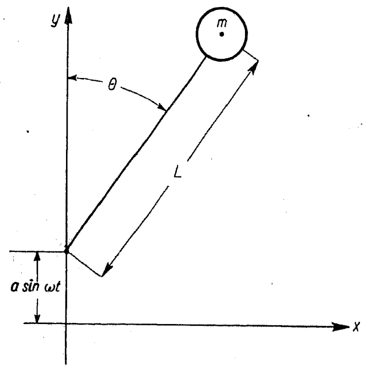
Sur un effet asymptotique dans les équations différentielles dont les seconds membres contiennent des termes périodiques de pulsation et d'amplitude tendant à l'infini

par S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

M. P. L. Kapica a étudié un pendule simple dont le centre de suspension est animé d'un mouvement vibratoire simple[1]). Soient L et m la longueur et la masse du pendule et soit $C(0,y)$ le centre de suspension, où $y=a\sin\omega t$. M. Kapica a montré que, si 1° la période des vibrations $\tau=2\pi/\omega$ est petite par rapport à la durée de l'oscillation du pendule, 2° l'amplitude a est petite par rapport à L, 3° $a^2\omega^2>2gL$, alors la position verticale du pendule ($\theta=0$, cf. figure) est stable.

L'équation différentielle du mouvement est de la forme

$$\Theta^{\cdot\cdot}=(gL^{-1}-aL^{-1}\omega^2\sin\omega t)\sin\Theta. \tag{1}$$



L'amplitude des vibrations de Θ étant petite, on remplace l'angle Θ par une valeur moyenne φ; d'après M. Kapica, en conséquence des vibrations du centre de suspension, le mouvement approché est comme si, outre au moment de la force de pesanteur $M_\varphi=mgL\sin\varphi$, le pendule était soumis à un „moment vibratoire"

$$\overline{M}=-\frac{1}{4}ma^2\omega^2\sin 2\varphi.$$

On peut en déduire que, si la condition 3° est satisfaite, la position $\Theta=0$ est stable. On voit donc que l'expression $-aL^{-1}\omega^2\sin\omega t\sin\Theta$ dans (1), qui est périodique et dans laquelle la pulsation et l'amplitude sont grandes, peut être

[1]) Cf. [2] ou [3].

remplacée approximativement par $-L^{-2}a^2\omega^2\sin 2\varphi/4$, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$\varphi^{\cdot\cdot}=gL^{-1}\sin\varphi-\frac{1}{4}L^{-2}a^2\omega^2\sin 2\varphi \tag{2}$$

sont des solutions approchées de (1).

Dans la note présente, nous montrerons que les solutions de (1) tendent vers celles de (2) lorsque $\omega\to\infty$ de manière que $a^2\omega^2=\text{const}$. Nous démontrerons des théorèmes plus généraux de même nature et concernant des systèmes d'équations différentielles ordinaires du second ordre dont les seconds membres contiennent un terme périodique en t (théorème I dans le § 1 en cas de forces ordinaires et théorème II dans le § 3 en cas de forces instantanées). En interprètant ce terme périodique comme un champ de forces, ces résultats expriment que le point matériel (ou le système de points matériels) qui est soumis à l'action de ce champ est poussé en général vers les amplitudes décroissantes des vibrations (cf. § 2).

M. K. Tatarkiewicz a remarqué que l'expérience bien connu avec le tube de Kundt en est une illustration. A savoir, dans le tube de Kundt la poudre de lycopode se rassemble aux noeuds où les vibrations sont les plus petites.

Pour mettre en évidence le problème considérons un exemple de mouvement rectilligne. Supposons qu'un point matériel de masse 1 ait subi aux moments $t=0,\tau/2,\tau,3\tau/2,\ldots$ une percussion I dont la valeur absolue dépend linéairement de la position x de ce point et est alternativement positive et négative. La percussion est donc donnée à l'instant $t=n\tau/2$ par

$$I=(-1)^nI(x)=(-1)^n(kx+l). \tag{3}$$

Soient $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots$ les positions succesives du point matériel aux moments de la percussion $t=0,\tau/2,\tau,3\tau/2,\ldots$ Dans chaque intérvalle de temps $\big((n-1)\tau/2,n\tau/2\big)$ et $\big(n\tau/2,(n+1)\tau/2\big)$ le mouvement est uniforme; la variation de la vitesse à l'instant $t=n\tau/2$ est égale à $(-1)^nI(x_n)$. En posant

$$\delta_n=x_{n+1}-x_n,\qquad \Delta_n=x_{2n+2}-x_{2n}, \tag{4}$$

on a successivement (cf. (3) et (4))

$$\delta_n-\delta_{n-1}=(-1)^nI(x_n)\frac{\tau}{2},$$

$$\delta_n-\delta_{n-2}=(-1)^n[I(x_n)-I(x_{n-1})]\frac{\tau}{2}=(-1)^nk\delta_{n-1}\frac{\tau}{2},$$

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \delta_{2n} + \delta_{2n+1} - \delta_{2n-2} - \delta_{2n-1} = (-1)^{2n} k \delta_{2n-1} \frac{\tau}{2} + (-1)^{2n+1} k \delta_{2n} \frac{\tau}{2}$$

$$= -(\delta_{2n} - \delta_{2n-1}) k \frac{\tau}{2} = -k I(x_{2n}) \frac{\tau^2}{4}$$

d'où

$$\text{(5)} \qquad \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\tau^2} = -\frac{1}{4} k I(x_{2n}).$$

Le premier membre de (5) étant l'accélération moyenne, on peut s'attendre à ce que le mouvement approché soit donné par l'équation différentielle

$$\text{(6)} \qquad x^{\cdot\cdot} = -\frac{1}{4} k I(x).$$

Si $I(x)$ est une fonction quelconque on peut la traiter approximativement au voisinage de x_0 comme une fonction linéaire

$$I(x_0) + I'(x_0)(x - x_0),$$

et le mouvement approché sera donné par

$$\text{(7)} \qquad x^{\cdot\cdot} = -\frac{1}{4} I'(x) I(x),$$

c'est-à-dire le point sera poussé dans la direction où les percussions sont plus petites.

On peut s'attendre à ce que la force $F = b(x)p(t)$, où $p(t)$ est une fonction périodique, de pulsation $1/\tau$ et d'amplitude très grandes, pour laquelle la valeur moyenne $\int_0^\tau p(t)\,dt$ est nulle, puisse être remplacée (approximativement) par une force indépendante du temps

$$F = -\mu^2 b(x) b'(x),$$

où la constante positive μ^2 ne dépend que de la fonction périodique $p(t)$.

Lorsqu'en particulier $b(x) = x$, on a l'équation de Hill

$$x^{\cdot\cdot} = p(t) x.$$

Si l'exposant caractéristique α [2]) est différent de 0 et πi, la solution générale (complexe) est donné par $x = a\varphi(t)e^{\alpha t} + b\varphi(t)e^{-\alpha t}$, où φ, ψ sont des fonctions périodiques de période τ et a, b sont des constantes arbitraires.

[2]) α est donné par: $\cosh \alpha\tau = \dfrac{x_1(\tau) + \dot{x}_2(\tau)}{2}$, $\mathcal{R}\alpha\tau \geqslant 0$, $0 \leqslant \mathcal{I}\alpha\tau < 2\pi$, où x_1, x_2 sont des solutions pour lesquelles $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 1$; cf. E. Kamke [5], p. 87-88, Whittaker and Watson [7], p. 412-413.

Si les oscillations de φ et ψ sont petites par rapport à leurs valeurs, on peut les traiter approximativement comme des constantes et les solutions approchées seront données par $x = a_1 e^{\alpha t} + b_1 e^{-\alpha t}$ c'est-à-dire par les solutions de l'équation

$$\text{(8)} \qquad x^{\cdot\cdot} = \alpha^2 x.$$

En cas de l'expression périodique dans l'équation (1) du pendule de M. Kapica on a $b(\Theta) = L^{-1} \sin\Theta$, $p(t) = -a\omega^2 \sin \omega t$ et on voit que dans l'équation (2) cette expression est remplacée par

$$-\frac{1}{4} L^{-2} a^2 \omega^2 \sin 2\varphi = -\frac{1}{2} a^2 \omega^2 b(\varphi) b'(\varphi),$$

donc il doit être $\mu^2 = a^2\omega^2/2$.

En effet, dans les exemples ci-dessus la différence entre une solution quelconque et sa solution approchée tend vers zéro lorsque $\tau \to 0$ de manière que $\int_0^\tau p(t)\,dt$ reste borné. Ceci sera une conséquence des théorèmes I et II (cf. § 2).

§ 1. Lemme I. *Soient $F_i^{(\tau)}(t, x_j, \dot{x}_k)$, $(i,j,k = 1,2,\ldots,n; 0 < \tau < \tau_0)$ des fonctions de la classe C^1 (c'est-à-dire continues avec leurs dérivées partielles du premier ordre) telles que*

$$|F_i^{(\tau)}|, \left|\frac{\partial F_i^{(\tau)}}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial F_i^{(\tau)}}{\partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial F_i^{(\tau)}}{\partial \dot{x}_k}\right| \leqslant M_0$$

pour $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a_j < x_j < b_j$ et $\dot{x}_k$ quelconques. Supposons que les fonctions de la classe C^1, $x_i^{(\tau)}(t)$, $(i = 1,2,\ldots,n;\ 0 < \tau < \tau_0)$ satisfassent aux inégalités

$$\text{(9)} \qquad \left|\frac{\Delta^2 x_i^{(\tau)}(t)}{\tau^2} - F_i\left(t, x_j^{(\tau)}, \frac{\Delta x_k^{(\tau)}(t)}{\tau}\right)\right| < \varepsilon(\tau)\text{ [3])} \quad \textit{lorsque} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta - 2\tau,$$

$$\text{(10)} \qquad |\dot{x}_i^{(\tau)}(t)| \leqslant L \quad \textit{lorsque} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

où $\lim\limits_{\tau \to 0} \varepsilon(\tau) = 0$ et $\varepsilon(\tau) \leqslant 1$. Soit $\bar{x}_1^{(\tau)}(t), \ldots, \bar{x}_n^{(\tau)}(t)$ une solution du système

$$\text{(11)} \qquad \ddot{x}_i = F_i^{(\tau)}(t, x_j, \dot{x}_k),$$

définie dans $[\alpha, \beta]$, et telle que dans cet intervalle

$$\text{(12)} \qquad a_i < a_{i0} \leqslant \bar{x}_i^{(\tau)} \leqslant b_{i0} < b_i \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ 0 < \tau < \tau_0).$$

[3]) $\Delta x(t) = x(t+\tau) - x(t)$, $\Delta^2 x(t) = x(t+2\tau) - 2x(t+\tau) + x(t)$.

