De ce résultat et de la relation (72) découle que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}} \Theta_1(x,h)=\frac{1}{2}, \tag{78}$$

puisque $\Theta(x,h)h\to 0$.

Si donc l'on pose

$$g(x,h)\overset{\mathrm{df}}{=}\Theta^2(1-\Theta_1)f''(x+(1-\Theta_1)\Theta_2\Theta h), \tag{79}$$

on aura

$$B(x,h)=h^3 g(x,h) \tag{80}$$

et, en vertu (74) et (78),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}} g(x,h)=\frac{1}{8}f''(0). \tag{81}$$

Les relations (68), (70), (80) et (81) donnent le résultat

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ h\to 0}}\frac{A(x,h)}{B(x,h)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

De là, en particulier,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m[L(x_n,h_n)]}{m[R(x_n,h_n)]}=\frac{2}{3},$$

ce qui est en contradiction avec ce qu'il a été établi plus haut. La démonstration de notre proposition est ainsi achevée.

Travaux cités

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Geometrie*, Berlin 1923.

[2] S. Gołąb, *Quelques propositions de la théorie des courbes planes et leures applications aux quadratures approchées*, Bull. Acad. Polon. Sc. (1951) Suppl. A 4, p. 349-358.

[3] G. H. Hardy, *A course of pure mathematics*, 4 ed., Cambridge 1925.

Sur la dérivée covariante des objets géométriques de deuxième classe

par S. Gołąb (Kraków)

On sait bien que l'on peut définir la notion de dérivée absolue (covariante) d'une quantité, c'est-à-dire d'un objet géométrique spécial de première classe (affineur et affineur-densité). Cette dérivée est un objet de même genre[1]), mais elle est construite au moyen d'un autre objet qui est de deuxième classe[2]). En généralisant cette construction, on peut se demander si l'on peut définir au moyen d'objets de troisième classe la dérivée covariante des objets de deuxième classe. Il est vrai que pour l'objet bien connu de deuxième classe, c'est-à-dire pour les paramètres de connexion linéaire, on peut définir un comitant différentiel, notamment l'affineur de courbure, mais on ne peut pas traiter cet affineur comme dérivée covariante de l'objet en question, parce que le genre de l'objet est tout à fait différent.

Le but de cette Note est de donner quelques contributions se rapportant à ce sujet. Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour un objet différentiel pur de deuxième classe à une composante dans l'espace à une dimension je démontre que dans le cas d'un pseudogroupe[3]) général on ne peut pas définir la notion de dérivée covariante d'un objet si l'on postule en même temps que cette dérivée doit être un objet de deuxième classe. Il existe toutefois la possibilité de définir cette notion si l'on se borne à certains sous-groupes du pseudogroupe.

Soit un espace X_1 à une dimension et le pseudogroupe de transformations de la coordonnée ξ d'un point variable

$$\bar{\xi}=\varphi(\xi), \tag{1}$$

où la fonction φ est de classe C_3 (l'existence des troisièmes derivées continues) et telle que

$$\varphi'(\xi)\neq 0. \tag{2}$$

---

[1]) Voir [1], p. 85. L'expression "the same kind" (le même genre) veut dire que la règle de transformation des composantes est la même.

[2]) Voir [2].

[3]) Voir [2].

Envisageons dans cet espace un champs d'objets géométriques de deuxième classe à une composante ω. La règle de transformation de la componsante ω, quand on passe à la coordonnée $\bar{\xi}$, est:

$$\bar{\omega}=\Lambda\left\{\frac{\lambda(\omega)}{\varphi'}-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\right\}\text{[4]}, \tag{3}$$

où λ désigne une fonction arbitraire inversible d'une variable indépendante et Λ est la fonction inverse de λ. Nous supposons que la fonction λ est de classe C_1.

Supposons en outre qu'il soit possible de définir pour le champ $\omega=\omega(\xi)$ la dérivée absolue $\Omega=D\omega$ et que $D\omega$ puisse être mis sous la forme

$$D\omega=\Phi(\omega,\omega',\mu), \tag{4}$$

où la fonction Φ ne dépend pas du système des coordonnées. Cela veut dire que dans le nouveau système des coordonnées $\bar{\xi}$ doit être vérifiée l'équation suivante

$$\bar{\Omega}=\bar{D}\omega=\Phi\left(\bar{\omega},\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\xi}},\bar{\mu}\right). \tag{5}$$

Dans cette équation μ est un paramètre dont la règle de transformation découlera d'une hypothèse additionnelle, à savoir que la dérivée $D\omega$ est aussi un objet de même genre, c'est-à-dire de deuxième classe. Quant à la fonction Φ, nous supposons qu'elle soit de classe C_1 et qu'elle dépende essentiellement de la seconde variable. Nous supposons notamment que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega'}\neq 0. \tag{6}$$

L'hypothèse que $D\omega$ soit un objet de deuxième classe s'exprime analytiquement comme il suit:

$$D\omega=F\left\{\frac{f(D\omega)}{\varphi'}-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\right\}. \tag{7}$$

où f est une fonction inversible, F la fonction inverse de f. On a donc

$$F\left\{\frac{f[\Phi(\omega,\omega',\mu)]}{\varphi'}-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\right\}=\Phi\left\{\Lambda\left[\frac{\lambda(\omega)}{\varphi'}-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\right],\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\xi}},\bar{\mu}\right\}.$$

[4]) Voir [3].

