ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur une généralisation de la transformation de Poincaré-Bertrand

par W. Żakowski (Warszawa)

1. Introduction. On appelle *transformation de Poincaré-Bertrand* l'égalité

$$(1)\qquad \int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(t,\tau,s)}{s-\tau}\,ds = -\pi^2\varphi(t,t,t)+\int_L ds\int_L \frac{\varphi(t,\tau,s)}{(\tau-t)(s-\tau)}\,d\tau\,,$$

où L est un ensemble de points, composé d'un nombre fini de lignes fermées et d'arcs non fermés (sans points communs) situés dans le plan de la variable complexe, $t\in L$ (sauf pour les extrémités des arcs); les intégrales singulières dans (1) ont le sens de la valeur principale de Cauchy. La transformation (1) a été étudiée pour la première fois par H. Poincaré [1], puis par G. Bertrand [2]. Ensuite, sous des hypothèses plus générales (φ vérifiant la condition de Hölder relativement à t, τ et s) elle a été étudiée par Giraud [3] (voir la monographie [4] de N. I. Mouskhelichvili).

Dans le présent travail, dont le sujet m'a été suggéré par W. Pogorzelski, je démontre la transformation (1) moyennant des hypothèses plus générales que dans le travail [4].

Il suffit d'étudier le cas d'un ensemble $L=\sum_\nu \widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ de points, composé d'un nombre fini d'arcs simples $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$. Les extrémités de ces arcs peuvent appartenir à un seul arc, ou bien être communes à plusieurs arcs différents. Il est à remarquer que les arcs donnés peuvent former plusieurs ensembles disjoints. En tout cas, aucun couple d'arcs $\widehat{c_\tau c_{\nu'}}$ n'a de points intérieurs communs. Rangeons d'une façon arbitraire les extrémités des arcs donnés en une suite de points différents $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Nous supposons que les arcs donnés ont des tangentes continues en tout point, même aux extrémités. Les points $c_1, \ldots, c_p$ sont donc soit des points anguleux, soit des points de rebroussement, soit des points multiples, soit enfin de simples extrémités des lignes formées par les arcs donnés. Nous rappellerons maintenant la définition, donnée par W. Pogorzelski [5], d'une classe de fonctions complexes discontinues, définies sur l'ensemble de points L.

On appelle classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ l'ensemble de toutes les fonctions complexes $\varphi(t)$, définies en tout point t de l'ensemble L, différent des points de discontinuité $c_1, c_2, \ldots, c_p$, qui vérifient l'inégalité

$$(2) \qquad |\varphi(t)|\cdot\prod_{\nu=1}^{p}|t-c_\nu|^\alpha < \text{const},$$

et l'inégalité généralisée de Hölder:

$$(3) \qquad |\varphi(t)-\varphi(t_1)|\cdot[|t-c_\nu||t_1-c_{\nu'}|]^{\alpha+\mu} < \text{const}\cdot|t-t_1|^\mu,$$

à l'intérieur de tout arc $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ (le point t_1 étant situé sur l'arc $\widehat{tc_{\nu'}}$), appartenant à L. On admet que les paramètres α et μ, fixés pour la classe donnée, vérifient les inégalités $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \mu < 1$, $\alpha+\mu < 1$. Une propriété fondamentale des fonctions de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ est exprimée par le théorème suivant, démontré par W. Pogorzelski [6]:

