Sur les zéros des polynômes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone

par M. Biernacki (Lublin)

On sait que chaque polynôme trigonométrique à coefficients réels et de degré n

$$a_0+a_1\cos\Theta+b_1\sin\Theta+\ldots+a_n\cos n\Theta+b_n\sin n\Theta$$

possède au plus $2n$ zéros dans l'intervalle $0\leqslant\Theta<2\pi$ [1]). En 1918 G. Pólya a prouvé [2]) que les polynômes

$$(*)\qquad a_0+a_1\cos\Theta+\ldots+a_n\cos n\Theta,$$

$$(**)\qquad a_1\sin\Theta+\ldots+a_n\sin n\Theta$$

où $0<a_0<a_1<\ldots<a_n$ ont exactement $2n$ zéros dans l'intervalle en question. La démonstration est simple: les expressions $(*)$ et $(**)$ constituent respectivement la partie réelle et le coefficient de i du polynôme

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

sur la circonférence $|z|=1$. D'après le théorème d'Eneström-Kakeya [3]) tous les zéros de $f(z)$ sont contenus dans le cercle $|z|<1$, donc, d'après le principe de l'argument, le point $w=f(z)$ tourne n fois autour de l'origine lorsque z décrit la circonférence $|z|=1$ et la courbe décrite par w coupe au moins $2n$ fois l'axe réel et au moins $2n$ fois l'axe imaginaire. En 1936 G. Szegö [4]) a précisé ce résultat de Pólya en prouvant que le polynôme $(*)$ possède exactement un zéro simple dans chaque intervalle

$$\frac{s-1/2}{n+1/2}\pi<\Theta<\frac{s+1/2}{n+1/2}\pi\qquad(s=1,2,\ldots,2n).$$

[1]) Cf. pour la démonstration [4], tome II, p. 77 et 268. Chaque zéro est compté avec son ordre de multiplicité.

[2]) Cf. [4], tome I, p. 121 et 295.

[3]) Cf. [1], p. 19, et [3], p. 106.

[4]) Cf. [5], p. 130-131.

Le but de cet article est d'établir un théorème en quelque sorte analogue à celui de Pólya-Szegö: on considère les polynômes à coefficients positifs

$$a_k\cos k\Theta+\ldots+a_n\cos n\Theta,\qquad a_k\sin k\Theta+\ldots+a_n\sin n\Theta\qquad(k<n).$$

et on prouve, sous certaines conditions, que ces polynômes possèdent *exactement* $2k$ zéros dans l'intervalle $0\leqslant\Theta<2\pi$. Un raisonnement analogue à celui qui vient d'être cité prouve d'ailleurs immédiatement que ces polynômes ont *au moins* $2k$ zéros dans l'intervalle $0\leqslant\Theta<2\pi$. Or, il est évident que les inégalités analogues à celles de Pólya-Szegö

$$a_k>a_{k+1}>\ldots>a_{n-1}>a_n>0$$

ne suffisent pas, à elles seules, pour assurer le résultat voulu. En effet, en posant $a_k=a_{k+1}=\ldots=a_n=1$ on obtient des polynômes qui peuvent avoir $2n$ zéros simples dans l'intervalle $0\leqslant\Theta<2\pi$ (cf. la formule (3) ci-dessous). Mais si les coefficients a_i décroissent assez rapidement on obtient les théorèmes suivants:

Théorème I. *Les polynômes à coefficients positifs*

$$(1)\qquad a_k\sin k\Theta+\ldots+a_n\sin n\Theta\qquad(k<n)$$

$$(2)\qquad a_k\cos k\Theta+\ldots+a_n\cos n\Theta$$

où

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{a_{k+1}}{a_k}\leqslant\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}\cdot\frac{2k}{2k+1},\quad \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\leqslant\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}\cdot\frac{2k+1}{2k+2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}\cdot\frac{n+k-1}{n+k}$$

possèdent exactement $2k$ zéros dans l'intervalle $0\leqslant\Theta<2\pi$, et tous ces zéros sont simples.

Théorème II. *Si les zéros du polynôme $a_k+a_{k+1}a+\ldots+a_nz^{n-k}$ sont réels, on peut remplacer dans l'énoncé I les inégalités* (A) *par les inégalités moins restrictives suivantes*:

$$(\mathrm{B})\qquad a_k>a_{k+1}>\ldots>a_n>0;\qquad ka_k-(k+1)a_{k+1}+\ldots\pm na_n>0.$$

Les inégalités (B) sont vérifiées, en particulier, si l'on a les inégalités

$$(\mathrm{B}')\qquad ka_k\geqslant(k+1)a_{k+1}\geqslant\ldots\geqslant na_n>0,$$

où un signe $\geqslant$ au moins se réduit au signe $>$. Le cas $a_k=a_{k+1}=\ldots=a_n$, $n-k$ pair, montre que les conditions (B) ne suffisent pas, dans le cas général, pour assurer la thèse du théorème I.

