[4] — *O pewnych równaniach funkcyjnych*, Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell., Prace Matem. 5 (1959), p. 23-34.

[5] M. Kuczma, *On the functional equation* $\varphi(x)+\varphi[f(x)] = F(x)$, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 281-287.

[6] — *On the form of solutions of some functional equations*, Ann. Polon. Math. 9 (1960), p. 55-63.

Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur les périodes des solutions de l'équation différentielle $x''+g(x) = 0$

par Z. Opial (Kraków)

1. Considérons l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$x''+g(x) = 0 \tag{1}$$

où — comme d'habitude — $x'' = d^2x/dt^2$. Supposons que la fonction $g(x)$ soit définie et continue dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et telle que l'on ait

$$xg(x) > 0 , \tag{2}$$

quel que soit $x \neq 0$. Il en résulte, en particulier, que $g(0) = 0$. Désignons par $G(x)$ la fonction primitive de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 0$. On a donc

$$G(x) = \int_0^x g(s)\,ds ,$$

et, en vertu de l'hypothèse (2), $G(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Supposons de plus que l'on ait

$$\lim_{|x|\to\infty} G(x) = +\infty . \tag{3}$$

Dans ces hypothèses l'équation (1), équivalente au système de deux équations différentielles du premier ordre

$$x' = y , \quad y' = -g(x) \tag{4}$$

n'a qu'un seul point singulier, à savoir l'origine des coordonnées. Les solutions du système (4) sont les lignes de niveau de la fonction $y^2+2G(x)$, dont chacune est déterminée par l'équation

$$\tfrac{1}{2}y^2+G(x) = C \tag{5}$$

où C est une constante non négative. Si $C > 0$, toutes ces courbes sont fermées (en vertu de (3)), symétriques par rapport à l'axe des x et contiennent l'origine des coordonnées dans leurs intérieurs. Pour tout $s > 0$, la courbe (5) qui correspond à $C = G(s)$ détermine une solution $x(t; s)$ de l'équation (1), telle que

$$x(0; s) = s , \quad x'(0; s) = 0 . \tag{6}$$

Désignons par $\big(-T_g(s)/2,\ +T_g(s)/2\big)$ le plus grand voisinage de zéro dans lequel $x(t;s) > 0$. En vertu de l'équation (5), on a

$$\tfrac{1}{2}x'^2(t;s) + G\big(x(t;s)\big) = G(s)$$

d'où, à l'aide d'un calcul facile, on obtient pour $T_g(s)$ l'expression suivante

$$T_g(s) = \sqrt{2}\int_0^s \frac{du}{\sqrt{G(s)-G(u)}}\,. \tag{7}$$

Convenons d'appeler le nombre $T_g(s)$ demi-période positive de la solution $x(t;s)$.

Pour tout $s < 0$, la courbe (5) qui correspond à $C = G(s)$ détermine une solution $x(t;s)$ de l'équation (1) pour laquelle $x(0;s) = s$ et $x'(0;s) = 0$. Comme auparavant, désignons par $T_g(s)$ la longueur de plus grand voisinage de zéro $\big(-T_g(s)/2,\ T_g(s)/2\big)$ dans lequel $x(t;s) < 0$. On a une formule analogue à (7):

$$T_g(s) = \sqrt{2}\int_s^0 \frac{du}{\sqrt{G(s)-G(u)}} \qquad (s < 0)\,. \tag{8}$$

Convenons de dire que $T_g(s)$ est demi-période négative de la solution $x(t;s)$.

A tout $s > 0$ correspond un nombre négatif $a(s)$ tel que

$$G(s) = G\big(a(s)\big)\,. \tag{9}$$

Par conséquent, la période $P_g(s)$ de la solution $x(t;s)$ déterminée par les valeurs initiales (6) est donnée par la formule

$$P_g(s) = \sqrt{2}\cdot\int_{a(s)}^s \frac{du}{\sqrt{G(s)-G(u)}} \qquad (s > 0)\,. \tag{10}$$

Si la fonction $g(x)$ est impaire, c'est-à-dire si $g(-x) = -g(x)$, la fonction $G(x)$ est paire, et, par conséquent, de l'équation (9) on obtient $a(s) = -s$. Donc, dans ce cas la formule (10) peut s'écrire sous une forme plus simple

$$P_g(s) = 2\sqrt{2}\int_0^s \frac{du}{\sqrt{G(s)-G(u)}} \qquad (s > 0)\,. \tag{11}$$

2. A côté de l'équation (1) considérons une autre équation de la même forme

$$x'' + h(x) = 0\,, \tag{1'}$$

où la fonction $h(x)$, définie et continue dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions analogues à (2) et (3):

$$xh(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0\,, \tag{2'}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} H(x) = +\infty\,, \quad \text{où} \quad H(x) = \int_0^x h(s)\,ds\,. \tag{3'}$$

De même qu'au n° précédent, introduisons les demi-périodes positives et négatives des solutions de l'équation (1'). On a alors les formules

$$T_h(s) = \sqrt{2}\int_0^s \frac{du}{\sqrt{H(s)-H(u)}} \qquad (s > 0)\,, \tag{7'}$$

$$T_h(s) = \sqrt{2}\int_s^0 \frac{du}{\sqrt{H(s)-H(u)}} \qquad (s < 0)\,. \tag{8'}$$

En désignant par $b(s)$ la solution négative de l'équation $H(u) = H(s)$ $(s > 0)$, on obtient pour les périodes $P_h(s)$ des solutions de l'équation (1') la formule

$$P_h(s) = \sqrt{2}\int_{b(s)}^s \frac{du}{\sqrt{H(s)-H(u)}}\,, \tag{10'}$$

qui se réduit, dans le cas où $h(x)$ est une fonction impaire, à

$$P_h(s) = 2\sqrt{2}\int_0^s \frac{du}{\sqrt{H(s)-H(u)}}\,. \tag{11'}$$

3. Les expressions explicites des fonctions $T_g(x)$, $T_h(x)$, $P_g(x)$ et $P_h(x)$ nous permettront de montrer comment certaines inégalités entre ces fonctions se traduisent par des inégalités entre les fonctions $g(x)$, $h(x)$ ou $G(x)$ et $H(x)$. Ces théorèmes de comparaison nous permettront ensuite de conclure que si les fonctions $T_g(x)$ et $T_h(x)$ sont identiques, il en est de même des fonctions $g(x)$ et $h(x)$, ou, autrement dit, que les demi-périodes des solutions de deux équations différentes (1) et (1') doivent être, elles aussi, différentes (problème de l'isochronisme). L'application de ce dernier théorème dans le cas où la fonction $T_g(x)$ est égale à une constante nous donnera la réponse au problème du tautochronisme: *quelles sont les fonctions $g(x)$ pour lesquelles les demi-périodes des solutions de l'équation* (1) *sont toutes égales?*

Dans la seconde partie du présent travail nous établirons les conditions, soit nécessaires, soit suffisantes, sous lesquelles la fonction $T_g(x)$ est croissante ou décroissante, tend vers zéro ou l'infini lorsque x augmente indéfiniment etc.

Quant au problème du tautochronisme, sa solution est bien connue, mais seulement sous certaines hypothèses supplémentaires de régularité imposées à la fonction $g(x)$ (cf. p. ex. P. Appell [1], Ch. 10). Dans le cas où l'on ne suppose que la continuité de la fonction $g(x)$, la solution de ce problème a été donnée dans la note [2].

