are real, independent and are of course solutions of (10). They are given by the formulas

$$u^{\mu\nu 1} = \varrho^x (q^{\mu\nu 1} \cos \psi x - q^{\mu\nu 2} \sin \psi x),$$
$$u^{\mu\nu 2} = \varrho^x (q^{\mu\nu 1} \cos \psi x + q^{\mu\nu 1} \sin \psi x),$$

where $\varrho = \mathrm{mod}(a_1 + ia_2)$, $\psi = \arg(a_1 + ia_2)$ and $q^{\mu\nu 1}, q^{\mu\nu 2}$ are vectors whose components are real and imaginary parts of components of the vector $g^{\mu\nu}$ [6]).

This result we can express by the following:

THEOREM II. *If the independent variable in* (10) *is real and the coefficients* a_{ij} *are real numbers, then a real fundamental system of solutions can be obtained, and solutions of this fundamental system are of the form* (14) *or consist of pairs* (15).

References

[1] E. Weyr, *O theorii forem bilinearných*, Spisy poctěné jubilejní cenou král. české spol. nauk, Praha 1889; reprinted under the title *Zur Theorie der bilinearen Formen*, Mh. Math. Physik 1 (1890), p. 163-236.

[2] L. Stickelberger, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig 1881.

[3] O. Perron, *Zur Theorie der Matrizes*, Math. Annalen 64 (1907), p. 248.

[4] J. Kaucký, *Quelques remarques sur les chaînes de Markoff*, Publ. Fac. sc. Univ. Masaryk 131 (1930).

[5] M. Kumorovitz, *Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants*, Annales Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 190-200.

[6] P. Funk, *Die linearen Differenzengleichungen*, Berlin 1920, p. 22.

Sur certaines fractions continues finies

par J. MIKUSIŃSKI (Wrocław)

1. Développons chacune des $n-1$ fractions

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

en une fraction continue, et désignons par $K(n)$ le plus grand nombre de termes dans les développements obtenus.

Par exemple, on a

$$\frac{1}{7} = (7), \quad \frac{2}{7} = (3,2), \quad \frac{3}{7} = (2,3), \quad \frac{4}{7} = (1,1,3), \quad \frac{5}{7} = (1,2,2), \quad \frac{6}{7} = (1,6).$$

Les plus longues des fractions continues précédentes contiennent 3 termes, on a donc

$$K(7) = 3.$$

Le procédé ci-dessus détermine une fonction[1]) qui fait correspondre un nombre naturel $K(n)$ à tout entier $n \geqslant 2$. Le but de cette note est de démontrer les inégalités

$$\frac{1}{2a} < \frac{K(n)}{\log n} < \frac{1}{a} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

où $a = \log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Supposons que

$$(a_1, \ldots, a_k) \qquad (k = K(n), \quad a_k \geqslant 2) \tag{2}$$

soit le plus long des développements de $1/n, \ldots, (n-1)/n$ en fractions continues. Considérons encore la fraction continue

$$(1, \ldots, 1, 2) \tag{3}$$

[1]) M. W. Urbański m'a fait remarquer cette fonction.

de même longueur que (2); la fraction ordinaire correspondante à la forme b_k/b_{k+1}, où b_k désigne généralement le $k^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci

$$1,2,3,5,8,13,\ldots$$

Comme la suite (3) est majorée par (2), on a

$$b_{K(n)+1}=b_{k+1}\leqslant n. \tag{4}$$

D'autre part, on sait que

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}, \end{aligned} \tag{5}$$

d'où

$$b_{k+1}\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{4}\right]\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}>0{,}4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}.$$

En vertu de (4), on a donc

$$0{,}4\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K(n)+2}<n,$$

d'où

$$K(n)<\frac{\log n+\log 2{,}5}{\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}-2<\frac{\log n}{a}.$$

La deuxième des inégalités (1) se trouve donc démontrée.

3. Remarquons maintenant que l'on a, quel que soit l'entier $k\geqslant 2$,

$$\left|\frac{b_{k-2}}{b_{k-1}}-\frac{b_{k-1}}{b_k}\right|=\frac{1}{b_{k-1}b_k}.$$

Il s'ensuit que, pour $n>b_{k-1}b_k$, il existe un entier entre les nombres nb_{k-2}/b_{k-1} et nb_{k-1}/b_k. Or, l'inégalité $n>b_{k-1}b_k$ peut s'écrire

$$\frac{1}{5}\left[1-\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]\left[1-\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}<n.$$

Cette inégalité sera certainement satisfaite pour $k\geqslant 2$ lorsque

$$\frac{1}{5}\left[1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}\right]^{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}<n,$$

et d'autant plus lorsque

$$0{,}225\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}<n.$$

La dernière inégalité équivaut à la suivante:

$$k<\frac{\log n-\log 0{,}225}{2\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{2},$$

qui est à fortiori satisfaite lorsque

$$k=\mathrm{E}\left(1+\frac{1}{2a}\log n\right), \tag{6}$$

en désignant par $\mathrm{E}(x)$ l'entier de x.

On peut vérifier aisément que, pour $n\geqslant 7$, la valeur de k, donnée par la formule (6), est $\geqslant 3$. D'après ce qui vient d'être dit, on conclut qu'il existe, pour $n\geqslant 7$ et pour (6), au moins un entier m compris entre les nombres nb_{k-2}/b_{k-1} et nb_{k-1}/b_k. La fraction m/n est donc comprise entre b_{k-2}/b_{k-1} et b_{k-1}/b_k. Or, les développements de b_{k-2}/b_{k-1} et de b_{k-1}/b_k en fractions continues sont de la forme

$$(1,\ldots,1,2),$$

le premier contenant $k-2$ termes et le second $k-1$ termes. Il en résulte facilement que le développement de m/n commence par $k-1$ unités et qu'il contient donc au moins k termes. On a ainsi $K(n)\geqslant k$, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{2a}\log n\leqslant K(n).$$

La première des inégalités (1) se trouve donc démontrée pour $n\geqslant 7$. Il est facile de vérifier directement que cette inégalité est aussi vraie pour $n=2,3,4,5,6$.

Cela complète la démonstration de l'inégalité (1).

4. Comme le développement de b_k/b_{k+1} se compose de $k-1$ unités et du nombre 2 à la fin, on a évidemment $K(b_{k+1})=k$. Cela étant, on voit aisément, d'après (5), que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{K(b_{k+1})}{\log b_{k+1}} = \frac{1}{a}$$

et, par conséquent, que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{K(n)}{\log n} = \frac{1}{a}.$$

Quelle est la valeur de $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{K(n)}{\log n}$? La reponse est plus difficile. L'auteur suppose que cette valeur est $1/2a$.

Les manuscrits sont à expedier à l'adresse
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW, Tomasza 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expedier à l'adresse
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10, Śniadeckich 8.

Le prix d'un fascicule est 2,50 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
KSIĄŻKA i PRASA
WARSZAWA 10, Koszykowa 31.