Cela posé, on a

1^0

$$\left| \frac{x_i^{(\tau)}(\tau_2) - x_i^{(\tau)}(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{x_i^{(\tau)}(t_0+\tau) - x_i^{(\tau)}(t_0)}{\tau} \right|$$

$$\leqslant 4L\frac{\tau}{|t_1-t_2|} + (M_0+1)(|t_0-t_1|+|t_2-t_1|+\tau)$$

pour $t_1, t_2, t_0, t_0+\tau \in [\alpha, \beta]$ *et* $|t_2-t_1| > 2\tau$.

2^0 *Si*

$$\text{(A)} \qquad x_i^{(\tau)}(t_0) = x_{i0} = \bar{x}_i^{(\tau)}(t_0), \qquad \frac{x_i^{(\tau)}(t_0+\tau) - x_i^{(\tau)}(t_0)}{\tau} = u_{i0} = \bar{x}_i^{\cdot(\tau)}(t_0),$$

où $a_{i0} \leqslant x_{i0} \leqslant b_{i0}$, $|u_{i0}| \leqslant L$ *et* $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$, *alors*

$$|x_i^{(\tau)} - \bar{x}_i^{(\tau)}| \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} 0 \;{}^{4)} \qquad \textit{et} \qquad \left| \frac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau} - \bar{x}_i^{\cdot(\tau)} \right| \rightrightarrows 0$$

pour $t = t_0 + \tau\nu \in [\alpha, \beta-\tau]$, $(\nu = 0, \mp 1, \ldots)$[5]) *lorsque* $\tau \to 0$. *Les* x_{i0} *et* u_{i0} *peuvent dépendre de* τ.

3^0 *Si*

$$\text{(B)} \qquad \begin{matrix} x_i^{(\tau)}(t_0),\ \bar{x}_i^{(\tau)}(t_0) \to x_{i0}; & \dfrac{x_i^{(\tau)}(t_2) - x_i^{(\tau)}(t_1)}{t_2-t_1},\ \bar{x}_i^{\cdot(\tau)}(t_0) \to u_{i0}; \\ t_1, t_2 \to t_0; & \dfrac{\tau}{t_2-t_1} \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad \tau \to 0, \end{matrix}$$

où $a_{i0} \leqslant x_{i0} \leqslant b_{i0}$, $|u_{i0}| \leqslant L$ *et* $a \leqslant t_0 \leqslant \beta$, *alors*

$$|x_i^{(\tau)} - \bar{x}_i^{(\tau)}| \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} 0 \qquad \textit{et} \qquad \left| \frac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau} - \bar{x}_i^{\cdot(\tau)} \right| \rightrightarrows 0$$

pour $t = t_0 + \tau\nu \in [\alpha, \beta-\tau]$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$, *lorsque* $\tau \to 0$.

---

[4]) „$\rightrightarrows$" désigne la convergence uniforme (par rapport à t).

[5]) C'est-à-dire $\left| \dfrac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau} - x_i^{\cdot(\tau)} \right| < \varepsilon$ pour $t = t_0 + \tau\nu \in [\alpha, \beta - \tau]$ lorsque τ est suffisamment petit.

Démonstration. Considérons la suite $t_\nu = t_0 + \tau\nu \in [\alpha, \beta - \tau]$, $(\nu = 0, \mp 1, \ldots)$.

ad 1^0. Nous allons omettre les indices i et τ. On a

$$\Delta x(t_0+k\tau) = \Delta x(t_0) + \sum_{\mu=0}^{k-1} \Delta^2 x(t_0+\mu\tau) \quad \text{lorsque} \quad k > 0,$$

$$\Delta x(t_0) = \Delta x(t_0+k\tau) + \sum_{\mu=k}^{-1} \Delta^2 x(t_0+\mu\tau) \quad \text{lorsque} \quad k < 0;$$

il en résulte, d'après (9),

$$\left| \frac{\Delta x(t_0+k\tau)}{\tau} - \frac{\Delta x(t_0)}{\tau} \right| \leqslant (M_0+1)|k|\tau. \tag{13}$$

Puisque

$$\frac{x(t_0+p\tau) - x(t_0+k\tau)}{(p-k)\tau} = \frac{\sum\limits_{\nu=k}^{p-1} \Delta x(t_0+\nu\tau)}{(p-k)\tau}$$

$$= \frac{\Delta x(t_0+k\tau) + \sum\limits_{\nu=k+1}^{p-1} \left[\Delta x(t_0+k\tau) + \sum\limits_{\mu=k}^{\nu-1} \Delta^2 x(t_0+\mu\tau) \right]}{(p-k)\tau}$$

$$= \frac{\Delta x(t_0+k\tau)}{\tau} + \frac{\sum\limits_{\nu=k+1}^{p-1} \sum\limits_{\mu=k}^{\nu-1} \dfrac{\Delta^2 x(t_0+\mu\tau)}{\tau^2}}{p-k}\tau,$$

on a

$$\left| \frac{x(t_0+p\tau) - x(t_0+k\tau)}{(p-k)\tau} - \frac{\Delta x(t_0+k\tau)}{\tau} \right| \leqslant (M_0+1)(p-k)\tau \quad (k < p). \tag{14}$$

Supposons que $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, $t_2 - t_1 > 2\tau$. Il existe des entiers k, p tels que $t_1 \leqslant t_0 + k\tau < t_1 + \tau < t_2 - \tau \leqslant t_0 + p\tau < t_2$. On a donc

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_0+p\tau)}{t_2 - t_1} + \frac{x(t_0+p\tau) - x(t_0+k\tau)}{(p-k)\tau} \cdot \frac{(p-k)\tau}{t_2 - t_1}$$

$$+ \frac{x(t_0+k\tau) - x(t_1)}{t_2 - t_1},$$

d'où, d'après (10), on conclut que

$$\left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{x(t_0+p\tau) - x(t_0+k\tau)}{(p-k)\tau} \right| \leqslant 4L\frac{\tau}{t_2 - t_1}. \tag{15}$$

On déduit des relations (13), (14), (15) que l'inégalité 1^0 subsiste.

ad 2°. Nous définissons les fonctions $\varphi_i(t), \psi_i(t)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ de sorte qu'elles soient continues, linéaires dans chacun des intervalles $[t_\nu, t_{\nu+1}]$, $(t_{\nu+1}<\beta-\tau)$ et qu'on ait

$$(16)\qquad \varphi_i=x_i^{(\tau)}, \qquad \psi_i=\frac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau} \qquad \text{pour} \quad t=t_\nu=t_0+\tau\nu\in[\alpha,\beta-\tau), \quad \nu=0,\mp 1,\ldots;$$

elles sont donc définies dans un intervalle qui est contenu dans $[\alpha,\beta]$ et qui contient $[\alpha+\tau,\beta-2\tau]$. Selon (9) et (10), on a

$$(17)\qquad |\varphi_i(t)-\varphi_i(t_\nu)|\leqslant L\tau, \qquad |\psi_i(t)-\psi_i(t_\nu)|\leqslant(M_0+1)\tau \qquad \text{lorsque} \quad |t-t_\nu|\leqslant\tau,$$

$$(18)\qquad |\varphi_i-x_i^{(\tau)}|\leqslant 2L\tau.$$

On a

$$(\varphi_i)'_+=\frac{\Delta x_i^{(\tau)}(t_\nu)}{\tau}, \qquad (\psi_i)'_+=\frac{\Delta^2 x_i^{(\tau)}(t_\nu)}{\tau^2}, \qquad |t_\nu-t|\leqslant\tau,$$

où ν dépend de t de façon que $t_\nu\leqslant t<t_{\nu+1}$, donc, en vertu de (9), (10), (16), (17) et (18), les fonctions φ_i, ψ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ satisfont aux inégalités différentielles

$$|(\varphi_i)'_+-\psi_i|=|\psi_i(t_\nu)-\psi_i(t)|\leqslant\left|\frac{\Delta^2 x_i^{(\tau)}}{\tau}\right|\leqslant(M_0+1)\tau,$$

$$|(\psi_i)'_+-F_i^{(\tau)}(t,\varphi_j,\psi_k)|\leqslant\left|\frac{\Delta^2 x_i^{(\tau)}(t_\nu)}{\tau^2}-F_i^{(\tau)}\left(t_\nu; x_j^{(\tau)}(t_\nu), \frac{\Delta x_k^{(\tau)}(t_\nu)}{\tau}\right)\right|$$
$$+\left|F_i^{(\tau)}\big(t_\nu,\varphi_j(t_\nu),\psi_k(t_\nu)\big)-F_i^{(\tau)}\big(t,\varphi_j(t),\psi_k(t)\big)\right|\leqslant\varepsilon(\tau)+M_0\big(\tau+nL\tau+n(M_0+1)\tau\big).$$

Puisque $x_i=\bar{x}_i^{(\tau)}(t)$, $y_i=\bar{x}_i^{\cdot(\tau)}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ est une solution du système $\dot{x}_i=y_i$, $\dot{y}_i=F_i^{(\tau)}(t,x_j,y_k)$ pour laquelle (cf. (A) et (16)) $x_i(t_0)=x_{i0}=\varphi_i(t_0)$, $y_i(t_0)=u_{i0}=\psi_i(t_0)$, on a (cf. E. Kamke [4], p. 152)

$$(19)\qquad |\varphi_i-\bar{x}_i^{(\tau)}|, |\psi_i-\bar{x}_i^{\cdot(\tau)}|\leqslant\frac{\varepsilon(\tau)+M_0(nL+nM_0+n+1)\tau}{M_0+1}\left(e^{2n(M_0+1)}-1\right).$$

Il s'ensuit d'après (16), (18), (19), que

$$\left|\frac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau}-\bar{x}_i^{\cdot(\tau)}\right|\rightrightarrows 0 \quad \text{pour} \quad t=t_\nu \quad \text{et} \quad |x_i^{(\tau)}-\bar{x}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{lorsque} \quad \tau\to 0$$

(puisqu'en dehors de l'intervalle dans lequel les inégalités (18), (19) subsistent, les oscillations de $x_i^{(\tau)}$ et $\bar{x}_i^{(\tau)}$ tendent vers zéro, les dérivées restant bornées pour $\tau\to 0$).

Le fait que les x_{i0} et u_{i0} ne dépendent pas de τ n'intervenait pas dans ce raisonnement.

ad 3°. Soit $\bar{\bar{x}}_i^{(\tau)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ une solution du système (11) pour laquelle

$$\bar{\bar{x}}_i^{(\tau)}(t_0)=x_i^{(\tau)}(t_0) \qquad \text{et} \qquad \bar{\bar{x}}_i^{\cdot(\tau)}(t_0)=\frac{x_i^{(\tau)}(t_0+\tau)-x_i^{(\tau)}(t_0)}{\tau}.$$

D'après 2°, on a

$$|x_i^{(\tau)}-\bar{\bar{x}}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} 0, \qquad \left|\frac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau}-\bar{\bar{x}}_i^{\cdot(\tau)}\right|\rightrightarrows 0 \quad \text{pour} \quad t=t_0+\tau\nu \quad \text{lorsque} \quad \tau\to 0.$$

Selon 1° et la continuité des solutions par rapport aux valeurs initiales[6]), on a

$$|\bar{\bar{x}}_i^{(\tau)}-\bar{x}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} 0, \qquad |\bar{\bar{x}}_i^{\cdot(\tau)}-\bar{x}_i^{\cdot(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{lorsque} \quad \tau\to 0,$$

d'où résulte 3°.