I. Théorèmes de comparaison

1. THÉORÈME 1. *Si les fonctions $g(x), h(x)$, définies et continues dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfont respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2′), (3′) *et si pour tout $x \neq 0$ on a*

$$T_g(x) \leqslant T_h(x) , \tag{12}$$

les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ satisfont à l'inégalité

$$H(x) \leqslant G(x) , \tag{13}$$

quel que soit x.

Si l'on remplace l'inégalité (12) *par l'inégalité stricte, alors au lieu de* (13) *on a aussi l'inégalité stricte*

$$H(x) < G(x) \qquad (x \neq 0) . \tag{13′}$$

Démonstration. Pour la démonstration par l'absurde supposons que l'inégalité (13) ne soit pas vraie. Il existe alors un $s \neq 0$ pour lequel

$$H(s) - G(s) = c > 0 . \tag{14}$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que $s > 0$. En remplaçant, s'il y a lieu, s par la plus petite racine positive de l'équation

$$H(x) - G(x) = c ,$$

nous pouvons supposer que dans tout l'intervalle $(0, s)$ on a l'inégalité

$$H(x) - G(x) < c . \tag{15}$$

En raison des formules (7), (7′) et de l'inégalité (12), on a

$$\int_0^s \frac{\sqrt{G(s)-G(u)} - \sqrt{H(s)-H(u)}}{\sqrt{G(s)-G(u)}\sqrt{H(s)-H(u)}}\, du \geqslant 0 . \tag{16}$$

Le dénominateur du quotient figurant sous le signe d'intégration étant toujours positif, il existe un nombre d appartenant à l'intervalle $(0, s)$ pour lequel le numérateur de ce quotient est non négatif, c'est-à-dire

$$\sqrt{G(s)-G(d)} \geqslant \sqrt{H(s)-H(d)} ,$$

d'où l'on tire immédiatement l'inégalité

$$H(d) - G(d) \geqslant H(s) - G(s) = c ,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (15). La première partie du théorème 1 est donc démontrée.

Supposons maintenant que l'on ait, au lieu de (12), l'inégalité stricte et qu'il existe un point $s > 0$ pour lequel

$$H(s) - G(s) = 0 . \tag{17}$$

Alors, en remplaçant dans (16) le signe d'inégalité faible par celui d'inégalité forte, on en conclut, de même que précédemment, l'existence d'un point d appartenant à l'intervalle $(0, s)$ tel que

$$\sqrt{G(s)-G(d)} - \sqrt{H(s)-H(d)} > 0 ,$$

c'est-à-dire, en raison de (17)

$$H(d) - G(d) > 0 .$$

Donc, pour achever la démonstration, il suffit de reprendre le raisonnement précédent.

2. L'interprétation géométrique du théorème 1 est bien simple. Désignons à cet effet par S_g et S_h deux surfaces données respectivement par les équations

$$z = \tfrac{1}{2}y^2 + G(x) \qquad \text{et} \qquad z = \tfrac{1}{2}y^2 + H(x) .$$

Cela étant, on peut dire que si les fonctions $T_g(x)$ et $T_h(x)$ satisfont pour tout $x \neq 0$, à l'inégalité (12), la surface S_g est située au-dessus de la surface S_h, et si c'est l'inégalité stricte qui a lieu, alors la surface S_g, pour tout $x \neq 0$, est située strictement au-dessus de la surface S_h.

Il est aussi facile de donner une interprétation dynamique du théorème 1. Comme on le sait, les équations (1) et (1′) peuvent être considérées comme équation du mouvement sur la droite $-\infty < x < +\infty$ d'un mobile de masse 1, soumis à l'action de forces conservatives égales respectivement à $-g(x)$ et $-h(x)$. Ces forces ne dépendent que de la position du mobile et, en vertu des hypothèses (2) et (2′), elles poussent ce mobile vers la position d'équilibre qui se trouve à l'origine des coordonnées.

Supposons maintenant que l'on ait deux mobiles de masse 1, dont le premier se meut sous l'influence de la force $-g(x)$, l'autre est soumis à l'action de la force $-h(x)$, et admettons que tous les deux commencent leur mouvement, pour $t = 0$, à partir du point x de la droite $-\infty < x < +\infty$, avec des vitesses initiales nulles. Ils parcourent le segment $(0, x)$ dans des intervalles de temps égaux respectivement à $T_g(x)/2$ et $T_h(x)/2$. Leurs énergies totales sont égales respectivement à $G(x)$ et $H(x)$, tandis que les valeurs absolues de leurs vitesses au point 0 sont $\sqrt{2G(x)}$ et $\sqrt{2H(x)}$.

D'après le théorème 1, nous pouvons donc dire que si, quel que soit $x \neq 0$, le premier mobile parcourt le segment $(0, x)$ dans un intervalle de temps plus court (strictement plus court) que le second, alors son énergie totale et la valeur absolue de sa vitesse au point 0 sont toujours plus grandes (strictement plus grandes) que celles du second mobile.

3. Dans le cas particulier où les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont impaires, des formules (11) et (11′) et du théorème 1 on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Si les fonctions $g(x)$, $h(x)$, définies, continues et impaires dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfont respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2′), (3′) *et si pour tout $x > 0$*

$$P_g(x) \leqslant P_h(x) \quad (resp.\ P_g(x) < P_h(x)),$$

les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ vérifient l'inégalité (13) (*resp.* (13′)), *quel que soit $x \neq 0$*).

Admettons maintenant que l'on ait $T_g(x) = T_h(x)$, quel que soit $x \neq 0$. Du théorème 1 on tire immédiatement l'inégalité (13) et, en changeant le rôle des fonctions $g(x)$ et $h(x)$, l'inégalité contraire $G(x) \leqslant H(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$. Dans ce cas on a donc l'identité

$$G(x) \equiv H(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

d'où par différantiation il vient $g(x) \equiv h(x)$ dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On a donc le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Si les fonctions $g(x)$, $h(x)$, définies et continues dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfont respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2′), (3′) *et si pour tout $x \neq 0$ on a*

$$T_g(x) = T_h(x),$$

les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont identiques dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

On obtient de même un corollaire analogue au corollaire 1.

COROLLAIRE 2. *Si les fonctions $g(x)$, $h(x)$, définies, continues et impaires dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfont respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2′), (3′) *et si pour tout $x \neq 0$*

$$P_g(x) = P_h(x),$$

les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont identiques dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

4. Soit T une constante positive. Pour $h(x) = (\pi/T)^2 x$ on obtient des formules (7′) et (8′):

$$T_h(x) = \sqrt{2}\int_0^{|x|} \frac{du}{\sqrt{\pi^2/2T^2(x^2-u^2)}} = \frac{2T}{\pi}\int_0^{|x|} \frac{du}{\sqrt{x^2-u^2}} = \frac{2T}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = T.$$

Par conséquent, du théorème 2 on déduit immédiatement le théorème suivant, connu sous le nom de théorème des mouvements tautochrones.

THÉORÈME 3. *Si pour une fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et satisfaisant aux hypothèses* (2) *et* (3) *on a, pour tout $x \neq 0$, l'identité*

$$T_g(x) = T$$

où T est une constante, la fonction $g(x)$ est identique à $(\pi/T)^2 x$.

Autrement dit, les seuls mouvements d'un mobile de masse 1 sur la droite $-\infty < x < +\infty$ sous l'influence d'une force dépendant de la position, pour lesquels les demi-périodes $T_g(x)$ sont toutes égales à une constante, sont les mouvements harmoniques.