Or

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\xi}}=\frac{d\bar{\omega}}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}=\frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{d\bar{\omega}}{d\xi}$$

$$=\frac{1}{\varphi'}\cdot\Lambda'\left[\frac{\lambda(\omega)}{\varphi'}-\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\right]\cdot\left\{\frac{\varphi'\lambda'(\omega)\dfrac{d\omega}{d\xi}-\lambda(\omega)\varphi''}{\varphi'^2}-\frac{\varphi'\varphi'''-2\varphi'^2}{\varphi'^3}\right\}.$$

En posant

$$\varphi'=\alpha,\qquad \varphi''=\beta,\qquad \varphi'''=\gamma,\qquad \omega=x,\qquad \omega'=y, \tag{8}$$

on obtient

$$F\left\{\frac{f[\Phi(x,y,\mu)]}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha^2}\right\}$$
$$=\Phi\left\{\Lambda\left[\frac{\lambda(x)}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha^2}\right],\frac{1}{\alpha}\Lambda'\left[\frac{\lambda(x)}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha^2}\right]\left[\frac{\alpha\lambda'(x)y-\beta\lambda(x)}{\alpha^2}-\frac{\alpha\gamma-2\beta^2}{\alpha^3}\right],\bar{\mu}\right\}. \tag{9}$$

Cette équation doit être satisfaite pour tous les $\alpha\neq 0$, pour tous les β,γ; tous les x,y et pour tous les μ. Il en résulte que μ est un objet géométrique de troisième classe (à cause de l'intervention de la variable $\gamma=\varphi'''$ dans l'équation ci-dessus). On a, par conséquent,

$$\bar{\mu}=G\left\{\frac{g(\mu)}{\alpha^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^4}+\frac{\gamma}{\alpha^3}\right\}\text{[5]}, \tag{10}$$

où g est une fonction inversible, G est la fonction inverse de g.

Dans l'équation (9), λ est une fonction donnée, f,g des fonctions inconnues d'une variable et Φ une fonction inconnue de trois variables.

Posons dans l'équation (9), $\alpha=1$:

$$F\{f[\Phi(x,y,\mu)]-\beta\}$$
$$=\Phi\left\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],\Lambda'[\lambda(x)-\beta][\lambda'(x)y-\beta\lambda(x)-\gamma+2\beta^2],G\left[g(\mu)-\frac{3}{2}\beta^2+\gamma\right]\right\}. \tag{11}$$

Posons ensuite $\beta=0$ dans l'équation ci-dessus. En vertu des relations

$$F[f(u)]\equiv u,\qquad \Lambda[\lambda(x)]\equiv x,\qquad \Lambda'[\lambda(x)]\equiv\frac{1}{\lambda'(x)}$$

on conclut

$$\Phi(x,y,\mu)\equiv\Phi\left\{x,\frac{1}{\lambda'(x)}[\lambda'(x)y-\gamma],G[g(\mu)+\gamma]\right\}.$$

[5]) Voir [3].

Différentions cette identité par rapport à la variable γ. On a

$$0\equiv \Phi_2\left\{x,y-\frac{\gamma}{\lambda'(x)},G[g(\mu)+\gamma]\right\}\left\{-\frac{1}{\lambda'(x)}\right\} + \Phi_3\left\{x,y-\frac{\gamma}{\lambda'(x)},G[g(\mu)+\gamma]\right\}G'[g(\mu)+\gamma].$$

En posant ici $\gamma=0$, on en tire, en vertu des identités

$$G[g(\mu)]\equiv\mu,\qquad G'[g(\mu)]\equiv\frac{1}{g'(\mu)},$$

l'équation suivante

$$-\frac{1}{\lambda'(x)}\Phi_2(x,y,\mu)+\frac{1}{g'(\mu)}\Phi_3(x,y,\mu)=0. \tag{12}$$

Les équations des caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles ont la forme

$$\frac{dx}{0}=-\lambda'(x)\,dy=g'(\mu)\,d\mu,$$

d'où il résulte que l'intégrale générale de l'équation (12) a la forme

$$\Phi(x,y,\mu)=\Psi[x,y\lambda'(x)+g(\mu)], \tag{13}$$

où Ψ est une fonction arbitraire de classe C_1 de deux variables indépendantes.