Remarquons qu'il suffit dans le lemme I que l'inégalité (9) soit vérifiée pour $t=t_0+\tau\nu$ $(\nu=0,\mp 1,\ldots)$ et que la condition (10) puisse être remplacée par celle de Lipschitz: $|x_i^{(\tau)}(t')-x_i^{(\tau)}(t)|\leqslant L|t'-t|$.

Revenons à l'exemple du mouvement d'un point percuté. On peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$\frac{\Delta^2 x}{\tau^2}=-\frac{1}{4}kI(x+\Delta x) \qquad \text{pour} \quad t=\tau\nu, \ \nu=0,1,2,\ldots$$

Supposons que $x(0)=x_0$ et $\Delta x(0)/\tau=u_0$. On pourra appliquer le lemme I lorsqu'on aura prouvé (10) (condition de Lipschitz). Désignons par v_- et v_+ la vitesse dans l'intervalle de temps $[n\tau, n\tau+\tau/2]$, ou $[n\tau+\tau/2,(n+1)\tau]$. On a

$$v_\pm=\frac{\Delta x(n\tau)}{\tau}\pm\frac{1}{2}I(x_{2n+1})=\frac{\Delta x(0)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta^2 x(\nu\tau)}{\tau}\pm\frac{1}{2}I(x_{2n+1})$$
$$=u_0-\frac{1}{4}k\tau\sum_{\nu=0}^{n-1}I(x_{2\nu+2})\pm I(x_{2\nu+1}),$$

d'ou il résulte que, dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant T\leqslant 1$, on a

$$|v|\leqslant|u_0|+\frac{1}{4}|k|\big(|k|\max_{[0,T]}|x|+|l|\big)+|k|\max_{[0,T]}|x|+|l|=a\max_{[0,T]}|x|+b.$$

On en conclut que

$$\sup_{[0,T]}|v|\leqslant a\big(|x_0|+T\sup_{[0,T]}|v|\big)+b \qquad \text{ou} \qquad \sup_{[0,1]}|v|\leqslant L=\frac{a|x_0|+b}{1-aT},$$

pourvu que $aT<1$. On a donc

$$|v|\leqslant L \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\Delta^2 x}{\tau^2}+\frac{1}{4}kI(x)\right|\leqslant\frac{1}{4}k^2|\Delta x|\leqslant\frac{1}{4}k^2L\tau$$

dans $[0,T]$, et, par conséquent, d'après le lemme I, la solution considérée x tend vers la solution de l'équation (6) satisfaisant aux conditions initiales $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=u_0$ lorsque $\tau\to 0$.

[6]) Dans notre cas cette continuité est uniforme par rapport à τ, cf. E. Kamke [4], p. 152.

LEMME II. *Si*

$$\left|\frac{\Delta x_i}{\tau}\right| \leqslant A(|x_1|+\ldots+|x_n|)+B \quad \textit{pour} \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta-\tau,$$

$$|x_i(t')-x_i(t)|\leqslant C \quad \textit{pour} \quad |t'-t|\leqslant\tau \quad \textit{et} \quad |x_i(t_i)|\leqslant D \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

où $A,B>0$ et $|t_i-t_j|+2\tau\leqslant\frac{1}{4nA}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$, *alors*

$$|x_i|\leqslant 2n\left(D+C+\frac{B}{nA}\right)e^{2nA(\beta-\alpha)}-\frac{B}{nA}+C \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Démonstration. On a

$$\left|\frac{x_i(t+\tau)-x_i(t)}{\tau}\right|\leqslant A\left[\left(x_1+\frac{B}{nA}\right)+\ldots+\left((x_n+\frac{B}{nA}\right)\right],$$

d'où, en posant $\xi_i^{(\nu)}=|x_i(\nu\tau)|+B/nA>0$ pour $\alpha<\nu\tau<\beta$ et $s^{(\nu)}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(\nu)}>0$,

$$|\xi_i^{(\nu+1)}-\xi_i^{(\nu)}|\leqslant As^{(\nu)}\tau. \tag{20}$$

Il existe des entiers ϱ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tels que $|t_i-\varrho_i\tau|\leqslant\tau$, $\tau\varrho_i\in[\alpha,\beta]$, donc

$$\xi_i^{(\varrho_i)}\leqslant E=D+C+\frac{B}{nA} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{21}$$

et

$$\tau|\varrho_i-\varrho_j|\leqslant|t_i-t_j|+2\tau\leqslant\frac{1}{4nA} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n). \tag{22}$$

Il résulte de la relation (20) que $|s^{(\nu+1)}-s^{(\nu)}|\leqslant nAs^{(\nu)}\tau$, d'où il vient successivement (en vertu de l'inégalité $nA\tau\leqslant 1/8<1/2$)

$$1-nA\tau\leqslant\frac{s^{(\nu+1)}}{s^{(\nu)}}\leqslant 1+nA\tau, \qquad \frac{s^{(\nu)}}{s^{(\nu+1)}}\leqslant\frac{1}{1-nA\tau}\leqslant 1+2nA\tau,$$

$$\frac{s^{(l)}}{s^{(k)}}(1+2nA\tau)^{|l-k|}=\left(1+\frac{2nA|l-k|\tau}{|l-k|}\right)^{|l-k|},$$

et, par suite,

$$\frac{s^{(l)}}{s^{(k)}}\leqslant e^{2nA|l-k|\tau}. \tag{23}$$

D'après (20) et (23), on a

$$|\xi_i^{(p)}-\xi_i^{(k)}|\leqslant A|p-k|\tau e^{2nA|p-k|\tau}s^{(k)},$$

donc, selon (22),

$$|\xi_i^{(\varrho\nu)}-\xi_i^{(\varrho_i)}|\leqslant\frac{1}{4n}e^{1/2}s^{(\varrho_i)}<\frac{1}{2n}s^{\varrho_i}.$$

En posant $\xi_i=\max_{\nu}\xi_i^{(\varrho\nu)}=\xi_i^{(\varrho\nu_i)}$, $s=\sum_{\mu=1}^{n}\xi_\mu\geqslant\sum_{\mu=1}^{n}\xi_\mu^{(\varrho_i)}=s^{(\varrho_i)}$, on a (cf. (21))

$$\xi_i=\xi_i^{(\varrho\nu_i)}\leqslant\xi_i^{(\varrho_i)}+|\xi_i^{(\varrho\nu_i)}-\xi_i^{(\varrho_i)}|\leqslant E+\frac{1}{2n}s,$$

d'où $s\leqslant nE+s/2$, $s\leqslant 2nE$, $s^{(\varrho_1)}\leqslant 2nE$. D'après (23), on conclut que

$$\xi_i^{(l)}\leqslant s^{(l)}\leqslant e^{2nA|l-\varrho_1|\tau}s^{(\varrho_1)}\leqslant 2nEe^{2nA(\beta-\alpha)},$$

et, puisque

$$\left||x_i(t)|-\left(\xi_i^{(l)}-\frac{B}{nA}\right)\right|\leqslant|x_i(t)-x_i(l\tau)|\leqslant C$$

pour un l convenable, on obtient $|x_i(t)|\leqslant 2nEe^{2nA(\beta-\alpha)}-B/nA+C$, c. q. f. d.

LEMME III. *Supposons que* $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ *dans* $[\alpha,\beta]$ *soit une solution du système*

$$\ddot{x}_i=f_i(t,x_j,\dot{x}_k)+\varphi_i(t,t,x_j) \qquad (i,j,k=1,2,\ldots,n),$$

où les fonctions $f_i(t,x_j,\dot{x}_k)$, $\varphi_i(u,s,x_j)$, $\partial\varphi_i/\partial x_j$, $\partial\varphi_i/\partial u$ *sont continues*, $\varphi_i(t,s+\tau,x_j)=\varphi_i(t,s,x_j)$ *et* $\int_0^{\tau}\varphi_i(t,s,x_j)\,ds=0$.

Ceci étant admis, on a

$$\int_t^{t+\tau}\varphi_i\big(s,s,x_j(s)\big)\,ds \tag{24}$$

$$=-\int_t^{t+\tau}\int_t^{u}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\big(u,s,x_j(u)\big)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)\dot{x}_\nu(u)\right]ds\,du.$$

Si $|f_i|\leqslant\overline{M}$, $|\varphi_i|,|\partial\varphi_i/\partial x_j|,|\partial\varphi_i/\partial u|\leqslant M(s)$, $\int_0^{\tau}M(s)\,ds<M$,

$\overline{M}\tau<1$, $|t_2-t_1|+2\tau<1/4nM$ *et* $\left|\frac{x_i(t_2)-x_i(t_1)}{t_2-t_1}\right|\leqslant u_0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *alors*

$$|\dot{x}_i|\leqslant L=2n\left(u_0+\frac{\overline{M}}{nM}+2M+3\right)e^{2nM(\beta-\alpha)} \quad \textit{dans} \quad [\alpha,\beta]. \tag{25}$$

Démonstration. D'après les hypothèses, on a

$$\int_t^{t+\tau}\varphi_i\big(s,s,x_j(s)\big)\,ds=-\int_t^{t+\tau}\left[\varphi_i\big(t+\tau,s,x_j(t+\tau)\big)-\varphi_i\big(s,s,x_j(s)\big)\right]ds$$

$$=-\int_t^{t+\tau}\int_s^{t+\tau}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\big(u,s,x_j(u)\big)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)\dot{x}_\nu(u)\right]du\,ds$$

$$=-\int_t^{t+\tau}\int_0^{u}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\big(u,s,x_j(u)\big)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)\dot{x}_\nu(u)\right]ds\,du.$$

Posons $v_i(t)=\dot{x}_i(t)$; on a donc

$$v_i(t+\tau)-v_i(t)=\int_t^{t+\tau} f_i\big(s,x_i(s),v_k(s)\big)\,ds$$

$$-\int_t^{t+\tau}\int_0^u\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\big(u,s,x_j(u)\big)+\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)\,v_\nu(u)\right]ds\,du.$$

En vertu de l'inégalité

$$|v_i(t')-v_i(t)|\leqslant\overline{M}\tau+\Big|\int_t^{t'}\varphi_i\big(s,s,x_j(s)\big)\,ds\Big|\leqslant M+1\quad\text{pour}\quad|t'-t|\leqslant\tau,$$

on obtient

$$|v_i(t+\tau)-v_i(t)|\leqslant\overline{M}\tau+\tau\big[M+\sum_{\nu=1}^n M(M+1+|v_\nu(t)|)\big]$$

$$=[M(|v_1(t)|+\ldots+|v_n(t)|)+\overline{M}+M(nM+n+1)]\tau.$$

On a de plus

$$|v_i(\tilde{t}_i)|=\left|\frac{x_i(t_2)-x_i(t_1)}{t_2-t_1}\right|\leqslant u_0,$$

où $|\tilde{t}_i-\tilde{t}_j|+2\tau\leqslant|t_2-t_1|+2\tau<1/4nM$. On peut donc appliquer le lemme II ($x_i=v_i$, $A=M$, $B=\overline{M}+M(nM+n+1)$, $C=M+1$, $D=u_0$), d'où résulte l'inégalité (25).