5. En examinant de plus près les formules (7), (8), (7′) et (8′), on voit aussitôt que la réciproque du théorème 1 serait fausse. En d'autres termes, l'inégalité (13) n'est nullement suffisante pour assurer l'inégalité (12), comme le montrent des exemples élémentaires faciles à construire. Il est cependant aisé de donner une simple condition suffisante pour que l'on ait l'inégalité (12), quel que soit $x \neq 0$. Il suffit notamment de supposer que l'on a

$$|g(x)| \geqslant |h(x)| \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{18}$$

car on en tire immédiatement les inégalités

$$G(x) - G(u) = \int_u^x g(s)\,ds \geqslant \int_u^x h(s)\,ds = H(x) - H(u) \quad (0 \leqslant u \leqslant x), \tag{19}$$

$$G(x) - G(u) = \int_u^x g(s)\,ds = \int_x^u \big(-g(s)\big)\,ds \geqslant \int_x^u \big(-h(s)\big)\,ds$$
$$= \int_u^x h(s)\,ds = H(x) - H(u) \quad (x \leqslant u \leqslant 0),$$

d'où il est facile de déduire l'inégalité (12).

On a donc le théorème suivant.

THÉORÈME 4. *Si les fonctions $g(x)$ et $h(x)$, définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfont respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2′), (3′), (18), *alors on a l'inégalité* (12), *quel que soit $x \neq 0$.*

Dans le cas où les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont impaires on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. *Si les fonctions $g(x)$, $h(x)$, définies, continues et impaires dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfont respectivement aux conditions* (2), (3), (2′), (3′) *et* (18), *on a l'inégalité* (12), *quel que soit $x \neq 0$.*

Considérons, en particulier, le cas où $h(x) = h^2x$, h étant une constante positive. Du théorème 4 on déduit alors le suivant:

COROLLAIRE 4. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si l'on a*

$$|g(x)| \geqslant h^2|x| \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

la fonction $T_g(x)$ vérifie l'inégalité

$$T_g(x) \leqslant \pi/h,$$

quel que soit $x \neq 0$.

En changeant le rôle des fonctions $g(x)$ et h^2x, on obtient de même le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si l'on a*

$$|g(x)| \leqslant h^2|x| \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

la fonction $T_g(x)$ vérifie l'inégalité

$$T_g(x) \geqslant \pi/h \qquad (x \neq 0).$$

Revenons encore une fois à l'interprétation dynamique du théorème 1, mais en admettant cette fois que l'on a l'inégalité (18). Considérons de nouveau deux mobiles de masse 1 qui, pour $t = 0$, commencent leur mouvement à partir du point x, avec des vitesses initiales nulles, sous l'influence des forces $-g(x)$ et $-h(x)$. Pour fixer les idées, supposons $x > 0$. Pour tout $v \in \langle 0, x \rangle$ désignons par $T_g(x, v)$ et $T_h(x, v)$ les intervalles de temps dans lesquels ces mobiles parcourent le segment (v, x). A l'aide d'un calcul élémentaire on parvient aux formules suivantes

$$(20) \qquad T_g(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_v^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}}, \qquad T_h(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_v^x \frac{du}{\sqrt{H(x)-H(u)}}.$$

Donc, en vertu des inégalités (19), on a non seulement l'inégalité (12), mais aussi les inégalités plus générales

$$(21) \qquad T_g(x, v) \leqslant T_h(x, v) \qquad (0 \leqslant v \leqslant x \text{ ou } x \leqslant v \leqslant 0).$$

Les valeurs absolues des vitesses de nos mobiles au point v sont égales respectivement à $\sqrt{2\big(G(x)-G(v)\big)}$ et $\sqrt{2\big(H(x)-H(v)\big)}$. Des inégalités (19) il s'ensuit que le premier de ces nombres est inférieur ou au plus égal au second.

Il va sans dire que les même considérations sont aussi valables pour tout $x < 0$.

De ce que nous avons dit il résulte que, dans le cas où l'on admet l'inégalité (18), l'origine des coordonnées perd sa position privilégiée et que n'importe quel autre point de l'intervalle $(0, x)$ peut jouer le même rôle, ce qui n'est pas vrai, en général, dans le cas où l'on n'admet que l'inégalité (13). Cela signifie entre autres que l'inégalité (18) ne saurait être une condition nécessaire pour que l'on ait l'inégalité (12), ce qu'il est d'ailleurs facile de prouver directement.

Nous avons montré que l'inégalité (18) a pour conséquence l'inégalité (21). L'assertion inverse est aussi vraie, de sorte que les conditions (18) et (21) sont équivalentes. Supposons en effet que, pour tout x et tout $v \in \langle 0, x \rangle$, on ait l'inégalité (21). Pour démontrer (18) il suffit évidemment de prouver les inégalités (19). Pour la démonstration par l'absurde supposons qu'elles soient en défaut. Il existe alors un s que — pour fixer les idées — nous pouvons supposer positif et un $d \in \langle 0, s)$ tels que

$$(22) \qquad H(s)-G(s) = H(d)-G(d)+c \qquad (c > 0).$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons admettre que s et d ont été choisis de sorte que l'on ait

$$(23) \qquad H(u)-G(u) < H(d)-G(d)+c,$$

quel que soit $u \in (d, s)$. Des formules (20) et de l'inégalité $T_g(s, d) \leqslant T_h(s, d)$ on tire l'inégalité

$$\int_d^s \frac{\sqrt{H(s)-H(u)}-\sqrt{G(s)-G(u)}}{\sqrt{H(s)-H(u)}\sqrt{G(s)-G(u)}}\, du \leqslant 0,$$

d'où il résulte l'existence d'un point e appartenant à l'intervalle (d, s) tel que

$$\sqrt{H(s)-H(e)}-\sqrt{G(s)-G(e)} \leqslant 0.$$

Par conséquent, on a

$$H(s)-G(s) \leqslant H(e)-G(e)$$

et, en vertu de (22)

$$H(e)-G(e) \geqslant H(d)-G(d)+c$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (23).

Nous avons donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Si les fonctions $g(x)$ et $h(x)$, définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfont respectivement aux hypothèses* (2), (3) *et* (2'), (3'), *la condition* (18) *est nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'inégalité* (21).

6. En s'appuyant sur les résultats précédents, il est facile d'établir des conditions soit nécessaires, soit suffisantes, pour que la fonction $T_g(x)$ soit monotone dans chacun des intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

THÉORÈME 6. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si la fonction $T_g(x)$ est croissante (strictement croissante) dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et décroissante (strictement décroissante) dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, la fonction $G(x)/x^2$ est décroissante (strictement décroissante) dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et croissante (strictement croissante) dans l'intervalle $(-\infty, 0)$.*

Démonstration. Nous nous bornerons à démontrer la partie du théorème relative à l'intervalle $(0, +\infty)$, puisque la démonstration de l'autre partie s'obtient d'une manière analogue. Pour tout $p > 1$ et tout $x > 0$, on a par hypothèse

$$T_g(x) \leqslant T_g(px) \quad (0 < x,\ p > 1)\,. \tag{24}$$

D'autre part, d'après la formule (7), on a

$$T_g(px) = \sqrt{2}\int_0^{px} \frac{du}{\sqrt{G(px)-G(u)}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{x} \frac{p\,du}{\sqrt{G(px)-G(pu)}} = \sqrt{2}\int_0^{x} \frac{du}{\sqrt{G(px)/p^2-G(pu)/p^2}}\,.$$