Théorème auxiliaire fondamental. *Si la fonction complexe $f(t,\tau,s)$ est définie dans la région $t \in L$, $\tau \in L$, $s \in L$ (excepté aux extrémités des arcs $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$), si elle vérifie l'inégalité*

$$(4) \qquad |f(t,\tau,s)|[|s-c_\nu||s-c_{\nu'}|]^\alpha < m_f,$$

et, en outre, une condition de Hölder généralisée de la forme

$$(5) \qquad |f(t,\tau,s)-f(t_1,\tau_1,s_1)|[|s-c_\nu||s_1-c_{\nu'}|]^{\alpha+\mu} < k_f[|s-s_1|^\mu+|\tau-\tau_1|^{\mu_1}+|t-t_1|^{\mu_1}],$$

séparément sur les arcs $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ de l'ensemble L, $s_1 \in \widehat{sc_{\nu'}}$, $\tau_1 \in \widehat{\tau c_{\nu'}}$, $t_1 \in \widehat{tc_{\nu'}}$ (où les constantes positives α, μ et μ_1 vérifient les inégalités $0<\mu<\mu_1\leqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$, $\alpha+\mu<1$ et m_f, k_f sont des constantes positives déterminées), alors la fonction déterminée par l'intégrale singulière au sens de Cauchy

$$(6) \qquad F(t,\tau) = \int_L \frac{f(t,\tau,s)}{s-\tau}\,ds,$$

vérifie, en tout point $\tau \in \widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ différent des extrémités c_ν, $c_{\nu'}$, l'inégalité

$$(7) \qquad |F(t,\tau)|[|\tau-c_\nu||\tau-c_{\nu'}|]^{\alpha_1} < C\cdot m_f + C'k_f,$$

et, en outre, la condition de Hölder

$$(8) \qquad |F(t,\tau)-F(t_1,\tau_1)|[|\tau-c_\nu||\tau_1-c_{\nu'}|]^{\alpha_1+\mu} < (C_1 m_f + C_1' k_f)[|t-t_1|^\mu+|\tau-\tau_1|^\mu],$$

où C, C', C_1, C_1' sont des constantes positives, ne dépendant que de la forme des arcs $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$, $\alpha_1 = \alpha$ si $\alpha>0$ et α_1 est une constante positive arbitrairement petite, si $\alpha = 0$.

2. Transformation de Poincaré-Bertrand généralisée. Nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction complexe $f(t,\tau,s)$ est définie dans la région $t \in L$, $\tau \in L$, $s \in L$ (sauf aux extrémités des arcs $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$), et si elle vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$(9) \qquad |f(t,\tau,s)-f(t_1,\tau_1,s_1)| < k_f[|t-t_1|^\mu+|\tau-\tau_1|^\mu+|s-s_1|^\mu]$$

(séparément sur les arcs de l'ensemble L), et en outre $\varphi(t) \in \mathfrak{H}_\alpha^\mu$, alors pour tout point $t \in L$ ($t \neq c_\nu$), on l'égalité

$$(10) \qquad \int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds = -\pi^2 f(t,t,t)\varphi(t) + \int_L ds \int_L \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{(\tau-t)(s-\tau)}\,d\tau.$$

Démonstration. Supposons que le point t soit situé à l'intérieur d'un arc orienté $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ de l'ensemble L. Pour démontrer l'existence des intégrales

$$(11) \qquad I_{s,\tau} = \int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds \quad \text{et} \quad I_{\tau,s} = \int_L ds \int_L \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{(\tau-t)(s-\tau)}\,d\tau,$$

remarquons que la fonction $f(t,\tau,s)\varphi(s)$ vérifie l'inégalité

$$(12) \qquad |f(t,\tau,s)\varphi(s)|[|s-c_\nu||s-c_{\nu'}|^\alpha] < \text{const},$$

et une condition de Hölder généralisée de la forme

$$(13) \qquad |f(t,\tau,s)\varphi(s)-f(t_1,\tau_1,s_1)\varphi(s_1)|[|s-c_\nu||s_1-c_{\nu'}|]^{\alpha+\mu} < \text{const}[|s-s_1|^\mu+|\tau-\tau_1|^\mu+|t-t_1|^\mu].$$