THÉORÈME I. *Considérons le système*

$$(\mathrm{I}_\tau)\qquad \ddot{x}_i=f_i^{(\tau)}(t,x_j,\dot{x}_k)+\varphi_i^{(\tau)}(t,t,x_j)\qquad(i,j,k=1,2,\ldots,n;\ 0<\tau<\tau_0),$$

où $\varphi_i^{(\tau)}(u,s,x_j)$ est une fonction périodique par rapport à s, de la valeur moyenne zéro:

$$(26)\qquad \varphi_i(u,s+\tau,x_j)=\varphi_i(u,s,x_j),\qquad\int_0^\tau\varphi_i(u,s,x_j)\,ds=0\quad(i=1,2,\ldots,n),$$

et le système

$$(\mathrm{II}_\tau)\qquad \ddot{x}_i=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left[f_i^{(\tau)}(t,x_j,\dot{x}_k+\Phi_k^{(\tau)}(t,s,x_j))-\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial\Phi_i^{(\tau)}}{\partial x_\nu}(t,s,x_j)\,\Phi_\nu^{(\tau)}(t,s,x_j)\right]ds,$$

où

$$\Phi_i^{(\tau)}(t,s,x_j)=\int_0^s\varphi_i^{(\tau)}(t,\sigma,x_j)\,d\sigma-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_0^u\varphi_i^{(\tau)}(t,\sigma,x_j)\,d\sigma\,du.$$

Supposons que, pour $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$, $-\infty<s<\infty$, $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $-\infty<\dot{x}_i<\infty$ $(i=1,2,\ldots,n)$, les fonctions $f_i^{(\tau)}(t,x_j,\dot{x}_k)$ soient de la classe C^1, $|f_i^{(\tau)}|,|\partial f_i^{(\tau)}/\partial t|,|\partial f_i^{(\tau)}/\partial x_j|,|\partial f_i^{(\tau)}/\partial\dot{x}_k|\leqslant M(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$, où $M(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$ est une fonction continue, $\varphi_i^{(\tau)}(u,s,x_j)$, $\partial\varphi_i^{(\tau)}/\partial u$, $\partial\varphi_i^{(\tau)}/\partial x_j$, $\partial_2\varphi_i^{(\tau)}/\partial u\,\partial x_j$, $\partial^2\varphi_i^{(\tau)}/\partial x_j\partial x_k$ sont continues et leurs valeurs absolues sont $\leqslant M_\tau(s)$, où $\int_0^\tau M_\tau(s)\,ds\leqslant M$.

Si $\overline{x}_i^{(\tau)}$, dans $[\alpha,\beta]$, est une solution du système (II_τ) pour laquelle $a_i<a_{i0}<\overline{x}_i^{(\tau)}(t)<b_{i0}<b_i$, $|\dot{\overline{x}}_i^{(\tau)}|\leqslant K$ et $\overline{x}_i^{(\tau)}(t_0)=x_{i0}$, $\dot{\overline{x}}_i^{(\tau)}(t_0)=u_{i0}$ ou $\overline{x}_i^{(\tau)}(t_0)\to x_{i0}$, $\dot{\overline{x}}_i^{(\tau)}(t_0)\to u_{i0}$ lorsque $\tau\to0$, alors, pour τ suffisamment petit, il existe une solution du système (I_τ), $x_i^{(\tau)}$ dans $[\alpha,\beta]$, satisfaisant aux conditions (A) *ou* (B) *du lemme* I (p. 392) *et*

$$|x_i^{(\tau)}-\overline{x}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}0.$$

Démonstration. Considérons les restrictions $\tilde{f}_i^{(\tau)}$ des fonctions $f_i^{(\tau)}$ à l'ensemble $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $|\dot{x}_k|\leqslant K+2M+1$; on a

$$|\tilde{f}_i^{(\tau)}|,\ \left|\frac{\partial\tilde{f}_i^{(\tau)}}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial\tilde{f}_i^{(\tau)}}{\partial x_j}\right|,\ \left|\frac{\partial\tilde{f}_i^{(\tau)}}{\partial\dot{x}_k}\right|\leqslant M_0=\max_{|\dot{x}_k|\leqslant K+2M+1}M(\dot{x}_k).$$

On peut prolonger les fonctions $\tilde{f}_i^{(\tau)}$ et $\varphi_i^{(\tau)}$ à l'ensemble de $t,x_j,\dot{x}_k$ quelconques de sorte que les prolongements $\bar{f}_i^{(\tau)}$ et $\bar{\varphi}_i^{(\tau)}$ satisfassent aux conditions supposées pour $f_i^{(\tau)}$ et $\varphi_i^{(\tau)}$ dans les hypothèses du théorème avec $M(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)=\overline{M}=M_0+1$. Puisque $|\Phi_i^{(\tau)}(t,s,x_j)|\leqslant2M$, donc $\overline{x}_i^{(\tau)}$ est une solution du système (II_τ), dans les seconds membres duquel les fonctions $f_i^{(\tau)}$ et $\varphi_i^{(\tau)}$ sont remplacées par $\bar{f}_i^{(\tau)}$ et $\bar{\varphi}_i^{(\tau)}$. Il suffit de démontrer le théorème I pour $\bar{f}_i^{(\tau)}$ et $\bar{\varphi}_i^{(\tau)}$, et les inégalités $a_i<\tilde{x}_i^{(\tau)}<b_i$, $|\dot{\tilde{x}}_i^{(\tau)}|<K+2M+1$, où $\tilde{x}_i^{(\tau)}$ est la solution du système $\ddot{x}_i=\bar{f}_i^{(\tau)}+\bar{\varphi}_i^{(\tau)}$, intervenant dans la thèse du théorème.

Nous allons écrire dans la suite $f_i^{(\tau)},\varphi_i^{(\tau)},x_i^{(\tau)}$ au lieu de $\bar{f}_i^{(\tau)},\bar{\varphi}_i^{(\tau)},\tilde{x}_i^{(\tau)}$. Donc

$$|f_i^{(\tau)}|,\ \left|\frac{\partial f_i^{(\tau)}}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial f_i^{(\tau)}}{\partial x_j}\right|,\ \left|\frac{\partial f_i^{(\tau)}}{\partial\dot{x}_k}\right|\leqslant\overline{M}.$$

Désignons par $g_i(t,x_j,\dot{x}_k)$ les seconds membres du système (I_τ). On a $|g_i|\leqslant\overline{\overline{M}}=\overline{M}+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau}M_\tau(s)$, d'où il résulte que les solutions sont définies dans l'intervalle $-\infty<t<\infty$. Soit $x_i(t,v_j)$ la solution de (I_τ) ayant les valeurs initiales $x_i(t_0,v_j)=x_{i0}$, $\dot{x}_k(t_0,v_j)=v_k$. Pour satisfaire aux conditions (A), il suffit d'exiger qu'on ait $x_i(t_0+\tau,v_j)=x_{i0}+u_{i0}\tau$. On a

$$x_i(t_0+\tau,v_j)=x_{i0}+\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Big[v_i+\int_{t_0}^t g_i\big(s,x_j(s,v_j),\dot{x}_k(s,v_j)\big)\,ds\Big]\,dt=x_{i0}+v_i\tau+h_i(v_j),$$

où $h_i(v_j)$ sont continues et $|h_i(v_j)|\leqslant\overline{\overline{M}}\tau^2/2$. La transformation $w_i=u_{i0}-h_i(v_j)/\tau$ transforme l'espace de v_j sur un ensemble borné des w_i, donc il existe un point fixe: $v_{i0}=u_{i0}-h_i(v_{j0})/\tau$. Il en résulte que $x_i(t_0+\tau,v_{j0})=x_{i0}+v_{i0}\tau+h_i(v_{j0})=x_{i0}+u_{i0}\tau$, donc $x_i=x_i(t,v_j)$ satisfait aux conditions (A).

D'après le lemme I, 1°, pour satisfaire aux conditions (B) il suffit d'exiger qu'on ait

$$x_i(t_0)=\tilde{x}_i^{(\tau)}(t_0),\qquad \frac{x_i(t_0+\tau)-x_i(t_0)}{\tau}=\tilde{x}_i^{\cdot(\tau)}(t_0).$$

On vérifie que

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\int_{t}^{u}p(s)\,ds\,du\,dt=0 \tag{27}$$

lorsque $\int_0^\tau p(t)\,dt=0$ et $p(t+\tau)=p(t)$ pour $-\infty<t<\infty$ [7].

D'après les hypothèses on a

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi_i^{(\tau)}(t',s,x_j')-\varphi_i^{(\tau)}(t,s,x_j)| \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_i^{(\tau)}}{\partial t}(t',s,x_j')-\dfrac{\partial\varphi_i^{(\tau)}}{\partial t}(t,s,x_j)\right| \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_i^{(\tau)}}{\partial x_j}(t',s,x_j')-\dfrac{\partial\varphi_i^{(\tau)}}{\partial x_j}(t,s,x_j)\right| \end{array}\right\}\leqslant M_\tau(s)\Big(|t'-t|+\sum_{j=1}^{n}|x_j'-x_j|\Big)\,{}^{7}). \tag{28}$$

Soit $x_i^{(\tau)}$ une solution de (I_τ) satisfaisant aux conditions (A), ou (B). Nous allons montrer qu'on peut appliquer le lemme I, c'est-à-dire que les $x_i^{(\tau)}$ satisfont aux inégalités (9) et (10), où $F_i^{(\tau)}$ sont les seconds membres du système (II_τ), et que ces $F_i^{(\tau)}$ sont de la classe C^1 et restent bornées avec leurs derivées partielles du premier ordre lorsque $\tau\to 0$.

On vérifie facilement que la dernière propriété a lieu.

On voit aussi que les hypothèses du lemme III sont satisfaites, d'où on déduit les relations (24) et (25).

Nous allons omettre l'indice τ. Soit $t_1\in[\alpha,\beta-2\tau]$ et posons

$$v_i(t)=\dot{x}_i(t),\qquad x_{i1}=x_i(t_1),\qquad v_{i1}=v_i(t_1)\quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{29}$$

On a donc

$$|v_i|=|\dot{x}_i|\leqslant L\quad \text{dans}\quad [\alpha,\beta], \tag{30}$$

$$v_i(t)=v_{i1}+\int_{t_1}^{t}\big[f_i\big(\sigma,x_j(\sigma),v_k(\sigma)\big)+\varphi_i\big(\sigma,\sigma,x_j(\sigma)\big)\big]\,d\sigma. \tag{31}$$

Il s'ensuit, en vertu de (28) et (30), que

$$|v_i(s)-v_{i1}+\Phi_i(t_1,t_1,x_{j1})-\Phi_i(t_1,s,x_{j1})|\leqslant\Big|\int_{t_1}^{s}f_i\big(\sigma,x_j(\sigma),v_k(\sigma)\big)\,d\sigma\Big|$$
$$+\Big|\int_{t_1}^{s}\big[\varphi_i\big(\sigma,\sigma,x_j(\sigma)\big)-\varphi_i\big(t_1,\sigma,x_j(t_1)\big)\big]\,d\sigma\Big|\leqslant 2\tau\overline{M}+2M(2\tau+n\cdot 2L\tau)$$

[7]) Il suffit d'effectuer la substitution $s=x+t$, $u=y+t$.

pour $t_1\leqslant s\leqslant t_1+2\tau$, d'où, d'après $\int_0^\tau\Phi_i(t_1,s,x_{j1})\,ds=0$,

$$\left|\frac{\Delta x_i(t_1)}{\tau}-v_{i1}+\Phi_i(t_1,t_1,x_{j1})\right|$$
$$=\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_1+\tau}[v_i(s)-v_{i1}+\Phi_i(t_1,t_1,x_{j1})-\Phi_i(t_1,s,x_{j1})]\,ds\right|\leqslant(2\overline{M}+4M+4MLn)\tau,$$

et, par conséquent,

$$\left|v_i(s)-\frac{\Delta x_i(t_1)}{\tau}-\Phi_i(t_1,s,x_{j1})\right|\leqslant(4\overline{M}+8M+8MLn) \tag{32}$$

pour $t_1\leqslant s\leqslant t_1+2\tau$.

On a maintenant

$$\frac{\Delta^2 x_i(t_1)}{\tau^2}=\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\ddot{x}_i(s)\,ds\,dt=\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}f_i(s,x_j,v_k)\,ds\,dt$$
$$+\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\varphi_i(s,s,x_j)\,ds\,dt.$$

En s'appuyant sur les relations (24) et (26)-(32) on transformera successivement le second membre comme il suit:

$$\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}f_i\big(s,x_j(s),v_k(s)\big)\,ds=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f_i\Big(t_1,x_{j1},\frac{\Delta x_k(t_1)}{\tau}+\Phi_k(t_1,s,x_{j1})\Big)\,ds+\eta_1,$$

où $|\eta_1|\leqslant\overline{M}\big(2\tau+2Ln\tau+(4\overline{M}+8M+8MLn)\tau\big)$,

$$\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\varphi_i\big(s,s,x_j(s)\big)\,ds\,dt$$
$$=-\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\int_{t}^{u}\Big[\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\big(u,s,x_j(u)\big)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)v_\nu(u)\Big]\,ds\,du\,dt$$
$$=-\frac{1}{\tau^2}\int\!\!\int\!\!\int\Big[\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\big(u,s,x_j(u)\big)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}(t_1,s,x_{j1})\Big]\,ds\,du\,dt$$
$$-\frac{1}{\tau^2}\int\!\!\int\!\!\int\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}(t_1,s,x_{j1})\Big]v_{\nu1}\,ds\,du\,dt$$
$$-\frac{1}{\tau^2}\int\!\!\int\!\!\int\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)\int_{t_1}^{u}f_\nu\,d\sigma\Big]\,ds\,du\,dt$$
$$-\frac{1}{\tau^2}\int\!\!\int\!\!\int\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)\int_{t_1}^{u}\varphi_\nu\big(\sigma,\sigma,x_j(\sigma)\big)\,d\sigma\Big]\,ds\,du\,dt=-\eta_2-\eta_3-\eta_4-I,$$

où $|\eta_2|\leqslant 2M(2\tau+2Ln\tau)$, $|\eta_3|\leqslant 2nM(2\tau+2nL\tau)L$, $|\eta_4|\leqslant nM\overline{M}\cdot 2\tau$ et

$$I=\frac{1}{\tau^2}\iiint\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}(t_1,s,x_{j1})\right]\times$$

$$\times\int_{t_1}^{u}\left[\varphi_\nu\big(\sigma,\sigma,x_j(\sigma)\big)-\varphi_\nu(t_1,\sigma,x_{j1})\right]d\sigma\,ds\,du\,dt$$

$$+\frac{1}{\tau^2}\iiint\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\big(u,s,x_j(u)\big)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}(t_1,s,x_{j1})\right]\int_{t_1}^{u}\varphi_\nu(t_1,\sigma,x_{j1})\,d\sigma\,ds\,du\,dt$$

$$+\frac{1}{\tau^2}\iiint\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}(t_1,s,x_{j1})\int_{t_1}^{u}\left[\varphi_\nu\big(\sigma,\sigma,x_j(\sigma)\big)-\varphi_\nu(t_1,\sigma,x_{j1})\right]d\sigma\,ds\,du\,dt$$

$$+\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\int_{t}^{u}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}(t_1,s,x_{j1})\int_{t_1}^{u}\varphi_\nu(t_1,\sigma,x_{j1})\,d\sigma\,ds\,du\,dt=\eta_5+\eta_6+\eta_7+B,$$

où $|\eta_5|\leqslant 4M^2(2\tau+2Ln\tau)^2 n$, $|\eta_6|,|\eta_7|\leqslant 4M^2(2\tau+2Ln\tau)n$ et

$$B=\frac{1}{\tau^2}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\int_{t}^{t+\tau}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}(t_1,u,x_{j1})-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}(t_1,t,x_{j1})\right]\times$$

$$\times[\Phi_\nu(t_1,u,x_{j1})-\Phi(t_1,t_1,x_{j1})]\,du\,dt=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}(t_1,u,x_{j1})\,\Phi_\nu(t_1,u,x_{j1})\,du.$$

On a donc

$$\left|\frac{\Delta^2 x_i(t_1)}{\tau^2}-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left[f_i\left(t_1,x_j(t_1),\frac{\Delta x_k(t_1)}{\tau}+\Phi_k\big(t_1,s,x_j(t_1)\big)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}\big(t_1,s,x_j(t_1)\big)\,\Phi_\nu\big(t_1,s,x_j(t_1)\big)\right]ds\right|$$

$$\leqslant|\eta_1|+|\eta_2|+|\eta_3|+|\eta_4|+|\eta_5|+|\eta_6|+|\eta_7|=\varepsilon(\tau)\to 0\quad\text{pour}\quad\tau\to 0.$$

En vertu de (30), on peut appliquer le lemme I et il vient

$$|x_i^{(\tau)}-\overline{x}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}0\quad\text{et}\quad\left|\frac{\Delta x_i^{(\tau)}}{\tau}-\dot{\overline{x}}_i^{(\tau)}\right|\rightrightarrows 0\quad\text{pour}\quad t=t_0+\tau\nu\in[\alpha,\beta-\tau]$$

lorsque $\tau\to 0$, d'où $a_i<x_i^{(\tau)}<b_i$ et, d'après (32), $|\dot{x}_i^{(\tau)}|<K+2M+1$ pour τ suffisamment petit, c. q. f. d.

Remarque. On voit que, dans le cas des conditions (A), les limitations, pour τ et pour $|\overline{x}_i^{(\tau)}-x_i^{(\tau)}|$, ne dépendent que des constantes $\beta-\alpha$, n,M,K intervenant dans les hypothèses, et de la fonction $M(\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)$.

§ 2. Soient

$$\text{(I)}\qquad m_i\ddot{x}_i=f_i(t,x_j)+\varphi_i(t,t,x_j)$$

les équations du mouvement d'un système de points matériels. Le théorème I montre que les forces „vibrantes" $\varphi_i(t,t,x_j)$ peuvent être remplacées approximativement par

$$\gamma_i(t,x_j)=-\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\Phi_\nu}{m_\nu}\,ds-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}\,ds\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\Phi_\nu}{m_\nu}\,ds\right],$$

où $\Phi_i(t,s,x_j)=\int_0^s\varphi_i(t,\sigma,x_j)\,d\sigma$. Lorsque $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t,u,x_j)\,dx_i$ est une différentielle totale pour chaque valeur de t et u fixée, c'est-à-dire quand

$$\varphi_i(t,u,x_j)=-\frac{\partial V_{\mathrm{I}}(t,u,x_j)}{\partial x_i},$$

alors les forces $\gamma_i(t,x_j)$ dérivent d'un potentiel V_{II}. En effet, lorsqu'on pose $U=\int_0^u V_{\mathrm{I}}(t,s,x_j)\,ds$, on a $\Phi_i(t,u,x_j)=\partial U(t,u,x_j)/\partial x_i$, d'où

$$\gamma_i(t,x_j)=-\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu\partial x_i}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\cdot\frac{1}{m_\nu}\,ds-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu\partial x_i}\,ds\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\cdot\frac{1}{m_\nu}\,ds\right]$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{m_\nu}\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\right)^2 ds-\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\,ds\right)^2\right)\right],$$

donc

$$V_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{m_\nu}\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Phi_\nu^2\,ds-\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Phi_\nu\,ds\right)^2\right].$$

Ce potentiel peut être réalisé de la façon suivante.

Fixons $t=t_0$, $x_i=x_{i0}$ et considérons les forces $\varphi_i(t_0,t,x_{j0})$ qui ne dépendent que du temps. Supposons qu'un système de points matériels de masses m_i soit soumis à l'action de ces forces. Les vitesses sont données par $v_i(t)=v_{i0}+\Phi_i(t_0,t,x_{j0})/m_i$, où v_{i0} sont des constantes quelconques (égales aux vitesses des points à l'instant $t=0$), et la valeur moyenne d'énergie cinétique est égale à

$$E=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_i\left(v_{i0}+\frac{1}{m_i}\Phi_i(t_0,t,x_{j0})\right)^2 dt.$$

Elle atteint son minimum pour $v_{i0}=-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1}{m_i}\Phi_i\,dt$ ou lorsque $\int_0^\tau v_i\,dt=0$, c'est-à-dire en cas de mouvement périodique; ce minimum est

$$E_{\min}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{m_\nu}\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Phi_\nu^2\,ds-\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Phi_\nu\,ds\right)^2\right]=V_{\mathrm{II}}.$$

Puisque $E_{\min}$ exprime „l'intensité" des vibrations de φ_i, on voit que les forces $\gamma_i(t,x_j)$ poussent le système dans la direction dans laquelle cette „intensité" décroît.

Quand on prend

$$f_i^{(\tau)}(t,x_j,\dot{x_k})=f_i(t,x_j),\qquad \varphi_i^{(\tau)}(u,t,x_j)=\frac{1}{\tau}\,\varphi_i\left(u,\frac{t}{\tau},x_j\right),$$

où $\varphi_i(u,s,x_j)$ sont des fonctions périodiques par rapport à s, de période 1, pour lesquelles $\int\limits_0^1\varphi_i(u,s,x_j)\,ds=0$, le théorème exprime que la solution $x_i^{(\tau)}(t)$ du système

$$(\mathrm{I}_\tau)\qquad \ddot{x_i}=f_i(t,x_j)+\frac{1}{\tau}\,\varphi_i\left(t,\frac{t}{\tau},x_j\right)$$

tend, pour $\tau\to 0$, vers la solution $\bar{x}_i(t)$ du système

$$(\mathrm{II})\qquad \ddot{x_i}=f_i(t,x_j)-\sum_{\nu=1}^{n}\left[\int\limits_0^1\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}\,\Phi_\nu\,ds-\int\limits_0^1\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_\nu}\,ds\cdot\int\limits_0^1\Phi_\nu\,ds\right],$$

où $\Phi_i(u,s,x_j)=\int\limits_0^s\varphi_i(u,\sigma,x_j)\,d\sigma$, pourvu que

$$x_i^{(\tau)}(t_0)\to\bar{x}_i(t_0)\qquad\text{et}\qquad \frac{x_i^{(\tau)}(t_2)-x_i^{(\tau)}(t_1)}{t_2-t_1}\to\dot{\bar{x}}_i(t_0),$$

où $t_1,t_2\to t_0$ et $\tau/(t_2-t_1)\to 0$.

Dans le cas où $n=1$, $\varphi(s,x)=b(x)p(s)$, $p(s+1)=p(s)$, $\int\limits_0^1 p(s)\,ds=0$, on a

$$(\mathrm{I}_\tau)\qquad x^{\cdot\cdot}=f(t,x)+b(x)\frac{1}{\tau}\,p\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

$$(\mathrm{II})\qquad x^{\cdot\cdot}=f(t,x)-\mu^2 b(x)\,b'(x),$$

où

$$(33)\qquad \mu^2=\int\limits_0^1 p^2\,ds-\left(\int\limits_0^1 P\,ds\right)^2\qquad\text{et}\qquad P(s)=\int p(\sigma)\,d\sigma\,^{8}).$$

[8]) $P(s)$ peut être primitive quelconque; sauf dans le cas où $p\equiv 0$, on a

$$\int\limits_0^1 P^2\,ds-\left[\int\limits_0^1 P\,ds\right]^2>0.$$

Dans le cas de l'équation (1) du pendule de Kapica, en faisant $a\omega=2\pi a/\tau=\text{const}$ et $\omega\to\infty$, on obtient $\Big(b(\Theta)=L^{-1}\sin\Theta$, $p(s)=2\pi a\omega\sin 2\pi s$, $\mu^2=a^2\omega^2\big[\int\limits_0^1\cos^2 2\pi t\,dt-\big(\int\limits_0^1\cos 2\pi t\,dt\big)^2\big]=\dfrac{a^2\omega^2}{2}\Big)$

$$(\mathrm{II})\qquad \varphi^{\cdot\cdot}=gL^{-1}\sin\varphi-\frac{1}{4}L^{-2}a^2\omega^2\sin 2\varphi$$

(cf. (2)).

Dans le cas où $b(x)=x$ on a l'équation de Hill

$$(\mathrm{I}_\tau)\qquad x^{\cdot\cdot}=\frac{x}{\tau}\,p\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

$$(\mathrm{II})\qquad x^{\cdot\cdot}=-\mu^2 x,$$

où μ^2 est donné par (33). Nous allons montrer que l'exposant caractéristique est imaginaire: $\alpha=i\mu_\tau$ lorsque τ est suffisamment petit et que

$$\lim_{\tau\to 0}\mu_\tau=\mu.$$

En effet, si $x_1(\tau,t)$, $x_2(\tau,t)$ sont les solutions de (I_τ) pour lesquelles $x_1(\tau,0)=1$, $\dot{x_1}(\tau,0)=0$, $x_2(\tau,0)=0$, $\dot{x_2}(\tau,0)=1$, l'exposant caractéristique est donné par (cf. renvoi 2)

$$\cosh\alpha\tau=\frac{x_1(\tau,\tau)+\dot{x_2}(\tau,\tau)}{2},\qquad \mathcal{R}\alpha\tau\geqslant 0,\quad 0\leqslant\mathcal{I}\alpha\tau<2\pi,$$

ou, après la substitution $u=t/\tau$, $y_1=x_1$, $y_2=x_2/\tau$, par

$$(34)\qquad \cosh\alpha\tau=\frac{y_1(\tau,1)+\dfrac{\partial y_2}{\partial u}(\tau,1)}{2},\qquad \mathcal{R}\alpha\tau\geqslant 0,\quad 0\leqslant\mathcal{I}\alpha\tau<2\pi,$$

où $y_1(\tau,u)$, $y_2(\tau,u)$ sont les solutions de l'équation

$$(35)\qquad \frac{d^2y}{du^2}=y\tau p(u)$$

pour lesquelles

$$(36)\qquad y_1(\tau,0)=1,\qquad \frac{\partial y_1}{\partial u}(\tau,0)=0,\qquad y_2(\tau,0)=0,\qquad \frac{\partial y_2}{\partial u}(\tau,0)=1.$$

On a donc

$$(37)\qquad y_1(0,u)=1,\qquad y_2(0,u)=u.$$

Toutes les dérivées partielles des fonctions y_1, y_2, lesquelles contiennent au plus deux différentiations par rapport à u, sont continues.

On a

$$\frac{d^2}{du^2}\frac{\partial y_i}{\partial \tau}=\left(\frac{\partial y_i}{\partial \tau}\tau+y_i\right)p,\qquad \frac{d^2}{du^2}\frac{\partial^2 y_i}{\partial \tau^2}=\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial \tau^2}\tau+2\frac{\partial y_i}{\partial \tau}\right)p\qquad (i=1,2),$$

d'où, d'après (37),

$$\frac{d^2}{du^2}\frac{\partial y_i}{\partial \tau}(0,u)=p(u),\qquad \frac{d^2}{du^2}\frac{\partial y_2}{\partial \tau}(0,u)=up(u),$$

$$\frac{d^2}{du^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial \tau^2}(0,u)=2\frac{\partial y_i}{\partial \tau}(0,u)p(u)\qquad (i=1,2),$$

et, par conséquent ($P(u)=\int_0^u p(s)\,ds$),

$$\frac{\partial y_1}{\partial \tau}(0,u)=\int_0^u\int_0^t p(s)\,ds\,dt=\int_0^u P(t)\,dt,\qquad \frac{\partial y_2}{\partial \tau}(0,u)=\int_0^u\int_0^t sp(s)\,ds\,dt,$$

$$(38)\qquad \frac{d}{du}\frac{\partial y_2}{\partial \tau}(0,1)=-\int_0^1 P(t)\,dt,\qquad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \tau^2}(0,1)=2\int_0^1\int_0^s p(u)\int_0^u P(t)\,dt\,du\,ds,$$

$$\frac{d}{du}\frac{\partial^2 y_2}{\partial \tau_2}=2\int_0^u p(u)\int_0^u\int_0^t sp(s)\,ds\,dt\,du,$$

car, d'après (27),

$$\frac{\partial y_i}{\partial \tau}(0,0)=\frac{d}{du}\frac{\partial y_i}{\partial \tau}(0,0)=\frac{\partial^2 y_i}{\partial \tau^2}(0,0)=\frac{d}{du}\frac{\partial^2 y_i}{\partial \tau^2}(0,0)=0.$$

Considérons l'expression

$$2\frac{\cosh \tau a-1}{\tau^2}=\frac{y_1(\tau,1)+\dfrac{\partial y_2}{\partial u}(\tau,1)-2}{\tau^2}.$$

Puisque, d'après (37), (38), on a

$$y_1(0,1)+\frac{\partial y_2}{\partial u}(0,1)-2=0\qquad\text{et}\qquad \frac{\partial y_1}{\partial \tau}(0,1)+\frac{d}{du}\frac{\partial y_2}{\partial \tau}(0,1)=0,$$

donc (cf. (38))

$$\lim_{\tau\to\infty}2\frac{\cosh\tau a-1}{\tau^2}=\frac{\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial\tau^2}(0,1)+\dfrac{d}{du}\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial\tau^2}(0,1)}{2}$$
$$=\int_0^1\int_0^s p(u)\int_0^u P(t)\,dt\,du\,ds+\int_0^1 p(u)\int_0^u\int_0^t sp(s)\,ds\,dt\,du$$
$$=\int_0^1\left[P(s)\int_0^s P(t)\,dt-\int_0^s P^2(t)\,dt\right]ds-\int_0^1 P(u)\int_0^u sp(s)\,ds\,du$$
$$=-\int_0^1 P^2\,du+\left[\int_0^1 P\,du\right]^2=-\mu^2.$$

Il en résulte que, pour τ suffisamment petit, $-1<\cosh\tau a<1$, donc (cf. (34)) $a=i\mu_\tau$, où $0\leqslant\tau\mu_\tau<2\pi$, et $\lim_{\tau\to 0}2(1-\cos\tau\mu_\tau)/\tau^2=\mu^2$, d'où $\mu_\tau\to\mu$, c. q. f. d.

Si τ est suffisamment petit, alors $\tau a=i\tau\mu_\tau\neq 0,\neq\pi i$ et la solution générale de l'équation de Hill est de la forme

$$x=a\varphi_\tau(t)e^{-i\mu_\tau t}+b\,\psi_{(\tau)}(t)\,e^{i\mu_\tau t},$$

où φ_τ,ψ_τ sont périodiques, de période τ, et $\varphi_\tau(t')=\psi_\tau(t')=1$ pour un t'. En s'appuyant sur le théorème I, on montre que $\varphi_\tau,\psi_\tau\Rightarrow 1$.

§ 3. Dans l'exemple du mouvement d'un point percuté la force qui agit sur ce point est une force instantanée qui peut être représentée par $I(x)\lambda(t)$, où

$$\lambda(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^\nu\delta\left(t-\nu\frac{\tau}{2}\right)$$

et $\delta(t)$ est la fonction de Dirac. On peut écrire l'équation du mouvement sous la forme

$$(39)\qquad x^{\cdot\cdot}=I(x)\lambda(t),$$

mais les fonctions de la variable t et la différentiation doivent être considérées au sens des distributions de L. Schwartz [6].

Nous allons considérer le système

$$(\mathrm{III})\qquad x_i^{\cdot\cdot}=\sum_{\varkappa=1}^{k}\varphi_{i\varkappa}(t,t,x_j)\,\mu_{i\varkappa}(t)\qquad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

où $\varphi_{i\varkappa}(t,s,x_j),\partial\varphi_{i\varkappa}/\partial x_j$ sont des fonctions continues dans l'ensemble $a\leqslant t\leqslant\beta$, $a-1\leqslant s\leqslant\beta+1$, $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ et $\mu_{i\varkappa}$ sont des mesures (finies pour les sous-ensembles boreliens de l'intervalle $[a-1,\beta+1]$). Nous les considérons comme les distributions et nous cherchons une solution continue x_i satisfaisant aux conditions initiales

$$(40)\qquad x_i(t_0)=x_{i0},\qquad x_i^{\cdot}(t_0+0)=v_{i0},\qquad\text{où}\quad t_0\in[a,\beta].$$

Nous allons désigner par $|\mu|$ la variation totale de μ et par $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,d\mu(t)$ l'intégrale $\int\limits_{(\alpha,\beta]} f\,d\mu$, ou $-\int\limits_{(\beta,\alpha]} f\,d\mu$, ou zero, lorsque $\alpha<\beta$, ou $\alpha>\beta$, ou $\alpha=\beta$. Remarquons que $g(t)=\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,d\mu(s)$ est une primitive (au sens des distributions) du produit multiplicatif $f(t)\mu(t)$.