Il en résulte que l'inégalité (24) peut être remplacée par la suivante

$$T_g(x) \leqslant T_{h_p}(x) \quad (0 < x,\ p > 1)\,, \tag{25}$$

où

$$h_p(x) = g(px)/p \quad (0 \leqslant x < +\infty,\ p > 1)\,. \tag{26}$$

En vertu du théorème 1, il en résulte l'inégalité

$$\int_0^x h_p(s)\,ds \leqslant G(x) \quad (0 \leqslant x < +\infty,\ p > 1) \tag{27}$$

c'est-à-dire, en raison de (26)

$$G(px)/p^2 \leqslant G(x) \quad (0 \leqslant x < +\infty,\ p > 1)\,. \tag{28}$$

En divisant par x^2, on en tire l'inégalité

$$G(px)/(px)^2 \leqslant G(x)/x^2 \quad (0 < x < +\infty,\ p > 1)\,, \tag{29}$$

ce qui signifie que la fonction $G(x)/x^2$ est décroissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

Dans l'hypothèse que la fonction $T_g(x)$ est strictement croissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$, on peut remplacer l'inégalité (24) par l'inégalité forte, ce qui permet d'en faire de même dans chacune des inégalités (25), (27), (28) et (29), d'où il résulte que dans ce cas la fonction $G(x)/x^2$ est strictement décroissante.

Le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

On a aussi le théorème suivant, analogue au théorème 6, que nous nous bornerons à énoncer, car sa démonstration s'obtient immédiatement de celle du théorème précédent par un simple changement des rôles des fonctions $g(x)$ et $h_p(x)$.

THÉORÈME 7. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si la fonction $T_g(x)$ est décroissante (strictement décroissante) dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et croissante (strictement croissante) dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, la fonction $G(x)/x^2$ est croissante (strictement croissante) dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et décroissante (strictement décroissante) dans l'intervalle $(-\infty, 0)$.*

Remarquons que dans le cas où la fonction $T_g(x)$ est supposée constante, on peut appliquer aussi bien le théorème 6 que le théorème 7, ce qui conduit à la conclusion que la fonction $G(x)/x^2$ doit être constante. Cela nous fournit une nouvelle démonstration du théorème 3.

La fonction $H(x) = x^2$ correspond à la fonction linéaire $h(x) = 2x$, pour laquelle les demi-périodes $T_h(x)$ des solutions de l'équation (1′) sont toutes égales à une constante. Les théorèmes 6 et 7 nous apprennent donc que si, pour une fonction $g(x)$, les demi-périodes $T_g(x)$ $(x > 0)$ des solutions de l'équation différentielle (1) croissent à mesure que le point x s'éloigne de l'origine des coordonnées, la fonction $G(x)$ décroît par rapport à la fonction x^2, pour laquelle ces demi-périodes sont constantes, et inversement — si ces demi-périodes décroissent, la fonction $G(x)$ croît par rapport x^2. Il en est évidemment de même en ce qui concerne le comportement de la fonction $T_g(x)$ dans l'intervalle $(-\infty, 0)$. Cette remarque nous permet de comprendre le rôle que joue dans les théorèmes 6 et 7 la fonction x^2.

7. Des exemples élémentaires, bien faciles à construire, montrent que l'inégalité (29), supposée vérifiée pour tout $x > 0$ et tout $p > 1$, peut ne pas entraîner l'inégalité (24), ce qui signifie que la réciproque du théorème 6 serait fausse. Il est cependant aisé d'établir un théorème analogue au théorème 4 donnant des conditions suffisantes pour que la fonction $T_g(x)$ soit ou bien croissante, ou bien décroissante.

THÉORÈME 8. *Soit $g(x)$ une fonction définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2) *et* (3). *Alors, pour que la fonction $T_g(x)$ soit croissante (décroissante) dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et décroissante (croissante) dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, il suffit que la fonction $g(x)/x$ soit décroissante (croissante) dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et croissante (décroissante) dans l'intervalle $(-\infty, 0)$.*

Démonstration. Nous nous bornerons à envisager l'hypothèse que la fonction $g(x)/x$ est décroissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Dans ce cas, pour tout $x > 0$ et tout $p > 1$, on a l'inégalité (26). Par conséquent, du théorème 4 appliqué aux fonctions $g(x)$ et $h_p(x) = g(px)/p$ il résulte que pour tout $x > 0$ on a l'inégalité (25). Mais nous avons vu que cette inégalité est équivalente à l'inégalité (24) et, par suite, le théorème 8 se trouve démontré.

Il est immédiat que la condition de la décroissance de la fonction $g(x)/x$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$ n'est nullement nécessaire pour que la fonction $T_g(x)$ soit croissante dans le même intervalle. Bien plus, en s'appuyant sur le théorème 5, il est facile de démontrer que cette condition est équivalente non pas à la croissance de la fonction $T_g(x)$, mais à une inégalité essentiellement plus forte que (24), à savoir

$$T_g(x, v) \leqslant T_g(px, pv),$$

pour tout $x > 0$, tout $v \in \langle 0, x \rangle$ et tout $p > 1$.

Il va sans dire que de pareilles remarques s'appliquent aussi à l'intervalle $(-\infty, 0)$ et à d'autres modes de comportement des fonctions $T_g(x)$ et $g(x)/x$.

II. Allure asymptotique de la fonction $T_g(x)$

1. Dans le présent paragraphe nous établirons quelques théorèmes sur l'allure asymptotique de la fonction $T_g(x)$ lorsque x tend ou bien vers l'infini, ou bien vers zéro. Pour simplifier, nous nous bornerons à considérer l'intervalle $(0, +\infty)$, c'est-à-dire nous n'examinerons que les cas où la variable x tend ou bien vers l'infini positif, ou bien vers zéro, mais par des valeurs positives.

Nous admettons la convention suivante: $1/0 = +\infty$ et $1/\infty = 0$.

THÉORÈME 9. *Soient $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2), (3) *et* (2'), (3'). *Dans ces hypothèses, chacune des relations*

$$(30)\qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = k, \quad \lim_{x\to 0+} g(x)/h(x) = k \quad (0 \leqslant k \leqslant +\infty)$$

entraîne respectivement les relations

$$(31)\qquad \lim_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = 1/\sqrt{k}, \quad \lim_{x\to 0+} T_g(x)/T_h(x) = 1/\sqrt{k}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que k soit un nombre fini différent de zéro et que l'on ait la première des relations (30). Fixons un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < k$. On a alors, par hypothèse

$$(32)\qquad (k-\varepsilon)h(x) \leqslant g(x) \leqslant (k+\varepsilon)h(x),$$

pourvu que x soit plus grand qu'on nombre K convenablement choisi. D'après les formules (20), on a pour tout $x \geqslant K$:

$$(33)\qquad \begin{aligned} T_g(x) &= 2T_g(x, K) + \big(T_g(x) - 2T_g(x, K)\big), \\ T_h(x) &= 2T_h(x, K) + \big(T_h(x) - 2T_h(x, K)\big). \end{aligned}$$

Mais, en vertu des hypothèses (3) et (3'), on a les relations

$$(34)\qquad \lim_{x\to+\infty} \big(T_g(x) - 2T_g(x, K)\big)/T_g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(T_h(x) - 2T_h(x, K)\big)/T_h(x) = 0.$$

Donc, pour obtenir la première des relations (31), il suffit d'évaleur la limite du quotient $T_g(x, K)/T_h(x, K)$, ce qui est bien facile puisque l'on a, en raison des inégalités (32)

$$(35)\qquad \frac{1}{\sqrt{k+\varepsilon}} T_h(x, K) \leqslant T_g(x, K) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}} T_h(x, K) \quad (K \leqslant x),$$

d'où il vient

$$(36)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k+\varepsilon}} &\leqslant \liminf_{x\to+\infty} T_g(x, K)/T_h(x, K) = \liminf_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) \\ &\leqslant \limsup_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = \limsup_{x\to+\infty} T_g(x, K)/T_h(x, K) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Comme ε peut être aussi petit que l'on veut, il en résulte que la limite du quotient $T_g(x)/T_h(x)$ existe et qu'elle est égale à $1/\sqrt{k}$.