Théorème III. *Chaque polynôme* (1), *où* $k \geqslant 2$, *qui vérifie les conditions* (B'), *est positif dans l'intervalle* $0 < \Theta \leqslant \pi/2k$ *et négatif pour* $\Theta = \pi/k$.

Le théorème III est valable même dans le cas où il y a le signe d'égalité dans toutes les inégalités (B'). Dans le cas où $k=1$, le polynôme (1) est positif dans l'intervalle $0 < \Theta < \pi$[5].

Dans la démonstration de ces théorèmes je me bornerai au cas du polynôme (1), car la démonstration dans le cas du polynôme (2) est presque identique.

En appliquant la formule d'Euler $\sin\Theta = (2i)^{-1}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ et en posant $e^{i\theta} = z$, on constate que le nombre des zéros réels du polynôme (1) dans l'intervalle $0 \leqslant \Theta < 2\pi$ est égal à celui des racines de l'équation

$$a_k(z^k - z^{-k}) + \ldots + a_n(z^n - z^{-n}) = 0$$

situées sur la circonférence $|z|=1$, et que cette transformation conserve la multiplicité des racines. Or, la dernière équation peut s'écrire sous le forme

$$f(z) = z^{n+k} \tag{3}$$

où

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_n + a_{n-1}z + \ldots + a_k z^{n-k}}{a_k + a_{k+1}z + \ldots + a_n z^{n-k}}$$

car, en vertu du théorème d'Eneström-Kakeya (loc. cit. sous[3])), tous les zéros du numérateur $N(z)$ sont à l'intérieur du cercle $|z|<1$. Les polynômes $N(z)$ et $D(z)$ étant réciproques, tous les zéros de $D(z)$ sont extérieurs à ce cercle, tandis que le module de $f(z)$ est constant et égal à 1 le long de la circonférence $|z|=1$; donc, si $|z|<1$, on a aussi $|f(z)|<1$, tandis que *l'expression* $zf'(z)/f(z)$ *est constamment positive le long de la circonférence* $|z|=1$. Je vais démontrer que sous les conditions des théorèmes I et II on a

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} < n+k \quad \text{pour} \quad |z|=1. \tag{4}$$

Cette inégalité fondamentale entraîne immédiatement les théorèmes, car elle peut s'écrire

$$|f'(z)| < \left|\frac{d}{dz} z^{n+k}\right|$$

et il en résulte que sur la circonférence $|z|=r<1$, où r est assez voisin de 1, on a $|f(z)| > |z|^{n+k}$, donc en vertu du théorème de Rouché l'équation (3) a autant de racines dans le cercle $|z|<r$ que l'équation $f(z)=0$,

[5]) Cf. [2] et [6], p. 188, où le fait est démontré dans le cas $a_1 = a_2 = \ldots = a = 1$.

c'est-à-dire exactement $n-k$. L'équation (3) de degré $2n$ étant réciproque, elle a aussi $n-k$ racines à l'extérieur de la circonférence $|z|=1$, et, par suite, exactement $2k$ sur cette circonférence. Ces racines sont simples, car, autrement, on y aurait $f'(z) = (n+k)z^{n+k-1}$, égalité incompatible avec (4)[6]).

Pour établir l'inégalité (4) remarquons que, si elle n'a pas lieu, il y a un point z de la circonférence $|z|=1$, où l'on a

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = n+k. \tag{5}$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait constamment sur $|z|=1$,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} > n+k,$$

c'est-à-dire

$$|f'(z)| > \left|\frac{d}{dz} z^{n+k}\right|.$$

En appliquant le théorème de Rouché, comme tout à l'heure, on verrait que l'équation $f(z) = z^{n+k}$ possède $n+k$ racines à l'intérieur du cercle-unité et $n+k$ racines à l'extérieur de ce cercle, ce qui est impossible, car cette équation est de degré $2n$. Ainsi donc, la démonstration des théorèmes I et II est réduite à celle de l'impossibilité de l'équation (5) pour $|z|=1$.