Puisque le second membre de (III) est la dérivée (au sens des distributions) de la fonction à variation bornée

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_{i\varkappa}\big(s,s,x_j(s)\big)\,d\mu_{i\varkappa}(s),$$

donc x_i est une fonction absolument continue ($i=1,2,\dots,n$) et on a (presque partout)

$$\text{(III}_1\text{)}\qquad x_i^{\cdot}=v_{i0}+\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_{i\varkappa}\big(s,s,x_j(s)\big)\,d\mu_{i\varkappa}(s)\qquad (i=1,2,\dots,n),$$

où $x_i^{\cdot}$ est la dérivée au sens usuel. Les équations (III$_1$) avec les conditions initiales $x_i(t_0)=x_{i0}$ sont équivalentes au système (III) avec les conditions initiales (40). Enfin nous représentons ce système sous la forme équivalente suivante:

$$x_i=x_{i0}+v_{i0}(t-t_0)+\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{u}\varphi_{i\varkappa}\big(s,s,x_j(s)\big)\,d\mu_{i\varkappa}(s)\,du,$$

ou

$$\text{(III}_2\text{)}\qquad x_i(t)=x_{i0}+v_{i0}(t-t_0)+\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)\varphi_{i\varkappa}\big(s,s,x_j(s)\big)\,d\mu_{i\varkappa}(s).$$

Soit $\gamma_\varepsilon(u)$ une fonction de la classe C^1 dans $(-\infty,\infty)$, égale à zéro dans $(-\infty,0]+[\varepsilon,\infty)$, positive dans $(0,\varepsilon)$ et telle qu'on ait

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma_\varepsilon(u)\,du=1.$$

Si $f(x)$ est une fonction telle que $|f(u')-f(u)|\leqslant\eta(|u'-u|)$, où $\eta(\xi)$ est une fonction non-décroissante pour $\xi>0$, alors

$$\text{(41)}\qquad \Big|\int\limits_{a}^{b} f(\sigma)\gamma_\varepsilon(s-\sigma)\,d\sigma-f(s)\Big|\leqslant\eta(\varepsilon)\qquad\text{pour}\quad a+\varepsilon\leqslant s\leqslant b.$$

Lemme IV. *Considérons le système*

$$\text{(IV}_\varepsilon\text{)}\qquad x_i^{\cdot\cdot}=\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{\alpha-1}^{\beta+1}\varphi_{i\varkappa}(t,s,x_j)\gamma_\varepsilon(s-t)\,d\mu_{i\varkappa}(s)\qquad(\varepsilon<1)\text{[9]}$$

[9]) Les seconds membres sont définis et continus avec leurs dérivées $\partial/\partial x_j$ dans l'ensemble $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$.

et soit $x_{i\varepsilon}(t)$ une solution satisfaisant aux conditions initiales

$$x_{i\varepsilon}(t_0^\varepsilon)=x_{i0}^\varepsilon,\qquad x_{i\varepsilon}^{\cdot}(t_0^\varepsilon)=v_{i0}^\varepsilon,$$

où $x_{i0}^\varepsilon\to x_{i0}$, $v_{i0}^\varepsilon\to v_{i0}$, $t_0^\varepsilon\to t_0$, $t_0^\varepsilon\geqslant t_0$ pour $\varepsilon\to0$, et $a_i<x_{i0}<b_i$.

Cela posé, les $x_{i\varepsilon}(t)$ existent dans un intervalle commun. Si elles existent dans $[\alpha_0,\beta_0]$, alors

$$x_{i\varepsilon}(t)\underset{[\alpha_0,\beta_0]}{\rightrightarrows}x_i(t),$$

où $x_i(t)$, dans $[\alpha_0,\beta_0]$, est une solution de (III$_2$) (ou de III avec les conditions initiales (40)). C'est la solution unique de (III$_2$) dans $[\alpha_0,\beta_0]$.

Démonstration. On a

$$\text{(42)}\qquad |\varphi_{i\varkappa}|,\quad\left|\frac{\partial\varphi_{i\varkappa}}{\partial x_j}\right|\leqslant M.$$

L'unicité des solutions de (III$_2$) (ou (III)) peut être demontrée de la même manière que pour équations différentielles (cf. par exemple, L. Bieberbach [1], p. 28).

On a

$$\text{(43)}\qquad\begin{aligned} x_{i\varepsilon}(t)&=x_{i0}^\varepsilon+v_{i0}^\varepsilon(t-t_0^\varepsilon)+\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{t_0^\varepsilon}^{t}\int\limits_{t_0^\varepsilon}^{u}\int\limits_{\alpha-1}^{\beta+1}\varphi_{i\varkappa}\big(\sigma,\sigma,x_j(\sigma)\big)\gamma_\varepsilon(s-\sigma)\,d\mu_{i\varkappa}(s)\,d\sigma\,du,\\ x_{i\varepsilon}(t)&=x_{i0}^\varepsilon+v_{i0}^\varepsilon(t-t_0^\varepsilon)+\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{t_1}^{t_2+\varepsilon}\int\limits_{t_0^\varepsilon}^{t}(t-\sigma)\varphi_{i\varkappa}\big(\sigma,s,x_j(\sigma)\big)\gamma_\varepsilon(s-\sigma)\,d\sigma\,d\mu_{i\varkappa}(s),\end{aligned}$$

où $t_1=\min(t_0^\varepsilon,t)$, $t_2=\max(t_0^\varepsilon,t)$, et

$$x_{i\varepsilon}^{\cdot}(t)=v_{i0}^\varepsilon+\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{\alpha-1}^{\beta+1}\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_{i\varkappa}\big(\sigma,s,x_j(\sigma)\big)\gamma_\varepsilon(s-\sigma)\,d\sigma\,d\mu_{i\varkappa}(s).$$

D'après (41) et (42), on en déduit

$$\text{(44)}\qquad |x_{i\varepsilon}^{\cdot}(t)|\leqslant|v_{i0}^\varepsilon|+\sum_{\varkappa=1}^{k}|\mu_{i\varkappa}|([\alpha-1,\beta+1])\cdot3M\leqslant\overline{M}.$$

Il s'ensuit que, pour ε suffisamment petit, les fonctions $x_{i\varepsilon}$ sont définies et équicontinues dans un intervalle commun contenant t_0. Il suffit de démontrer que, si

$$\text{(45)}\qquad x_{i\varepsilon_\nu}(t)\underset{[\alpha_0,\beta_0]}{\rightrightarrows}x_i(t),\qquad\varepsilon_\nu\to0,\qquad\alpha_0\leqslant t_0^{\varepsilon_\nu}\leqslant\beta_0,$$

alors $x_i(t)$ est une solution de (III$_2$).

Soit $t \in [\alpha_0, \beta_0]$. La différence entre les sommes dans les seconds membres de (43) et (III_2) est égale à

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\Bigg\{\mp\int\limits_{t_1+\varepsilon_\nu}^{t_2}\Bigg[\int\limits_{t_1}^{t_2}(t-\sigma)\varphi_{i\varkappa}\big(\sigma, s, x_{j\varepsilon_\nu}(\sigma)\big)\gamma_{\varepsilon_\nu}(s-\sigma)\,d\sigma-(t-s)\varphi_{i\varkappa}\big(s, s, x_j(s)\big)\Bigg]d\mu_{i\varkappa}(s)$$

$$\mp\Bigg(\int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon_\nu}\int\limits_{t_1}^{t_2}+\int\limits_{t_2}^{t_2+\varepsilon_\nu}\int\limits_{t_1}^{t_2}\Bigg)(t-\sigma)\varphi_{i\varkappa}\big(\sigma, s, x_{j\varepsilon_\nu}(\sigma)\big)\gamma_{\varepsilon_\nu}(s-\sigma)\,d\sigma\,d\mu_{i\varkappa}(s)$$

$$+\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t_0^{\varepsilon_\nu}}\mp\int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon_\nu}\Bigg)(t-s)\varphi_{i\varkappa}\big(s, s, x_j(s)\big)\,d\mu_{i\varkappa}(s)\Bigg\}=\sum_{\varkappa=1}^{k}(I_1^\varkappa+I_2^\varkappa+I_3^\varkappa),$$

où $|I_2^\varkappa|+|I_3^\varkappa|\leqslant(\beta-\alpha+2)M\,\big[2\,|\mu_{i\varkappa}|\big((t_1, t_1+\varepsilon_\nu]\big)+|\mu_{i\varkappa}|\big((t_2, t_2+\varepsilon_\nu]\big)+|\mu_{i\varkappa}|\big((t_0, t_0^{\varepsilon_\nu}]\big)\big]$ et, selon (41), (42),

$$|I_1^\varkappa|\leqslant|\mu_{i\varkappa}|([\alpha-1, \beta+1])\Big[\big(M+(\beta-\alpha+2)nM\overline{M}\big)\varepsilon_\nu+\eta(\varepsilon_\nu)$$
$$+(\beta-\alpha+2)M\sum_{j=1}^{n}\max_{[\alpha_0,\beta_0]}|x_{j\varepsilon_\nu}-x_j|\Big],$$

car, d'après (44),

$$\left|\frac{d}{d\sigma}(t-\sigma)\varphi_{i\varkappa}\big(\sigma_0, s, x_{j\varepsilon_\nu}(\sigma)\big)\right|\leqslant M+(\beta-\alpha+2)nM\overline{M},$$

et

$$|\varphi_{i\varkappa}(\sigma, s, x_j)-\varphi_{i\varkappa}(\sigma_0, s, x_j)|<\eta(|\sigma-\sigma_0|),\qquad \text{où}\quad \eta(\xi)\to 0\quad \text{pour}\quad \xi\to 0.$$

On en conclut, d'après (45), que les seconds membres de (43) tendent uniformément vers celles de (III_2), d'où il résulte que $x_i(t)$ dans $[\alpha_0, \beta_0]$ satisfait à (III_2), c. q. f. d.

THÉORÈME II. *Considérons les systèmes*

$$(\mathrm{I}_\tau^*)\qquad \ddot{x_i}=f_i^{(\tau)}(t, x_j)+\sum_{\varkappa=1}^{k}\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, t, x_j)\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(t)\qquad (i, j=1, 2, \ldots, n;\ 0<\tau<\tau_0),$$

où les fonctions $\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, s, x_j)$ *et les mesures* $\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}$ *sont périodiques par rapport à* s, *de période* τ [10]), *telles que*

$$\int\limits_0^\tau\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, s, x_j)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(s)=0,$$

$$(\mathrm{II}_\tau^*)\qquad \ddot{x_i}=f_i^{(\tau)}(t, x_j)-\sum_{\nu=1}^{n}\Bigg(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\frac{\partial\Phi_i^{(\tau)}}{\partial x_\nu}\Phi_\nu^{(\tau)}ds-\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\frac{\partial\Phi_i^{(\tau)}}{\partial x_\nu}ds\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\Phi_\nu^{(\tau)}ds\Bigg),$$

où

$$\Phi_i^{(\tau)}(t, s, x_j)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_0^s\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, \sigma, x_j)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma).$$

[10]) On dit que la mesure μ est *périodique, de période* τ, lorsqu'on a $\mu(\tau+E)=\mu(E)$ pour tout l'ensemble borelien borné.

