind zu unterscheiden.

1. Die Strömung hängt wesentlich von allen Koordinaten t,x,y ab.

Betrachten wir ein starres Profil $y=\varphi(x)$ (genügend glatt), welches sich im Gase in der Bewegung $\omega(t)$ befindet, das heißt sich vorwärtsbewegt und dessen jeweilige Lage durch $\omega(t)$ gegeben ist (Fig. 1). Ein Profil $y=\varphi(x)$ in der Bewegung $\omega(t)$ werden wir zulässig nennen, wenn es in der Bewegung $\omega(t)$ für $t>0$ mit einer einfachen Welle (26′) umströmt werden

kann [10]. Wenn das Profil $y=\varphi(x)$ mit einer einfachen Welle umströmt ist, dann muß die folgende kinematische Bedingung erfüllt sein

$$-f_1\big(a(x,t)\big)\varphi'\big(x+\omega(t)\big)+f_2\big(a(x,t)\big)=-\omega'(t)\varphi'\big(x+\omega(t)\big) \quad [11], \tag{31}$$

wo $a(x,t)=a\big(t,x,\varphi(x)\big)$ (Schallgeschwindigkeit auf dem Profil im Moment t). Es ensteht also für das System (29′) folgende Anfangswertaufgabe: Durch die Mannigfaltigkeit A_2:

$$t=t\,,\quad x=x\,,\quad y=\varphi\big(x+\omega(t)\big)=\beta(x,t)\,,\quad a=a(x,t)\,, \tag{32}$$

wo $a(x,t)$ aus (31) berechnet ist, soll die Lösung des Systems (29′) geführt werden. Daraus folgt:

Bedingung I. *Das Profil $y=\varphi(x)$ in der Bewegung $\omega(t)$ ist dann und nur dann zulässig, wenn die Anfangswertaufgabe* (32) *für* (29′) *zulässig ist.*

Die Sätze 1 und 2 ergeben:

Bedingung II. *Das Profil $y=\varphi(x)$ in der Bewegung $\omega(t)$ ist dann und nur dann zulässig, wenn $a(x,t)$ die Gleichung erfüllt:*

$$\left(f_2'(a)\frac{\partial\beta}{\partial x}+f_1'(a)\right)\frac{\partial a}{\partial t}-\left(f_2'(a)\frac{\partial\beta}{\partial t}-[a]\right)\frac{\partial a}{\partial x}=0\,, \tag{33}$$

wo $[a]=f_1(a)f_1'(a)+f_2(a)f_2'(a)+\dfrac{2a}{k-1}$.

Die Gleichung (33) kann integriert werden und zwar besitzen seine Charakteristiken folgende Gestalt:

$$(c_1-x)f_1'(a)+[a]t-f_2'(a)\beta(x,t)=0\,,\quad a=c_2\,, \tag{34}$$

wo c_1, c_2 Parameter sind. In jedem Gebiete des Raumes (t,x,a), für welches $f_1'(a)\neq 0$, stellt die Schar (34) alle charakteristische Kurven von (33) dar. Dies kann durch einfache Rechnung nachgeprüft werden. Aus (34) folgt:

Bedingung III. *Das Profil $y=\varphi(x)$ ist in der Bewegung $\omega(t)$ dann und nur dann zulässig, wenn eine Funktion $x_0=g(c)$ existiert, so daß die beiden Kurven*

$$\big(g(c)-x\big)f_1'(c)+[c]t-f_2'(c)\beta(x,t)=0$$

und

$$a(x,t)=c$$

für jedes c $(\inf a<c<\sup a)$ *identisch sind.*

[10] Ein zulässiges Profil wird immer durch eine einfache Welle umströmt sein, wenn für $t=0$ die Strömung von x, y unabhängig ist. Allgemein hängt das von den Eigenschaften der Strömung für $t=0$ ab. Genauer siehe [8].

[11] Genauer siehe [8].

Mit anderen Worten besagt die Bedingung III, daß $a(x,t)$ (aus (31) berechnet) eine Schar von Kurven (34) ergeben muß. Wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *Ein Profil $y=ax+b$ (a, b konstant) ist für jede Bewegung $\omega(t)$ zulässig.*

Beweis. Die Bedingung $\varphi'(x)\equiv\text{const}$, ist hinreichend. Im Falle $\varphi'(x)\equiv\text{const}=\operatorname{tg}\Psi$ haben wir mit einem Keil zu tun (Fig. 1). Die Gleichung (31) nimmt folgende Form an:

$$-f_1(a)\sin\Psi+f_2(a)\cos\Psi=-\omega'(t)\sin\Psi\,. \tag{35}$$

Also ist $a(x,t)$ von x unabhängig. Der Bedingung II wegen, ist der Keil dann und nur dann in der Bewegung $\omega(t)$ zulässig, wenn:

$$\operatorname{tg}\Psi f_2'(a)+f_1'(a)=0\,, \tag{36}$$

wo $a(t)$ aus (35) zu berechnen ist. (36), (28′) und (35) wird befriedigt wenn:

$$f_1(s)=-\frac{2s}{k-1}\sin\Psi\,,\quad f_2(s)=\frac{2s}{k-1}\cos\Psi\,,$$

$$a(t)=\frac{1-k}{2}\omega'(t)\sin\Psi\,.$$

Der Keil mit geraden Seiten ist also für jede Bewegung zulässig.

Es gilt auch

Satz 5 [12]. *In der Bewegung $\omega(t)=pt+q$ (p, q konstant) ist jedes Profil $y=\varphi(x)$ zulässig.*

Beweis. Im Falle wenn $\omega'(t)=p=\text{const}$, ergibt (31)

$$a(x,t)=\mu\big(\varphi\big(x+\omega(t)\big)\big) \tag{37}$$

und die Bedingung (33) nimt folgende Gestalt an

$$\mu'\big(\varphi\big(x+\omega(t)\big)\big)\varphi'\big(x+\omega(t)\big)\big[f_1'(a)p+[a]\big]=0\,. \tag{38}$$

Die Gleichung (38) ist erfüllt, also der Profil $y=\varphi(x)$ ist in der Bewegung $\omega(t)=pt+q$ zulässig, wenn die Bedingung

$$f_1'(s)p+[s]\underset{s}{\equiv}0$$

stattfindet. Wir können also als $f_1(s)$, $f_2(s)$ eine beliebige Lösung des Gleichungssystem

$$(f_1')^2+(f_2')^2-\left(\frac{2}{k-1}\right)^2=0\,,$$

$$f_1'(p+f_1)+f_2'f_2+\frac{2s}{k-1}=0$$

annehmen.

[12] Der Satz 3, S. 8 in [8] ist falsch.

2. Die Strömung ist von t unabhängig (stationäre Strömung). Zusätzlich werden wir annehmen, daß $a_x \neq 0$. Dann folgt aus (29′), daß die Strömung dann und nur dann stationär ist, wenn:

$$[s] \underset{s}{\equiv} 0 . \tag{39}$$

Diese Identität besagt, daß wir mit einer Prandtl-Meyerschen [13] Überschallströmung zu tun haben. Die Bedingung (31) und die Anfangswertaufgabe (32) nehmen in unserem Falle die Gestalt

$$-f_1\big(a(x)\big)\varphi'(x)+f_2\big(a(x)\big) \underset{x}{\equiv} 0 \tag{40}$$

und

$$t=t, \quad x=x, \quad y=\varphi(x), \quad a=a(x) \tag{41}$$

an.

Also kann das Profil $y=\varphi(x)$ dann und nur dann durch eine stationäre einfache Welle umströmt werden, wenn die Anfangswertaufgabe (41) für (29′) zulässig ist. Aus (41) und Satz 1, 2. folgt unmittelbar:

Satz 6. *Jedes Profil $y=\varphi(x)$ kann im Falle einer stationären Strömung ($a_t \equiv 0$) mit einer einfachen Welle umströmt werden.*

Schlußbemerkung

In den bisherigen Betrachtungen haben wir uns mit einfachen Wellen in Kartesischen Koordinaten beschäftigt. Das heißt die Gleichungen der Strömung (24) und (24′) waren in Kartesischen Koordinaten geschrieben.

Führen wir aber zum Beispiel in (24′) polare Koordinaten ein — es werden also neue unabhängige Veränderliche t, r, α und neue gesuchte Funktionen $a(t,r,\alpha)$, $p(t,r,\alpha)$, $q(t,r,\alpha)$ mit Hilfe von

$$t=t, \quad x=r\cos\alpha, \quad y=r\sin\alpha$$

und $a=a$, $u=p\cos\alpha+q\sin\alpha$, $v=p\sin\alpha-q\cos\alpha$ eingeführt, wo a die Schallgeschwindigkeit, p und q die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung r und α sind.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} &a_t+a_r p+\frac{a_\alpha}{r}q+\frac{k-1}{2}a\left(\frac{p}{r}+p_r+\frac{q_\alpha}{r}\right)=0, \\ &p_t+p_r p+\frac{p_\alpha}{r}q-\frac{q^2}{r}+\frac{2}{k-1}aa_r=0, \\ &q_t+q_r p+\frac{q_\alpha}{r}q+\frac{pq}{r}+\frac{2}{k-1}\cdot\frac{a}{r}a_\alpha=0 . \end{aligned} \tag{42}$$

(13) Siehe [7].

Die Lösung a, p, q des Systems (1) werden wir eine einfache Welle in polaren Koordinaten nennen, wenn Funktionen f_1, f_2 existieren, so daß

$$p=f_1(a), \quad q=f_2(a) . \tag{43}$$

Auf ähnliche Weise kann man den Begriff der einfachen Welle in beliebigen Koordinaten einführen. Dabei zeigt es sich, daß der Begriff der einfachen Wellen vom Koordinatensystem abhängt. Es ist zum Beispiel bekannt, daß die Strömung die bei der Bewegung eines zylinderförmigen Kolbens ensteht, eine einfache Welle in polaren Koordinaten ist. Leich kann man aber einsehen, daß das für die kartesischen Koordinaten nicht der Fall ist.

Es scheint, daß die so allgemein definierten einfachen Wellen eine sehr breite Klasse von Strömungen darstellen. Bei Untersuchung dieser Strömungen entstehen aber, und zwar schon bei polaren Koordinaten, neue Schwierigkeiten. Wenn wir nämlich (43) in (42) einsetzen, so erhalten wir ein System für welches die Voraussetzung γ) des Satzes 2 nicht erfüllt ist, und wir können nur die notwendigen Kriterien des Satzes 1 anwenden.

Es entsteht also die Notwendigkeit allgemeine hinreichende Kriterien der Zulässigkeit zu suchen, welche ohne der Voraussetzung γ) anwendbar sind.

Literaturverzeichnis

[1] D. L. Bernstein, *Existence Theorems in Partial Differential Equations*, 1950.

[2] C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig 1956.

[3] E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris 1922.

[4] J. A. Schouten and W. Kulk, *Pfaffs problem and its generalizations*, Oxford 1949.

[5] R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. II, Berlin 1937.

[6] R. Courant and K. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, New York 1948.

[7] J. Bonder, *Ondes simples dans ecoulements compresibles plans en regime non stationnaire*, Arch. Mech. Stos. 4. 8 (1956), S. 647-670.

[8] M. Burnat, *Simple waves in plane non-steady compressible inviscid and non-heat-conducting flow*, Arch. Mech. Stos. 1. 12 (1960), S. 55-69.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT FÜR GRUNDPROBLEME DER TECHNIK DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 1. 10. 1959