Or, cette équation peut s'écrire, en posant (cf. la formule (3))

$$\frac{zN(z)}{D(z)} = e^{i\varphi}, \quad \varphi \text{ réel},$$

$$P(z) = (n+k)N(z) - zN'(z) + e^{i\varphi}D'(z) = 0.$$

Soit λ un nombre positif plus grand que 1; l'équation $(1-\lambda z)P(z) = 0$ pourra s'écrire

$$\begin{aligned}(n+k)a_n &+ [(n+k-1)a_{n-1} - \lambda(n+k)a_n]z \\ &+ [(n+k-2)a_{n-2} - \lambda(n+k-1)a_{n-1}]z^2 + \ldots + [2ka_k - \lambda(2k+1)a_{k+1}]z^{n-k} \\ &+ (1-\lambda z)e^{i\varphi}(a_{k+1} + 2a_{k+2}z + 3a_{k+3}z^2 + \ldots + (n-k)a_n z^{n-k-1}) = 2k\lambda a_k z^{n-k+1}.\end{aligned} \tag{6}$$

[6]) On pourrait aussi considérer les points $w = f(z)$ et $u = z^{n+k}$ comme parcourant la circonférence unité C lorsque z parcourt C dans le sens positif avec une vitesse constante. Les points w et u parcourent C dans le sens positif $(n-k)$ et $(n+k)$ fois respectivement. En vertu de (4), la vitesse de w est constamment inférieure a celle de u.

En vertu des hypothèses du théorème I les coefficients de $z, z^2, \ldots, z^{n-k}$ sont positifs si λ est assez voisin de 1; il en résulte que l'équation (6) est impossible pour $|z|=1$, si l'on a

$$(1-\lambda)[(n+k)a_n+(n+k-1)a_{n-1}+\ldots+(2k+1)a_{k+1}]$$
$$+(1+\lambda)[a_{k+1}+2a_{k+2}+3a_{k+3}+\ldots+(n-k)a_n]+2ka_k<2k\lambda a_k,$$

c'est-à-dire si

$$\lambda > \frac{2ka_k+(2k+2)a_{k+1}+\ldots+(2n-2)a_{n-1}+2na_n}{2k(a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n)}. \tag{7}$$

Cherchons un nombre $\lambda>1$, tel que si $a_s\geqslant\lambda a_{s+1}$ $(s=k,k+1,\ldots,n-1)$ l'inégalité (7) en résulte. Remarquons d'abord que la diminution d'un rapport a_s/a_{s+1} augmente le membre droit de (7); on l'établit aisément en posant $a_s/a_{s+1}=\lambda_s$ $(s=k,k+1,\ldots,n-1)$ et en différentiant le membre droit de (7) par rapport aux λ_s. Il suffit donc de considérer le cas où $a_s=\lambda a_{s+1}$ $(s=k,k+1,\ldots,n-1)$; l'inégalité (7) prend alors la forme

$$\lambda > \frac{2k\lambda^{n-k}+(2k+2)\lambda^{n-k-1}+\ldots+2n}{2k(\lambda^{n-k}+\lambda^{n-k-1}+\ldots+1)}$$

et peut s'écrire

$$[k(\lambda-1)^2-1]\lambda^{n-k+1}>k\lambda^2-(n+k+1)\lambda+n.$$

Or, pour $\lambda=1+1/\sqrt{k}$, le premier membre de cette inégalité est nul et le second négatif, donc l'inégalité (7) est bien vérifieé, et, par suite, l'égalité (6) est impossible, pourvu que les coefficients de $z,z^2,\ldots,z^{n-k}$ dans cette égalité soient positifs. En exprimant ce fait on obtient les conditions (A) du théorème I.

Pour établir le théorème II désignons par $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-k}$ les zéros du polynôme $N(z)=a_n+a_{n-1}z+\ldots+a_kz^{n-k}$ de la formule (3). On a $\alpha_i<0$ $(i=k,\ldots,n)$. D'après le théorème d'Enestörm-Kakeya tous ces zéros sont inférieurs à 1 en module. Les zéros du polynôme $D(z)=a_k+\ldots+a_nz^{n-k}$ sont $1/\alpha_1,1/\alpha_2,\ldots,1/\alpha_{n-k}$. Pour $|z|=1$ on a le développement

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{zN'(z)}{N(z)}-\frac{zD'(z)}{D(z)}=1+\left(z+\frac{1}{z}\right)\sum\alpha_i+\ldots+\left(z^p+\frac{1}{z^p}\right)\sum\alpha_i^p+\ldots$$

D'après l'hypothèse les sommes $\sum\alpha_i^p$ sont positives pour p pair, et négatives pour p impair. Il est donc clair que, lorsque z décrit la circonférence $|z|=1$, la fonction $zf'(z)/f(z)$ atteint la valeur maximum au point $z=-1$; par suite il suffit d'établir l'inégalité (4) en ce point. Or, pour $z=-1$ l'on a $N=(-1)^{n-k}D$, donc on est réduit aux inégalités

$$N'(-1)+D'(-1)<(n+k)D(-1)$$

lorsque $(n-k)$ est impair et

$$D'(-1)-N'(1)<(n+k)D(-1)$$

lorsque $(n-k)$ est pair. En effectuant les calculs on trouve que ces deux inégalités se réduisent à l'inégalité

$$ka_k-(k+1)a_{k+1}+\ldots\pm na_n>0$$

qui fait partie des inégalités (B) de l'énoncé II.