Supposons que, pour $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$, $-\infty<s<\infty$, $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$), *les fonctions*

$$f_i^{(\tau)}(t, x_j),\quad \frac{\partial f_i^{(\tau)}}{\partial t},\quad \frac{\partial f_i^{(\tau)}}{\partial x_j}\qquad \text{et}\qquad \varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(u, s, x_j),\quad \frac{\partial\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}}{\partial x_j},\quad \frac{\partial\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}}{\partial u},\quad \frac{\partial^2\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}}{\partial u\,\partial x_j},\quad \frac{\partial^2\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}}{\partial x_j\,\partial x_\nu}$$

soient continues et leurs valeurs absolues $\leqslant M$, *ou* $\leqslant M_{i\varkappa}^{(\tau)}(s)$, *où*

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_0^\tau M_{i\varkappa}^{(\tau)}(s)\,d|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|\leqslant M\qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ 0<\tau<\tau_0).$$

Ceci étant la thèse du théorème I (*lorsqu'on remplace* (I_τ), (II_τ) *par* (I_τ^*), (II_τ^*)) *subsiste.*

Démonstration. Considérons les systèmes

$$(\mathrm{I}_{\tau\varepsilon})\qquad \ddot{x_i}=f_i^{(\tau)}(t, x_j)+\sum_{\sigma=1}^{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, \sigma, x_j)\gamma_\varepsilon(\sigma-t)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma)\qquad (\varepsilon<1),$$

$$(\mathrm{II}_{\tau\varepsilon})\qquad \ddot{x_i}=f_i^{(\tau)}(t, x_j)-\sum_{\nu=1}^{n}\Bigg(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\frac{\partial\Psi_i^{\tau\varepsilon}}{\partial x_\nu}\Psi_\nu^{\tau\varepsilon}ds-\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\frac{\partial\Psi_i^{\tau\varepsilon}}{\partial x_\nu}ds\cdot\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\Psi_\nu^{\tau\varepsilon}ds\Bigg),$$

où

$$\Psi_i^{\tau\varepsilon}(t, s, x_j)=\int\limits_0^s\psi_i^{\tau\varepsilon}(t, u, x_j)\,du,$$

$$\psi_i^{\tau\varepsilon}(t, s, x_j)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, \sigma, x_j)\gamma_\varepsilon(\sigma-s)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma)$$

sont périodiques par rapport à s $\Big(\int\limits_0^\tau\psi_i^{\tau\varepsilon}(t, s, x_j)\,ds=0\Big)$. On vérifie que les seconds membres de ($\mathrm{I}_{\tau\varepsilon}$) satisfont aux hypothèses du théorème I

$$\left(|\psi_i^{\tau\varepsilon}|,\ \left|\frac{\partial\psi_i^{\tau\varepsilon}}{\partial x_j}\right|, \ldots\leqslant M_{\tau\varepsilon}(s)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma)\gamma_\varepsilon(\sigma-s)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma),\ \int\limits_0^\tau M_{\tau\varepsilon}(s)\,ds\leqslant M\right).$$

On a

$$|\Phi_i^{(\tau)}|,\ \left|\frac{\partial\Phi_i^{(\tau)}}{\partial x_j}\right|,\ |\Psi_i^{\tau\varepsilon}|,\ \left|\frac{\partial\Psi_i^{\tau\varepsilon}}{\partial x_j}\right|\leqslant M,$$

$$|\Psi_i^{\tau\varepsilon}(t, s, x_j)-\Phi_i^{(\tau)}(t, s, x_j)|$$

$$=\left|\sum_{\varkappa=1}^{k}\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma_\varepsilon(\xi)\int\limits_{\xi}^{s+\xi}\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, \sigma, x_j)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma)\,d\xi-\int\limits_0^s\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, \sigma, x_j)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma)\Bigg]\right|$$

$$=\left|\sum_{\varkappa=1}^{k}\int\limits_0^\varepsilon\gamma_\varepsilon(\xi)\Bigg(\int\limits_s^{s+\xi}-\int\limits_0^{\xi}\Bigg)\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}(t, \sigma, x_j)\,d\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}(\sigma)\,d\xi\right|$$

$$\leqslant\sum_{\varkappa=1}^{k}A_{i\varkappa}^{(\tau)}\big[|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|((s, s+\varepsilon])+|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|((0, \varepsilon])\big]$$

et, paréillement,

$$\left|\frac{\partial \Psi_i^{\tau\varepsilon}}{\partial x_j}-\frac{\partial \Phi_i^{(\tau)}}{\partial x_j}\right| \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k} A_{i\varkappa}^{(\tau)}\big[|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|((s,s+\varepsilon])+|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|((0,\varepsilon])\big],$$

où

$$A_{i\varkappa}^{(\tau)}=\max_{t,s,x_j,j}\left(|\varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}|,\ \left|\frac{\partial \varphi_{i\varkappa}^{(\tau)}}{\partial x_j}\right|\right).$$

Il s'ensuit que la valeur absolue de la différence entre les seconds membres de $(\mathrm{II}_{\varepsilon\tau})$ et (II_τ^*) est

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} 4M\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\sum_{\varkappa=1}^{k} A_{i\varkappa}^{(\tau)}\big[|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|\big((s,s+\varepsilon]\big)+|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|\big((0,\varepsilon]\big)\big]\,ds$$

$$=\frac{4M}{\tau}\sum_{i,\varkappa} A_{i\varkappa}^{(\tau)}\big[\varepsilon|\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}|((0,\tau])+\tau\mu_{i\varkappa}^{(\tau)}((0,\varepsilon])\big]\ ^{11}),$$

par conséquent, les seconds membres de $(\mathrm{II}_{\varepsilon\tau})$ tendent uniformément vers celles de (II_τ^*) lorsque $\varepsilon\to 0$, τ étant fixé. Soit $\overline{x}_i^{\tau\varepsilon}$ une solution de $(\mathrm{II}_{\varepsilon\tau})$ ayant les mêmes valeurs initiales que $\overline{x}_i^{(\tau)}$. On a donc $|\overline{x}_i^{\tau\varepsilon}-\overline{x}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\Rightarrow} 0$ lorsque $\varepsilon\to 0$ (cf. E. Kamke [4], p. 153).

D'après le théorème I, il existe une solution de $(\mathrm{I}_{\varepsilon\tau})$, $x_i^{\tau\varepsilon}$ définie dans $[\alpha,\beta]$, satisfaisant avec $\overline{x}_i^{\tau\varepsilon}$ aux conditions (A) pourvu que τ soit suffisamment petit: $\tau<\tau_1$, où, selon la remarque faite à la fin du § 1, τ_1 ne dépend pas de ε. Les $x_i^{\cdot\tau\varepsilon}$ étant bornées (cf. Lemme III), il existe une suite extraite $x_i^{\tau\varepsilon_\nu}$ telle qu'on puisse appliquer le lemme IV[12]). On a donc $x_i^{\tau\varepsilon_\nu}\underset{[\alpha,\beta]}{\Rightarrow} x_i^{(\tau)}$, où $x_i^{(\tau)}$ est une solution de (I_τ^*). Elle satisfait aux conditions (A) et, par conséquent (cf. lemme I, 1⁰), aux conditions (B).

Soit $x_i^{(\tau)}$ dans $[\alpha,\beta]$ une solution quelconque de (I_τ^*) satisfaisant aux conditions (A) ou (B). Lorsque ε est suffisamment petit, on a

$$|x_i^{\tau\varepsilon}-x_i^{(\tau)}|<\tau,\quad |\overline{x}^{\tau\varepsilon}-\overline{x}^{(\tau)}|<\tau \quad \text{dans}\quad [\alpha,\beta],$$

$$\left|\frac{x_i^{\tau\varepsilon}(t_0+\tau)-x_i^{\tau\varepsilon}(t_0)}{\tau}-\frac{x_i^{(\tau)}(t_0+\tau)-x_i^{(\tau)}(t_0)}{\tau}\right|<\tau,$$

ou

$$\left|\frac{x_i^{\tau\varepsilon}(t_2)-x_i^{\tau\varepsilon}(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{x_i^{(\tau)}(t_2)-x_i^{(\tau)}(t_1)}{t_2-t_1}\right|<\tau$$

[11]) Car on a $\int_0^{\tau}\mu((s,s+\varepsilon])\,ds=\varepsilon\mu((0,\tau])$ (τ étant une période de μ).

[12]) Pour appliquer le lemme IV, on pose $\varphi_{i0}(t,s,x_j)=f_i^{(\tau)}(t,x_j)$ et $\mu_{i0}=$ mesure de Lebesgue.

pour la solution de $(\mathrm{II}_{\tau\varepsilon})$, $x_i^{\tau\varepsilon}$ dans $[\alpha,\beta]$, ayant les mêmes valeurs initiales que $x_i^{(\tau)}$. Il s'ensuit (cf. lemme I, 1⁰) que $x_i^{\tau\varepsilon}$ satisfait aux conditions (B), donc, selon le théorème I, $|x_i^{\tau\varepsilon}-\overline{x}_i^{\tau\varepsilon}|\underset{[\alpha,\beta]}{\Rightarrow} 0$, et, par conséquent (cf. (46)), $|x_i^{(\tau)}-\overline{x}_i^{(\tau)}|\underset{[\alpha,\beta]}{\Rightarrow} 0$, ce qui termine la démonstration.

Remarque. Dans le cas de l'équation (39) (mouvement d'un point percuté) on a

$$(\mathrm{II}_\tau^*)\qquad x^{\cdot\cdot}=-\mu^2 kI(x),$$

où

$$\mu^2=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\Phi^2\,dt-\left(\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\Phi\,dt\right)^2 \quad\text{et}\quad \Phi(t)=\int_0^t d\lambda=\begin{cases}0 & \text{dans } \left[0,\frac{\tau}{2}\right),\\ 1 & \text{dans } \left[\frac{\tau}{2},\tau\right),\end{cases}$$

donc $\mu^2=\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\tau}{2}-\left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\tau}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, en accord avec (6).

Publications citées

[1] L. Bieberbach, *Theorie der Differentialgleichungen*, Berlin 1923.

[2] П. П. Капица, *Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвесия*, Журнал экспериментальной и теоретической физики 25 (1951), вып. 5, p. 588-597.

[3] — *Маятник с вибрирующим подвесом*, Успехи физических наук 44 (1951), вып. I, p. 7-20.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[5] — *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1943.

[6] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris 1950, 1951.

[7] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A cours of modern analysis*, Cambridge 1935.