Dans le cas où k est égal à $+\infty$ ou à zéro, la démonstration procède de la même façon. On remplace les inégalités (32) par une inégalité unilatérale convenable, on profite ensuite des formules (33) et des relations (34), ce qui conduit à des inégalités analogues à (35), (36), qui nous permettent de démontrer que le quotient $T_g(x)/T_h(x)$ tend ou bien vers zéro, ou bien vers l'infini.

La première partie du théorème 9, relative aux premières des relations (30) et (31), se trouve ainsi démontrée.

Revenons à l'hypothèse que k est un nombre fini différent de zéro et supposons que l'on ait la seconde des relations (30). Dans ce cas, les inégalités (32) se trouvent vérifiées dans un voisinage $(0, K)$ suffisamment petit de 0, et, par conséquent, on a pour tout $x \in (0, K)$ les inégalités

$$(37)\qquad \frac{1}{\sqrt{k+\varepsilon}} T_h(x) \leqslant T_g(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}} T_h(x),$$

d'où il vient immédiatement

$$\frac{1}{\sqrt{k+\varepsilon}} \leqslant \liminf_{x\to 0+} T_g(x)/T_h(x) \leqslant \limsup_{x\to 0+} T_g(x)/T_h(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}}.$$

Comme ε est tout à fait arbitraire, il en résulte l'existence de la limite du quotient $T_g(x)/T_h(x)$ et la seconde des relations (31).

Dans l'hypothèse que k est égal soit à l'infini, soit à zéro, la démonstration s'obtient de la même façon en remplaçant les inégalités (37) par une inégalité unilatérale convenable.

Le théorème 9 se trouve ainsi complètement démontré.

2. Dans le cas particulier où la fonction $h(x)$ est linéaire, du théorème 9 on déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6. *Soit $g(x)$ une fonction définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2) *et* (3). *Dans ces hypothèses, la relation*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)/x = k \qquad (0 \leqslant k \leqslant +\infty)$$

entraîne la suivante:

$$\lim_{x\to+\infty} T_g(x) = \pi/\sqrt{k}\,.$$

En particulier, si $k=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = +\infty$, et si $k=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = 0$.

De même, la relation

$$\lim_{x\to 0+} g(x)/x = k \qquad (0 \leqslant k \leqslant +\infty)$$

a pour conséquence la suivante:

$$\lim_{x\to 0+} T_g(x) = \pi/\sqrt{k}\,.$$

En particulier, si $k=0$, on a $\lim\limits_{x\to 0+} T_g(x) = +\infty$, et si $k=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0+} T_g(x) = 0$.

Remarquons que

$$\lim_{x\to 0+} g(x)/x = \lim_{x\to 0+} \big(g(x)-g(0)\big)/x = g'_+(0)\,,$$

où $g'_+(0)$ désigne la dérivée à droite de la fonction $g(x)$ au point 0. D'après le corollaire 6, on peut donc dire que l'existence de cette dérivée entraîne toujours l'existence de la limite de la fonction $T_g(x)$, lorsque t tend vers zéro par des valeurs positives, et que cette limite est égale à $\pi/\sqrt{g'_+(0)}$ si $g'_+(0)$ est finie et différente de zéro, à 0 si $g'_+(0) = +\infty$ et à $+\infty$ si $g'_+(0) = 0$.

Pareillement, dans le cas où la fonction $g(x)$ est dérivable et la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$ existe, on a, d'après la règle de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)/x = \lim_{x\to+\infty} g'(x) = g'(\infty)\,.$$

Donc, si cette dernière limite existe et si elle est non négative, la fonction $T_g(x)$ admet aussi une limite lorsque t tend vers l'infini, et celle-ci est égale à $\pi/\sqrt{g'(\infty)}$ si la valeur de $g'(\infty)$ est finie et différente de zéro, à $+\infty$ si $g'(\infty) = 0$ et à 0 si $g'(\infty) = +\infty$.

3. Il n'est pas difficile de voir qu'en introduisant dans la démonstration du théorème 9 quelques modifications inessentielles, on pourrait prouver un théorème plus général que nous nous bornerons à énoncer.

THÉORÈME 10. *Soient $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2′), (3′) *et telles que*

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = k\,, \qquad \limsup_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = K \qquad (0 \leqslant k \leqslant K \leqslant +\infty)\,.$$

Dans ces hypothèses, on a

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) \geqslant 1/\sqrt{K} \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) \leqslant 1/\sqrt{k}\,.$$

Il en est de même si l'on remplace les limites inférieures et supérieures à l'infini par les limites correspondantes au point 0.

On en déduit aussitôt le corollaire suivant.

COROLLAIRE 7. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si*

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/x = k\,, \qquad \limsup_{x\to+\infty} g(x)/x = K \qquad (0 \leqslant k \leqslant K \leqslant +\infty)\,,$$

alors

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \geqslant \pi/\sqrt{K} \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \pi/\sqrt{k}\,,$$

et il en est de même lorsque l'on remplace les limites à l'infini par les limites correspondantes au point 0.

Si l'on désigne par $\bar{g}'_+(0)$ et $\underline{g}'_+(0)$ respectivement les nombres dérivés supérieur et inférieur à droite de la fonction $g(x)$ au point 0, on aura

$$\liminf_{x\to 0+} T_g(x) \geqslant \pi/\sqrt{\bar{g}'_+(0)} \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to 0+} T_g(x) \leqslant \pi/\sqrt{\underline{g}'_+(0)}\,.$$

De même, si la fonction $g(x)$ est dérivable et si l'on pose

$$\underline{g}'(\infty) = \liminf_{x\to+\infty} g'(x)\,, \qquad \bar{g}'(\infty) = \limsup_{x\to+\infty} g'(x)\,,$$

alors, dans l'hypothèse supplémentaire que $\underline{g}'(\infty) \geqslant 0$, on a

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \geqslant \pi/\sqrt{\bar{g}'(\infty)} \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \pi/\sqrt{\underline{g}'(\infty)}\,.$$

4. Revenons encore une fois au cas particulier où la fonction $h(x)$ est supposée linéaire. Les corollaires 6 et 7 que nous avons énoncés ci-dessus ont été déduits des théorèmes beaucoup plus généraux 9 et 10. Cela veut dire que cette hypothèse simplifiante intervenait seulement dans les énoncés de ces corollaires, mais non pas dans leurs démonstrations. Aussi ne doit-on pas s'étonner qu'il soit possible d'établir quelques résultats plus forts en faisant intervenir directement certaines propriétés spéciales de la fonction linéaire.

THÉORÈME 11. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si*

$$\lim_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = 0\,, \tag{38}$$

la fonction $T(x)$ tend vers l'infini quand x croît indéfiniment.