Occupons nous maintenant du théorème III. Je l'établirai d'abord dans le cas particulier, où $a_k=1/k,\ldots,a_n=1/n$. Posons $\Theta=\pi/2k$. Considérons les termes successifs du polynôme trigonométrique: il y a d'abord un groupe de k termes positifs, puis un terme nul, ensuite un groupe de $2k-1$ termes négatifs, un terme nul et un groupe de $2k-1$ termes positifs, et ainsi de suite. Pour établir que le polynôme est positif, il suffit de montrer que les valeurs absolues des sommes des termes de ces groupes forment une suite décroissante (on ne considère pas les termes nuls). En ce qui concerne les groupes à partir du troisième, cela résulte de suite de ce que l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les termes des deux groupes successifs, de manière que les sinus figurant dans ces termes aient la même valeur absolue. Il reste à établir que la somme des termes des deux premiers groupes est positive. Ce fait s'exprime par l'inégalité suivante

$$\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{3k}\right)+\sum_{p=1}^{k-1}\left[\frac{1}{k+p}-\left(\frac{1}{3k-p}+\frac{1}{3k+p}\right)\right]\sin\frac{(k+p)\pi}{2k}>0. \tag{8}$$

Les expressions entre les parenthèses carrées sont positives pour $p<p_0$ et négatives pour $p>p_0$ (l'on a $p_0=(\sqrt{12}-3)k$), et il est évident que, si $p'<p_0<p''$,

$$\sin\frac{(k+p')\pi}{2k}>\sin\frac{(k+p_0)\pi}{2k}>\sin\frac{(k+p'')\pi}{2k}.$$

On diminuera donc le membre gauche de (8) en remplaçant dans tous les sinus p par p_0 et en multipliant $(1/k-1/3k)$ par $\sin(k+p_0)\pi/2k$.

Après la suppression de ce facteur l'inégalité ainsi obtenue pourra s'écrire

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{4k-1};$$

or, cette inégalité résulte du fait que

$$\frac{1}{k+s}>\frac{1}{2k+2s+1}+\frac{1}{2k+2s+2}\qquad (s=0,1,\ldots,k-1).$$

Supposons la première assertion du théorème III inexacte. Comme le polynôme considéré est évidemment positif pour $\Theta>0$ et assez petit, ainsi que pour $\Theta=\pi/2k$, il devrait avoir un minimum négatif dans l'intervalle $0<\Theta<\pi/2k$. Je vais montrer que cela n'est pas possible. En calculant la dérivée du polynôme on trouve qu'au point Θ, où le minimum a lieu, on a

$$(*)\qquad \cos n\Theta(1-\cos\Theta)+\sin n\Theta\sin\Theta+\cos k\Theta-\cos(k-1)\Theta=0,$$

On voit de suite, moyennant des considérations géométriques, que pour $0<\Theta<\pi/k$ l'on a $\cos(k-1)\Theta-\cos k\Theta>1-\cos\Theta$; donc, a fortiori,

$$\cos(k-1)\Theta-\cos k\Theta>|\cos n\Theta|(1-\cos\Theta).$$

Le polynôme

$$\frac{\sin k\Theta}{k}+\ldots+\frac{\sin(n-1)\Theta}{n-1}$$

étant par hypothèse positif, on a, d'autre part, nécessairement $\sin n\Theta<0$ Le premier membre de l'égalité $(*)$ serait donc négatif; on arrive à une contradiction. Le théorème III est ainsi établi par induction dans le cas où $a_k=1/k,\ldots,a_n=1/n$. Pour l'établir dans le cas général, il suffit de remarquer que le polynôme (1) peut s'écrire, en posant

$$P_s=\frac{\sin k\Theta}{k}+\ldots+\frac{\sin s\Theta}{s}\qquad (s=k,k+1,\ldots,n).$$

$$b_nP_n+(b_{n-1}-b_n)P_{n-1}+\ldots+(b_k-b_{k+1})P_k,$$

où l'on a, en vertu des conditions (B'), $b_k\geqslant b_{k+1}\geqslant\ldots\geqslant b_n>0$.

Pour établir la deuxième assertion du théorème III, on suppose d'abord que $a_k=1/k,\ldots,a_n=1/n$. En posant $\theta=\pi/k$, on constate de suite que les valeurs absolues des sommes des termes appartenant aux groupes de même signe forment une suite décroissante et que le premier groupe est composé de termes négatifs. On étend comme auparavant ce résultat au cas général.

Publications citées

[1] J. Dieudonné, *La théorie analytique des polynômes d'une variable*, Mém. Sc. Math. 93 (1938).

[2] D. Jackson, *Über eine trigonometrische Summe*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), p. 257-262.

[3] M. Marden, *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*, Math. Surveys Nr 3 (1949).

[4] G. Pólya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin 1925.

[5] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 23 (1939).

[6] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne 5, Warszawa-Lwów 1935.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES