are real, independent and are of course solutions of (10). They are given by the formulas
\[ u^{m} = q^{m}(q^{m1} \cos y - q^{m2} \sin y), \]
\[ u^{n} = q^{n}(q^{n1} \cos y + q^{n2} \sin y), \]
where \( q = \text{mod}(a_1 + i a_2), y = \text{arg}(a_1 + i a_2) \) and \( q^{m1}, q^{n1}, q^{m2}, q^{n2} \) are vectors whose components are real and imaginary parts of components of the vector \( q^{m} \).

This result we can express by the following:

**Theorem II.** If the independent variable in (10) is real and the coefficients \( a_j \) are real numbers, then a real fundamental system of solutions can be obtained, and solutions of this fundamental system are of the form (14) or consist of pairs (15).

**References**


**Sur certaines fractions continues finies**

par J. Mikusiński (Wrocław)

1. Développons chacune des \( n-1 \) fractions
\[ \frac{1}{n} \frac{2}{n} \ldots \frac{n-1}{n} \]
en une fraction continue, et désignons par \( K(n) \) le plus grand nombre de termes dans les développements obtenus.

Par exemple, on a
\[ \frac{1}{7} = (7), \quad \frac{2}{7} = (3, 2), \quad \frac{3}{7} = (2, 3), \quad \frac{4}{7} = (1, 3), \quad \frac{5}{7} = (1, 2), \quad \frac{6}{7} = (1, 6). \]

Les plus longues des fractions continues précédentes contiennent 3 termes, on a donc
\[ K(7) = 3. \]

Le procédé ci-dessus détermine une fonction \( K(n) \) qui fait correspondre un nombre naturel \( K(n) \) à tout entier \( n \geq 2 \). Le but de cette note est de démontrer les inégalités
\[ \frac{1}{2a} < K(n) < \frac{1}{a} \quad (n = 2, 3, \ldots), \]
ou \( a = \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \).

2. Supposons que
\[ (a_1, \ldots, a_k) \quad (k = K(n), \quad a_k \geq 2) \]
soit le plus long des développements de \( 1/n, \ldots, (n-1)/n \) en fractions continues. Considérons encore la fraction continue
\[ (1, \ldots, 1, 2) \]

\(^1\) M. W. Urbański a fait remarquer cette fonction.
de même longueur que (2); la fraction ordinaire correspondante à la forme \( b_{\theta +1} b_{\theta +1} \), où \( b_{\theta} \) désigne généralement le \( \theta \)ème terme de la suite de Fibonacci

\[
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots
\]

Comme la suite (3) est majorée par (2), on a

\[
(4) \quad b_{k+1} \leq b_{k+1} \leq n.
\]

D'autre part, on sait que

\[
(5) \quad b_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^{k+1} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1},
\]

d'où

\[
(6) \quad b_{k+1} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} > 0.4 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1}.
\]

En vertu de (4), on a donc

\[
0.4 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{K(\theta+1)} < n,
\]

d'où

\[
K(\theta) < \frac{\log n - \log 2}{\log \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)} = 2 - \frac{\log n}{a}.
\]

La deuxième des inégalités (1) se trouve donc démontrée.

3. Remarquons maintenant que l'on a, quel que soit l'entier \( k \geq 3 \),

\[
\left| \frac{b_{k-1} - b_{k-2}}{b_{k}} \right| = \frac{1}{b_{k-1} b_{k}}.
\]

Il s'ensuit que, pour \( n > b_{k-1} b_{k} \), il existe un entier entre les nombres \( n b_{k-2} b_{k-1} \) et \( n b_{k-1} b_{k} \). Or, l'inégalité \( n > b_{k-1} b_{k} \) peut s'écrire

\[
\frac{1}{5} \left[ 1 - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} < n.
\]

Cette inégalité sera certainement satisfaite pour \( k \geq 3 \) lorsque

\[
\frac{1}{5} \left[ 1 + \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} < n,
\]

et d'autant plus lorsque

\[
0.225 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < n.
\]

La dernière inégalité équivaut à la suivante:

\[
k < \frac{\log n - \log 0.225 - 1}{2 \log \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)},
\]

qui est à fortiori satisfaite lorsque

\[
k = E \left( 1 + \frac{1}{2a} \log a \right),
\]

en désignant par \( E(x) \) l'entier de \( x \).

On peut vérifier aisément que, pour \( n \geq 7 \), la valeur de \( k \), donnée par la formule (6), est \( \geq 3 \). D'après ce qui vient d'être dit, on conclut qu'il existe, pour \( n \geq 7 \) et pour (6), au moins un entier \( m \) compris entre les nombres \( n b_{k-2} b_{k-1} \) et \( n b_{k-1} b_{k} \). La fraction \( m/n \) est donc comprise entre \( b_{k-2}/b_{k-1} \) et \( b_{k-1}/b_{k} \). Or, les développements de \( b_{k-2}/b_{k-1} \) et de \( b_{k-1}/b_{k} \) en fractions continues sont de la forme

\[
(1, \ldots, 1, 2),
\]

le premier contenant \( k - 2 \) termes et le second \( k - 1 \) termes. Il en résulte facilement que le développement de \( m/n \) commence par \( k - 1 \) unités et qu'il contient donc au moins \( k \) termes. On a ainsi \( K(n) = k \), ou, ce qui revient au même,

\[
\frac{1}{2a} \log n < K(n).
\]

La première des inégalités (1) se trouve donc démontrée pour \( n \geq 7 \). Il est facile de vérifier directement que cette inégalité est aussi vraie pour \( n = 5, 3, 4, 6 \).

Cela complète la démonstration de l'inégalité (1).
4. Comme le développement de $b_0/b_{k+1}$ se compose de $k-1$ unités et du nombre 2 à la fin, on a évidemment $K(b_{k+1}) = k$. Cela étant, on voit aisément, d'après (5), que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{K(b_{k+1})}{\log b_{k+1}} = \frac{1}{a}$$

et, par conséquent, que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{K(n)}{\log n} = \frac{1}{a}.$$

Quelle est la valeur de $\liminf_{n \to \infty} \frac{K(n)}{\log n}$ ? La réponse est plus difficile. L'auteur suppose que cette valeur est $1/2a$. 

Les manuscrits sont à expédier à l'adresse

ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW, Tomasz 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse

ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSAWA 10, Śniadeckich 8.

Le prix d'un fascicule est 2,50 $. Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de

KSIAŻKA i PRASA
WARSAWA 10, Koszykowa 31.