En vertu du théorème auxiliaire fondamental cité (cf. introduction), nous concluons que la fonction

$$(14) \qquad A(t,\tau) = \int_L \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds,$$

existe et qu'elle vérifie les conditions

$$(15) \qquad \begin{gathered} |A(t,\tau)|[|\tau-c_\nu||\tau-c_{\nu'}|]^{\alpha_1} < \text{const}, \\ |A(t,\tau)-A(t_1,\tau_1)|[|\tau-c_\nu||\tau_1-c_{\nu'}|]^{\alpha_1+\theta\mu} < \text{const}[|t-t_1|^{\theta\mu}+|\tau-\tau_1|^{\theta\mu}], \end{gathered}$$

où $0<\theta<1$. La fonction (14) vérifie alors des inégalités de la forme (4) et (5); d'après le théorème auxiliaire fondamental, nous concluons que l'intégrale $I_{s\tau}$ de la formule (11) existe. Pour étudier la seconde des intégrales (11), nous la décomposons de la façon suivante

$$(16) \qquad \int_L ds \int_L \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{(\tau-t)(s-\tau)}\,d\tau = \int_L \left[\int_L \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau - \int_L \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-s}\,d\tau\right]\frac{\varphi(s)}{s-t}\,ds,$$

et considérons la fonction

$$B(t,s,u) = \int_L \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-u}\,d\tau\,. \tag{17}$$

D'après un théorème connu de Privaloff [4], la fonction $B(t,s,u)$ vérifie (dans un voisinage suffisamment petit du point intérieur t) la condition de Hölder $|B(t,s,t)-B(t,s,s)| < \text{const}|t-s|^\mu$, donc l'intégrale $I_{\tau s}$ existe au sens ordinaire, comme intégrale d'une fonction à faible singulatiré.

Pour démontrer le théorème, remarquons que les intégrales itérées (11) se décomposent en sommes de plusieurs intégrales itérées le long de tous les couples des arcs composants de l'ensemble L. Il y a lieu de distinguer plusieurs cas, suivant la situation des points t, s, τ. Étudions d'abord le cas le plus difficile où les points d'intégration s et τ sont situés sur le même arc $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ à l'intérieur duquel est aussi situé le point fixé t; posons donc

$$I = \int_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} \frac{d\tau}{\tau-t}\int_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds\,, \qquad D = \int_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} ds \int_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{(\tau-t)(s-\tau)}\,d\tau\,. \tag{18}$$

Pour un point t fixé arbitrairement à l'intérieur de l'arc $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$, nous considérons maintenant deux points intérieurs T_1 et T_2 de l'arc $\widehat{c_\nu c_{\nu'}}$ tels que le point t soit à l'intérieur de l'arc $\widehat{T_1T_2}$; notons

$$I' = \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{d\tau}{\tau-t}\int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds\,, \qquad D' = \int_{\widehat{T_1T_2}} ds \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{(\tau-t)(s-\tau)}\,d\tau\,. \tag{19}$$

D'après la transformation de Poincaré-Bertrand classique, nous aurons

$$I' = -\pi^2 f(t,t,t)\varphi(t) + D'\,. \tag{20}$$

Nous démontrerons maintenant que $I-I'$ converge vers zéro, si $T_1 \to c_\nu$ et $T_2 \to c_{\nu'}$. Pour cela décomposons I comme il suit:

$$I = \int_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{F(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{F(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int_{\widehat{T_2c_{\nu'}}} \frac{F(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau = I_1+I_2+I_3\,, \tag{21}$$

où

$$F(t,\tau) = \int_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds\,. \tag{22}$$

D'après le théorème auxiliaire fondamental, nous concluons que la fonction (22) vérifie une inégalité de la forme (15); par conséquent les intégrales I_1 et I_3 concernent une fonction à faible singularité et elles vérifient des inégalités de la forme

$$|I_1| < \text{const}\int_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{d\sigma_\tau}{|t-T_1|\,|\tau-c_\nu|^{\alpha_1}}\,, \qquad |I_3| < \text{const}\int_{\widehat{T_2c_{\nu'}}} \frac{d\sigma_\tau}{|T_2-t|\,|\tau-c_{\nu'}|^{\alpha_1}}\,,$$

où σ_τ désigne l'abscisse curviligne du point τ. Il en résulte que les intégrales I_1 et I_3 convergent vers zéro si $T_1 \to c_\nu$ et $T_2 \to c_{\nu'}$. Nous écrivons ensuite

$$I_2 - I' = \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{F(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau - \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{F_1(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{F(t,\tau)-F_1(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau\,, \tag{23}$$

où

$$F_1(t,\tau) = \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds\,. \tag{24}$$

Par conséquent, nous aurons

$$I_2 - I' = \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{d\tau}{\tau-t}\int_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds + \int_{\widehat{T_1T_2}} \frac{d\tau}{\tau-t}\int_{\widehat{T_2c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds = \delta_1+\delta_2\,. \tag{25}$$

Il suffit d'étudier l'intégrale δ_1 (celle de l'intégrale δ_2 est analogue).

Nous décomposons maintenant l'intégrale δ_1 de la façon suivante:

$$\delta_1 = \int_{\widehat{T_1t_0}} \frac{F^*(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{F^*(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int_{\widehat{t_0'T_2}} \frac{F^*(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau = \delta_1'+\delta_1'+\delta_1''\,, \tag{26}$$

où

$$F^*(t,\tau) = \int_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds\,, \tag{27}$$

et t_0, t_0' désignent deux points intérieurs de l'arc $\widehat{T_1T_2}$, tels que le point t soit à l'intérieur de l'arc $\widehat{t_0t_0'}$.

Pour $\tau \in \widehat{T_1t_0}$, la fonction (27) vérifie l'inégalité

$$|F^*(t,\tau)| < \text{const}\int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha(\sigma_\tau-\sigma)} = \text{const}\int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha(\sigma_\tau-\sigma)^{1-\varepsilon}(\sigma_\tau-\sigma)^{\varepsilon}} < \frac{\text{const}}{(\sigma_\tau-\sigma_1)^{1-\varepsilon}}\int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha(\sigma_1-\sigma)^{\varepsilon}} = \frac{\text{const}\cdot\sigma_1^{1-\alpha-\varepsilon}}{(\sigma_\tau-\sigma_1)^{1-\varepsilon}} \quad (\alpha+\varepsilon<1)\,, \tag{28}$$

où σ désigne la longueur de l'arc variable $\widehat{c_\nu s}$, et σ_τ, σ_1 celles des arcs $\widehat{c_\nu \tau}$ et $\widehat{c_\nu T_1}$. Par conséquent l'intégrale δ_1' converge vers zéro si $T_1 \to c_\nu$.

Pour étudier l'intégrale σ_1'', écrivons

$$(29) \qquad \delta_1'' = F^*(t,t)\log\frac{t_0'-t}{t-t_0} + \int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{F^*(t,\tau)-F^*(t,t)}{\tau-t}\,d\tau .$$

Le premier sommande converge vers zéro si $T_1 \to c_\nu$, d'après la propriété évidente $\lim F^*(t,t) = 0$ si $T_1 \to c_\nu$. Pour le second sommande, nous aurons d'après (27)

$$(30) \quad \delta_1^* = \int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{F^*(t,\tau)-F^*(t,t)}{\tau-t}\,d\tau = \int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{d\tau}{\tau-t}\Big[\int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)-f(t,t,s)}{s-\tau}\varphi(s)\,ds\Big] + \int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{d\tau}{\tau-t}\Big[\int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,t,s)\varphi(s)}{s-\tau}\,ds - \int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,t,s)\varphi(s)}{s-t}\,ds\Big].$$

Nous en concluons ensuite que l'intégrale (30) vérifie l'inégalité

$$(31) \quad |\delta_1^*| < \mathrm{const}\,\sigma_1^{1-\alpha}\cdot \int\limits_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_{t_0'}} \frac{d\sigma}{|\sigma-\sigma_t|^{1-\mu}} + \mathrm{const}\cdot\sup_{\tau\in\widehat{t_0t_0'}}\Big|\int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,t,s)\varphi(s)}{(s-\tau)^2}\,ds\Big| < \mathrm{const}\cdot\sigma_1^{1-\alpha},$$

par conséquent δ_1^* converge vers zéro si $T_1 \to c_\nu$.

L'étude de l'intégrale δ_1''', plus facile, est analogue; nous aurons $\lim\delta_1''' = 0$ si $T_1 \to c_\nu$ et $T_2 \to c_{\nu'}$. Par conséquent, nous aurons la limitation

$$(32) \qquad \lim I' = I \quad \text{si} \quad T_1 \to c_\nu \quad \text{et} \quad T_2 \to c_{\nu'} .$$

Nous démontrerons maintenant que $D-D'$ converge vers zéro si $T_1 \to c_\nu$, $T_2 \to c_{\nu'}$, où D et D' sont déterminés par (18) et (19). Nous avons

$$(33) \quad D-D' = \int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{\varphi(s)}{s-t}\Phi(t,s)\,ds + \int\limits_{\widehat{T_1T_2}} \frac{\varphi(s)}{s-t}[\Phi(t,s)-\Phi'(t,s)]\,ds + \int\limits_{\widehat{T_2c_{\nu'}}} \frac{\varphi(s)}{s-t}\Phi(t,s)\,ds = D_1+D_2+D_3 ,$$

où

$$(34) \quad \begin{aligned} \Phi(t,s) &= \int\limits_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau - \int\limits_{\widehat{c_\nu c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-s}\,d\tau ,\\ \Phi'(t,s) &= \int\limits_{\widehat{T_1T_2}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau - \int\limits_{\widehat{T_1T_2}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-s}\,d\tau . \end{aligned}$$

Nous ne démontrerons que l'égalité $\lim D_2 = 0$ les égalités $\lim D_1 = \lim D_3 = 0$ étant plus faciles à établir. Nous avons

$$(35) \quad \Phi(t,s)-\Phi'(t,s) = \int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau + \int\limits_{\widehat{T_2c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau - \int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-s}\,d\tau - \int\limits_{\widehat{T_2c_{\nu'}}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-s}\,d\tau .$$

Chacune de ces quatre intégrales vérifie une condition de Hölder au voisinage du point fixé t, nous pouvons donc décomposer D_2, la seconde des intégrales (33), en une somme de quatre intégrales

$$D_2 = D_2' + D_2'' + D_2''' + D^{(\mathrm{IV})}$$

correspondant aux quatre termes de la somme (35). Il suffit d'étudier l'une d'elles:

$$(36) \qquad D_2' = \int\limits_{\widehat{T_1T_2}} \frac{\varphi(s)\,ds}{s-t}\Big[\int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau\Big],$$

puisque l'étude des autres est identique. Nous écrivons

$$(37) \quad D_2' = \int\limits_{\widehat{T_1t_0}} \frac{\varphi(s)}{s-t}\Psi(t,s)\,ds + \int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{\varphi(s)}{s-t}\Psi(t,s)\,ds + \int\limits_{\widehat{t_0'T_2}} \frac{\varphi(s)}{s-t}\Psi(t,s)\,ds = d_1+d_2+d_3 ,$$

où

$$(38) \qquad \Psi(t,s) = \int\limits_{\widehat{c_\nu T_1}} \frac{f(t,\tau,s)}{\tau-t}\,d\tau .$$

La fonction $\Psi(t,s)$ converge vers zéro si $T_1 \to c_\nu$; par conséquent d_1 et d_3 convergent vers zéro si $T_1 \to c_\nu$ et $T_2 \to c_\nu'$ comme intégrales d'une fonction à faible singularité. Nous décomposons maintenant l'intégrale d_2

$$(39) \qquad d_2 = \Psi(t,t)\int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{\varphi(s)\,ds}{s-t} + \int\limits_{\widehat{t_0t_0'}} \frac{\Psi(t,s)-\Psi(t,t)}{s-t}\varphi(s)\,ds .$$

Le premier sommande converge vers zéro si $T_1 \to c_\nu$. La différence $\Psi(t,s) - \Psi(t,t)$ vérifie une condition de Hölder de la forme

$$(40) \qquad |\Psi(t,s)-\Psi(t,t)| < \frac{\mathrm{const}}{\sigma_{t_0}-\sigma_1}\sigma_1\cdot|s-t|^\mu ,$$

par conséquent d_2 converge aussi vers zéro si $T_1 \to c_\nu$. Par conséquent

(41) $$\lim D' = D \quad \text{si} \quad T_1 \to c_\nu \quad \text{et} \quad T_2 \to c_{\nu'}.$$

En rapprochant les résultats (20), (32) et (45), nous concluons que

(42) $$I = -\pi^2 f(t, t, t)\varphi(t) + D.$$

On étudiera d'une façon analogue les intégrales itérées étendues aux couples d'arcs, où l'une des variables d'intégration τ, s au plus appartient au même arc que le point fixé t. Dans ces cas on constate qu'on peut changer l'ordre d'intégration dans les intégrales itérées.

En définitive on obtient l'égalité (10), c'est-à-dire la transformation de Poincaré-Bertrand généralisée.

Travaux cités

[1] H. Poincaré, *Théorie des marées*, Paris 1910.

[2] G. Bertrand, *La théorie des marées et les équations intégrales*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 40 (1923), p. 151-258.

[3] G. Giraud, *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 51 (1934), p. 251-372.

[4] N. I. Mouskhelishvili, *Singular integral equations*, Groningen-Holland 1953, p. 49.

[5] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 6 (1959), p. 311-317.

[6] — *Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés*, Journ. of Math. and Mech. (Indiana University) 7 (1958), p. 515-532.

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Problème de Cauchy pour un système parabolique

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

1. Introduction. Soit un système de $N \geqslant 1$ équations aux dérivées partielles

(1) $$\hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{k_1+\dots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X, t)\frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{1 \leqslant k_1+\dots+k_n \leqslant M} B_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X, t)\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} C_{\alpha j}(X, t)u_j - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, N)$ d'ordre $M \geqslant 2$ à N fonctions inconnues $u_1(X, t), \dots, u_N(X, t)$. Le système (1) est parabolique, d'après la définition donnée par Petrovsky (voir [1], [2]) donc le degré M des équations (1) est pair. Les coefficients $A_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}$, $B_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}$, $C_{\alpha j}$ sont des fonctions réelles, définies et bornées dans tout l'espace euclidien E des variables réelles $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et dans l'intervalle fini $0 \leqslant t \leqslant T$. Ces coefficients vérifient les conditions de Hölder suivantes:

(2) $$|A_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X_1, t_1)| < \text{const}[|XX_1|^h + |t - t_1|^{h'}],$$

(3) $$|B_{\alpha j}^{k_1\dots j_n}(X, t) - B_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X_1, t)| < \text{const}|XX_1|^h,$$

(4) $$|C_{\alpha j}(X, t) - C_{\alpha j}(X_1, t)| < \text{const}|XX_1|^h$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, n)$, où h et h' sont des constantes positives, non supérieures à l'unité; $|XX_1|$ désigne la distance euclidienne de deux points arbitraires X et X_1 de l'espace E, t et t_1 sont deux valeurs arbitraires de l'intervalle $(0, T)$.

Dans le travail [2] W. Pogorzelski a construit, sous les hypothèses (2), (3), (4), une matrice, dite matrice des solutions fondamentales, dont les éléments sont donnés par les formules:

(5) $$\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau) + \int_\tau^t \iiint_E \sum_{\gamma=1}^N W_{\alpha\gamma}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\, d\Pi\, d\zeta,$$