Démonstration. Quel que soit ε positif, on a, en vertu de (38), l'inégalité

$$G(x) \leqslant \varepsilon x^2\,,$$

pourvu que x soit supérieur à un $c(\varepsilon)$ suffisamment grand. Donc, pour tout $x \geqslant c(\varepsilon)$, on a

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \geqslant \int_{c(\varepsilon)}^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \geqslant \int_{c(\varepsilon)}^x \frac{du}{\sqrt{G(x)}} = \frac{x-c(\varepsilon)}{\sqrt{G(x)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1-\frac{c(\varepsilon)}{x}\right)$$

d'où l'on tire inégalité

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\,,$$

quel que soit ε positif. Le théorème 11 est donc démontré.

THÉORÈME 12. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si*

$$\liminf_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = k\,, \quad \limsup_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = K \quad (0 < k \leqslant K < +\infty) \tag{39}$$

alors

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \arcsin \sqrt{\frac{k}{K}}\,. \tag{40}$$

Démonstration. Fixons un ε positif inférieur à k. Pour tout x plus grand qu'un $c(\varepsilon)$ convenablement choisi on a, en raison de l'hypothèse (39)

$$(k-\varepsilon)x^2 \leqslant G(x) \leqslant (K+\varepsilon)x^2\,.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \geqslant \int_{c(\varepsilon)}^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \geqslant \int_{c(\varepsilon)}^x \frac{du}{\sqrt{(K+\varepsilon)x^2-(k-\varepsilon)u^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}}\cdot\left(\arcsin\sqrt{\frac{k-\varepsilon}{K+\varepsilon}} - \arcsin\frac{c(\varepsilon)}{x}\sqrt{\frac{k-\varepsilon}{K+\varepsilon}}\right).$$

On en tire l'inégalité

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k-\varepsilon}} \arcsin \sqrt{\frac{k-\varepsilon}{K+\varepsilon}}\,,$$

quel que soit ε positif inférieur à k. Il s'ensuit que l'inégalité (40) se trouve vérifiée.

Du théorème 12 on déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 8. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et*

$$\lim_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = k \quad (0 < k < +\infty)\,, \tag{41}$$

alors

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \geqslant \pi/\sqrt{2k}\,. \tag{42}$$

Il est facile de montrer que la relation (41) peut ne pas entraîner l'existence de la limite de la fonction $T_g(x)$ et que l'on peut même avoir $\limsup_{x\to+\infty} T_g(x) = +\infty$ (cf. n° 6 de ce paragraphe). D'autre part, pour $G(x) = kx^2$, l'inégalité (42) se transforme en égalité, ce qui signifie que dans cette inégalité le nombre $\pi/\sqrt{2k}$ est le plus grand possible. Il ne serait pas difficile de montrer qu'il en est de même de l'inégalité (40).

5. Bien que l'existence de la limite (41) n'entraîne pas, en général, l'existence de celle de la fonction $T_g(x)$, ceci peut avoir lieu sous certaines hypothèses supplémentaires imposées au mode de la convergence exprimée par la relation (41), comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 13. *Si la fonction $g(x)$, définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, satisfait aux conditions* (2), (3) *et si la fonction $G(x)/x^2$ est croissante au sens large dans l'intervalle $(0, +\infty)$, de la relation* (41) *il résulte que l'on a*

$$\lim_{x\to+\infty} T_g(x) = \pi/\sqrt{2k}\,. \tag{43}$$

En particulier, si

$$\lim_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = +\infty\,, \tag{44}$$

la fonction $T_g(x)$ tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment.

Démonstration. Par hypothèse, la fonction $G^*(x) = G(x)/x^2$ est croissante au sens large dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et tend vers k lorsque x tend vers l'infini. On a donc, quel que soit x positif

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \tag{45}$$
$$= \int_0^x \frac{du}{\sqrt{G^*(x)x^2-G^*(u)u^2}} \leqslant \int_0^x \frac{du}{\sqrt{G^*(x)(x^2-u^2)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{G^*(x)}}\,.$$

Il en résulte, en raison de (41)

$$\limsup_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \pi/\sqrt{2k}\,,$$

ce qui donne, avec l'inégalité (42), la conclusion (43).

Enfin, si l'on a la relation (44), la convergence vers zéro de la fonction $T_g(x)$ résulte immédiatement de l'inégalité (45).

6. La conclusion du théorème 13 cesse, en général, d'être vraie lorsque la fonction $G(x)/x^2$ est décroissante, mais la construction d'un exemple illustrant ce fait n'est pas simple. Nous nous bornerons donc à esquisser l'idée d'une telle construction.

Remarquons d'abord qu'il suffit pour cela de construire dans l'intervalle $(0, +\infty)$ une fonction $G(x) = x^2+P(x)$ telle que l'on ait

$$P(x) > 0\,, \quad P'(x) = p(x) > -2x \quad (0 < x < +\infty)\,, \tag{46}$$

$$P'(x) \leqslant 2P(x)/x \quad (0 < x < +\infty) \tag{47}$$

et que, pour $g(x) = 2x+p(x)$, la limite supérieure de la fonction $T_g(x)$ lorsque t tend vers l'infini soit égale à $+\infty$. En effet, la seconde des conditions (47) a pour conséquence la condition (2) et la condition (47) assure la non-croissance de la fonction $G(x)/x^2 = 1+P(x)/x^2$, qui, en vertu de la première inégalité (46), est bornée inférieurement par une constante supérieure ou égale à 1, et, par conséquent, tend vers une limite positive lorsque x augmente indéfiniment.

Passons à la construction de la fonction $P(x)$, ou, ce qui revient au même, à celle de la fonction $p(x) = P'(x)$. Soit a_1 un nombre positif inférieur à 1 tel que

$$2(1-a_1)^2 > 1\,. \tag{48}$$

Posons dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$:

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1-a_1\,,\\ -2(1-a_1^2)x & \text{si} \quad 1-a_1 < x \leqslant 1\,.\end{cases}$$

On a alors

$$P(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1-a_1\,,\\ (1-a_1)^2-(1-a_1^2)\big(x^2-(1-a_1)^2\big) & \text{si} \quad 1-a_1 \leqslant x \leqslant 1\,,\end{cases}$$

de sorte qu'en vertu de l'inégalité (48)

$$P(1) = (1-a_1)^2-(1-a_1^2)\big(1-(1-a_1)^2\big) > 2(1-a_1)^2-1 > 0\,.$$

Cela étant, la construction ultérieure de la fonction $p(x)$ et le choix d'une suite de nombres $a_i > 0$ procèdent par induction. Supposons à cet effet que la fonction $p(x)$ soit déjà construite dans l'intervalle $\langle 0, n-1\rangle$ et que l'on ait déjà défini la suite $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ de telle sorte que

$$P(n-1) = \int_0^{n-1} p(u)\,du > 0\,. \tag{49}$$

Définissons maintenant la fonction $p(x)$ dans l'intervalle $(n-1, n\rangle$, en posant

$$p(x) = \begin{cases} 2\,\dfrac{P(n-1)}{(n-1)^2}\,x & \text{si} \quad n-1 < x \leqslant n(1-a_n)\,,\\ -2(1-a_n^2)x & \text{si} \quad n(1-a_n) < x \leqslant n\,,\end{cases} \tag{50}$$

où le nombre positif $a_n < 1$ va être défini dans la suite. On a alors

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{P(n-1)}{(n-1)^2}\,x^2 & \text{si} \quad n-1 \leqslant x \leqslant n(1-a_n)\,,\\ \dfrac{P(n-1)}{(n-1)^2}\,n^2(1-a_n)^2-(1-a_n^2)\big(x^2-n^2(1-a_n)^2\big) & \text{si} \quad n(1-a_n) \leqslant x \leqslant n\,.\end{cases}$$

Donc, en particulier

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{P(n-1)}{(n-1)^2}\,n^2(1-a_n)^2-(1-a_n^2)\,n^2\big(1-(1-a_n)^2\big)\\ &\geqslant n^2\left\{\left(\frac{P(n-1)}{(n-1)^2}+1\right)(1-a_n)^2-1\right\}.\end{aligned}$$

En raison de l'inégalité (49), il en résulte que le nombre a_n peut être choisi de telle sorte que l'on ait $P(n) > 0$.

Nous avons donc démontré que, procédant ainsi de proche en proche, on pourra définir la fonction $p(x)$ dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$. Il est facile de voir que les nombres positifs a_i qui interviennent dans cette construction peuvent être choisis de manière que

$$\lim_{i\to+\infty} a_i = 0\,. \tag{51}$$

On vérifie facilement que la fonction $P(x)$ satisfait aux conditions (46) et (47). D'autre part, en raison des formules (50), on a, quel que soit $n \geqslant 2$:

$$g(x) = 2x+p(x) = 2a_n^2 x \quad (n(1-a_n) < x \leqslant n)\,,$$

et, par conséquent

$$G(x)-G(u) = a_n^2(x^2-u^2) \quad (n(1-a_n) \leqslant u \leqslant x \leqslant n)\,.$$

Donc, quel que soit $n \geqslant 2$, on a

$$(52) \qquad T_g(n) = \sqrt{2}\int_0^n \frac{du}{\sqrt{G(n)-G(u)}} \geqslant \sqrt{2}\int_{n(1-a_n)}^n \frac{du}{\sqrt{G(n)-G(u)}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{a_n}\int_{n(1-a_n)}^n \frac{du}{\sqrt{n^2-u^2}} = \frac{\sqrt{2}}{a_n}\big(\pi/2-\arcsin(1-a_n)\big)\,.$$

Mais, en vertu de la règle de L'Hôpital, on a

$$\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a}\big(\pi/2-\arcsin(1-a)\big) = \lim_{a\to 0+}\frac{1}{\sqrt{1-(1-a)^2}} = +\infty\,.$$

Donc, de la relation (51) et des inégalités (52) il résulte que $\limsup\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T_g(n) = +\infty$.

La fonction $p(x)$ que nous venons de construire est, il est vrai, discontinue en une infinité de points isolés de l'intervalle $(0, +\infty)$ mais il est aisé de voir qu'il est possible d'obtenir le même résultat en la remplaçant par une fonction continue suffisamment voisine.

7. Dans tous les théorèmes que nous avons établis dans le présent paragraphe le schéma était toujours le même; on partait de certaines hypothèses sur l'allure asymptotique des fonctions $g(x)$, $h(x)$ ou $G(x)$, $H(x)$ et on tâchait d'en déduire certaines propriétés asymptotiques des périodes $T_g(x)$, $T_h(x)$ des solutions des équations (1) et (1'). Or, à l'aide des théorèmes de comparaison démontrés au paragraphe précédent, il est facile d'établir quelques théorèmes dans lesquels ce sont les propriétés asymptotiques des périodes $T_g(x)$ et $T_h(x)$ qui jouent le rôle des hypothèses qui entraînent certaines propriétés des fonctions $G(x)$ et $H(x)$.

THÉORÈME 14. *Soient $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant respectivement aux conditions* (2), (3) *et* (2'), (3'). *Dans ces hypothèses, si*

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = l \quad \textit{et} \quad \limsup_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = L \quad (0 \leqslant l \leqslant L \leqslant +\infty)\,,$$

on a les inégalités

$$(53) \qquad L^{-2} \leqslant \liminf_{x\to+\infty} G(x)/H(x) \leqslant \limsup_{x\to+\infty} G(x)/H(x) \leqslant l^{-2}\,.$$

Démonstration. Dans le cas où $l = 0$ ou $L = +\infty$, les inégalités correspondantes (53) deviennent triviales. Il suffit donc de les démontrer dans l'hypothèse que $l > 0$ et $L < +\infty$. De même, il suffit de prouver seulement la première de ces inégalités, car la seconde s'en déduit par un simple changement des rôles des fonctions $g(x)$ et $h(x)$.

Pour démontrer la première des inégalités (53) il suffit de prouver que pour tout nombre fini M supérieur à L on a l'inégalité

$$(54) \qquad \liminf_{x\to+\infty} G(x)/H(x) \geqslant M^{-2}\,.$$

Bien plus, en remplaçant, s'il y a lieu, la fonction $h(x)$ par $h(x)/M^2$ on peut se borner au cas où $M = 1$. Supposons donc que l'on ait

$$(55) \qquad \limsup_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) < 1\,.$$

Nous allons montrer que $\liminf\limits_{x\to+\infty} G(x)/H(x) \geqslant 1$. De l'inégalité (55) il s'ensuit que, pour tout x supérieur à un c suffisamment grand, on a

$$(56) \qquad \int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} < \int_0^x \frac{du}{\sqrt{H(x)-H(u)}} \qquad (x \geqslant c)\,.$$

Observons d'abord que dans l'intervalle $(c, +\infty)$ il existe un d pour lequel $g(d) \geqslant h(d)$. Sinon, on aurait $g(x) < h(x)$ dans tout cet intervalle, donc $\limsup\limits_{x\to+\infty} g(x)/h(x) \leqslant 1$ et, par conséquent, en vertu du théorème 10, $\liminf\limits_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) \geqslant 1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (55). Pour ne pas compliquer les notations, admettons que l'on ait déjà

$$(57) \qquad g(c) \geqslant h(c)\,.$$

Cela étant, introduisons une nouvelle fonction $\bar{g}(x)$ définie comme il suit:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \max\big(g(x), h(x)\big) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant c\,, \\ g(x) & \text{si} \quad c \leqslant x\,. \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction continue (en vertu de (57)) pour laquelle on a les inégalités

$$(58) \qquad g(x) \leqslant \bar{g}(x) \quad (0 \leqslant x < +\infty)\,,$$
$$(59) \qquad h(x) \leqslant \bar{g}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant c)\,.$$

De l'inégalité (58) et du théorème 4 on tire immédiatement

$$(60) \qquad \int_0^x \frac{du}{\sqrt{\bar{G}(x)-\bar{G}(u)}} \leqslant \int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(x)-G(u)}} \qquad (0 < x < +\infty)\,,$$

où $\bar{G}'(x) = \bar{g}(x)$. D'autre part, de l'inégalité (59) on tire de la même manière l'inégalité

$$(61) \qquad \int_0^x \frac{du}{\sqrt{\bar{G}(x)-\bar{G}(u)}} \leqslant \int_0^x \frac{du}{\sqrt{H(x)-H(u)}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant c)\,.$$

En rapprochant les inégalités (56), (60) et (61), on voit que la dernière inégalité est satisfaite non seulement dans l'intervalle $(0, c)$, mais aussi dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$. D'après le théorème 1, il en résulte que $H(x) \leqslant \bar{G}(x)$, quel que soit x positif, et, par conséquent,

$$\liminf_{x\to+\infty} \bar{G}(x)/H(x) \geqslant 1 . \tag{62}$$

Mais, pour tout $x \geqslant c$, on a, d'après la définition de la fonction $g(x)$:

$$G(x) = \bar{G}(x) + \big(G(x) - \bar{G}(x)\big) = \bar{G}(x) - \int_0^c \big(\bar{g}(u) - g(u)\big)\, du .$$

Donc, en vertu de la condition (3), $\lim\limits_{x\to+\infty} \bar{G}(x)/G(x) = 1$, et, en raison de l'inégalité (62), on doit avoir aussi $\liminf\limits_{x\to+\infty} G(x)/H(x) \geqslant 1$.

Le théorème 14 se trouve ainsi démontré.

8. Dans le cas particulier où $l = L$, on déduit du théorème 14 le théorème suivant.

THÉORÈME 15. *Si $g(x)$ et $h(x)$ sont deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2), (3), (2'), (3') *et si*

$$\lim_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = l \qquad (0 \leqslant l \leqslant +\infty) ,$$

il existe, pour x tendant vers l'infini, une limite du quotient $G(x)/H(x)$ et elle est égale à l^{-2}.

En supposant que la fonction $h(x)$ est identique à $2x$, on obtient des théorèmes 14 et 15 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 9. *Si $g(x)$ est une fonction définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2), (3) *et si*

$$\liminf_{x\to+\infty} T_g(x) = l \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to+\infty} T_g(x) = L \qquad (0 \leqslant l \leqslant L \leqslant +\infty) ,$$

alors on a les inégalités

$$\pi^2/2L^2 \leqslant \liminf_{x\to+\infty} G(x)/x^2 \leqslant \limsup_{x\to+\infty} G(x)/x^2 \leqslant \pi^2/2l^2 .$$

Si, en particulier

$$\lim_{x\to+\infty} T_g(x) = l \qquad (0 \leqslant l \leqslant +\infty) ,$$

la fonction $G(x)/x^2$ tend vers $\pi^2/2l^2$ lorsque x croît indéfiniment.

Pareillement, il est facile de déduire des théorèmes 14 et 15 les deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 10. *Si $g(x)$ et $h(x)$ sont deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2), (3), (2'), (3') *et si $\limsup\limits_{x\to+\infty} G(x)/H(x) = +\infty$, on a $\liminf\limits_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = 0$.*

De même, si $\liminf\limits_{x\to+\infty} G(x)/H(x) = 0$, alors $\limsup\limits_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = +\infty$.

COROLLAIRE 11. *Si $g(x)$ est une fonction définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2), (3) *et si $\limsup\limits_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = +\infty$, on a $\liminf\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = 0$.*

De même, si $\liminf\limits_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = 0$, alors $\limsup\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = +\infty$.

9. En rapprochant les théorèmes 10 et 15 on en déduit immédiatement le théorème et le corollaire suivants.

THÉORÈME 16. *Soient $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2), (3), (2') *et* (3'). *Si*

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = k_1 , \qquad \liminf_{x\to+\infty} G(x)/H(x) = k_2 ,$$
$$\limsup_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = K_1 , \qquad \limsup_{x\to+\infty} G(x)/H(x) = K_2$$
$$(0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant K_2 \leqslant K_1 \leqslant +\infty) ,$$

alors on a les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{K_1}} \leqslant \liminf_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{K_2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{k_2}} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k_1}} .$$

En particulier, si

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = \liminf_{x\to+\infty} G(x)/H(x) = k \qquad (0 \leqslant k \leqslant +\infty)$$

alors $\limsup\limits_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = 1/\sqrt{k}$. De même, si

$$\limsup_{x\to+\infty} g(x)/h(x) = \limsup_{x\to+\infty} G(x)/H(x) = K \qquad (0 \leqslant K \leqslant +\infty) ,$$

alors $\liminf\limits_{x\to+\infty} T_g(x)/T_h(x) = 1/\sqrt{K}$.

COROLLAIRE 12. *Soit $g(x)$ une fonction définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ satisfaisant aux conditions* (2) *et* (3). *Si*

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/x = k_1 , \qquad \liminf_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = k_2/2 ,$$
$$\limsup_{x\to+\infty} g(x)/x = K_1 , \qquad \limsup_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = K_2/2$$
$$(0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant K_2 \leqslant K_1 \leqslant +\infty) ,$$

alors on a les inégalités

$$\pi/\sqrt{K_1} \leqslant \liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \pi/\sqrt{K_2} \quad \text{et} \quad \pi/\sqrt{k_2} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \pi/\sqrt{k_1} .$$

En particulier, si

$$\liminf_{x\to+\infty} g(x)/x = 2\liminf_{x\to+\infty} G(x)/x^2 = K \qquad (0 \leqslant K \leqslant +\infty)\,,$$

alors $\liminf\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = \pi/\sqrt{K}$.

Remarquons que, grâce à ce dernier corollaire, on peut améliorer l'évaluation de la limite inférieure de la fonction $T_g(x)$, donnée par le théorème 12. En effet, dans les hypothèses de ce théorème, on doit avoir non seulement l'inégalité (40), mais aussi

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{K}} \leqslant \liminf_{x\to+\infty} T_g(x) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2K}}\,.$$

Revenons encore à l'exemple du n° 16. On voit facilement qu'il est possible de choisir les nombres $a_1, a_2, \ldots$ de telle sorte que la limite supérieure du quotient $g(x)/x$ soit égale à 2 et que la limite du quotient $G(x)/x^2$ soit égale à 1. Cela étant, du corollaire 12 il résulte que, pour la fonction $g(x)$ construite dans ce n°, on a $\liminf\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = \pi$, tandis que $\limsup\limits_{x\to+\infty} T_g(x) = +\infty$.

Travaux cités

[1] P. Appell, *Traité de mécanique rationelle*, vol. 1, Paris 1919.

[2] Z. Opial, *O ruchach izo- i tautochronicznych*, Zeszyty Naukowe U. J., Zeszyt 4, (1958), p. 13-15.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
X (1961)

Sur la limitation des dérivées des solutions bornées d'un système d'équations différentielles du second ordre

par Z. Opial (Kraków)

1. On sait que certaines hypothèses sur le second membre de l'équation différentielle du second ordre

$$u'' = f(t, u, u') \tag{1}$$

permettent d'évaluer les dérivées des solutions bornées de cette équation. Par exemple, si la fonction $f(t, u, v)$ est continue dans l'ensemble R: $-\infty < t < +\infty$, $-m \leqslant u \leqslant m$, $-\infty < v < +\infty$ et si elle satisfait dans R à l'inégalité

$$|f(t, u, v)| \leqslant \alpha + \beta w(v) \qquad (\alpha, \beta > 0)\,, \tag{2}$$

où $w(v)$ est une fonction positive continue pour $v > 0$ et telle que

$$\int_1^\infty \frac{v\,dv}{w(v)} = +\infty\,, \tag{3}$$

la dérivée $u'(t)$ de toute solution $u(t)$ de l'équation (1), pour laquelle

$$|u(t)| \leqslant m \qquad (-\infty < t < +\infty)\,,$$

est bornée, elle aussi, dans le même intervalle $(-\infty, +\infty)$ (cf. M. Nagumo [3]). Il en est de même dans tout intervalle fini, pourvu que sa longueur soit suffisamment grande.

D'autres conditions suffisantes et nécessaires pour que les solutions de l'équation (1) jouissent de cette propriété ont été trouvées par T. Yoshizawa [5].

Il est facile de construire un exemple d'équation différentielle (1) qui admette des solutions bornées, mais dont les dérivées premières ne soient pas bornées. En effet, il en est ainsi de l'équation

$$u'' = (1+u'^2)^{3/2}\,. \tag{4}$$

Pour le constater, il suffit de remarquer que ce sont les demi-circonférences de rayon 1 qui constituent la famille de solutions de l'équation (4), puisque l'égalité (4) signifie que la courbure $u''/(1+u'^2)^{3/2}$ des courbes cherchées est constante et égale à 1.