Substituons ce résultat dans l'équation (11):

$$F\{f[\Psi(x,y\lambda'(x)+g(\mu))]-\beta\}$$
$$=\Psi\Big\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],\Lambda'[\lambda(x)-\beta][\lambda'(x)y-\beta\lambda(x)-\gamma+2\beta^2]\lambda'[\Lambda(\lambda(x)-\beta)] + g\left\{G\left[g(\mu)-\frac{3}{2}\beta^2+\gamma\right]\right\}\Big\}$$

ou bien, en raison de la relation $\Lambda'(\mu)\lambda'[\Lambda(\mu)]\equiv 1$,

$$F\{f[\Psi(x,y\lambda'(x)+g(\mu))]-\beta\}$$
$$\equiv\Psi\left\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],\lambda'(x)y-\beta\lambda(x)-\gamma+2\beta^2+g(\mu)-\frac{3}{2}\beta^2+\gamma\right\},$$

ce qui donne après réduction

$$F\{f[\Psi(x,y\lambda'(x)+g(\mu))]-\beta\}$$
$$\equiv\Psi\left\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],\lambda'(x)y-\beta\lambda(x)+\frac{\beta^2}{2}+g(\mu)\right\}. \tag{14}$$

En posant

$$z=y\lambda'(x)+g(\mu), \tag{15}$$

on obtient

$$F\{f[\Psi(x,z)]-\beta\}\equiv\Psi\left\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],z-\beta\lambda(x)+\frac{\beta^2}{2}\right\}.$$

En différentiant cette identité par rapport à β, on a

$$-F'\{f[\Psi(x,z)]-\beta\}=-\Psi_1\left\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],z-\beta\lambda(x)+\frac{\beta^2}{2}\right\}\Lambda'[\lambda(x)-\beta] + \Psi_2\left\{\Lambda[\lambda(x)-\beta],z-\beta\lambda(x)+\frac{\beta^2}{2}\right\}\{\beta-\lambda(x)\},$$

ce qui après la substitution $\beta=0$ donne:

$$-F'\{f[\Psi(x,z)]\}=-\frac{1}{\lambda'(x)}\Psi_1(x,z)-\lambda(x)\Psi_2(x,z). \tag{16}$$

L'équation précédente semble à premier coup d'oeil être difficile à intégrer puisque le premier membre de cette équation contient la deuxième fonction inconnue f. Mais si l'on considère pour un moment la fonction f (et, par conséquent, F) comme donnée, on intègre l'équation (16) en trouvant la solution générale sous la forme

$$\Psi(x,z)=F\left\{\lambda(x)+h\left[z-\frac{1}{2}\lambda^2(x)\right]\right\}, \tag{17}$$

où h est une fonction arbitraire de classe C_1 d'une variable indépendante.

En comparant la formule (13) avec (15) et (17), on obtient pour Φ la solution suivante

$$\Phi(x,y,\mu)=F\left\{\lambda(x)+h\left[y\lambda'(x)+g(\mu)-\frac{1}{2}\lambda^2(x)\right]\right\}. \tag{18}$$

En substituant le deuxième membre de (18) dans l'équation (11), on constate sans difficulté que, les fonctions f,g,h étant tout à fait arbitraires et inversibles, la fonction Φ, définie au moyen de la formule (18), satisfait à l'équation fonctionnelle (11).

Revenons maintenant à l'équation (9). En substituant (18) dans l'équation (11), on parvient, après quelques calculs et réductions qui sont omis, à l'équation suivante

$$ah\left[\frac{y\lambda'(x)-\frac{1}{2}\lambda^2(x)+g(\mu)}{a^2}\right]=h\left[y\lambda'(x)-\frac{1}{2}\lambda^2(x)+g(\mu)\right],$$

ce qui conduit à l'équation fonctionnelle suivante pour la fonction inconnue $h(u)$:

$$ah\left(\frac{u}{a^2}\right)\equiv h(u). \tag{19}$$

Il est évident que l'équation (19) conduit à une contradiction. On a, notamment, pour $a=-1$:

$$-h(u)\equiv h(u)$$

ce qui donne $h(u)\equiv 0$ et, par conséquent,

$$\Phi(x,y,\mu)=F[\lambda(x)]$$

contrairement à l'hypothèse (6). On a donc le résultat suivant:

En supposant le pseudogroupe général de transformations (2), *il est impossible de définir la dérivée absolue $D\omega$ du champ ω des objets de seconde classe de manière que $D\omega$ soit de la forme* (4) *et qu'en même temps $D\omega$ soit un objet de seconde classe.*

Si le groupe général se réduit au groupe unimodulaire ($a=1$), *la possibilité de la définition de la dérivée absolue existe et on peut la réaliser d'une infinité de manières possibles au moyen de la formule*:

$$D\omega(\xi)=F\left\{\lambda[\omega(\xi)]+h\left[\frac{d\omega}{d\xi}\lambda'[\omega(\xi)]-\frac{1}{2}\lambda^2[\omega(\xi)]+g(\mu)\right]\right\}, \tag{20}$$

où f,g,h sont des fonctions arbitraires, f,g étant inversibles; μ est un paramètre qui est un objet géométrique de troisième classe.

Supposons maintenant que le groupe général se réduise au sous-groupe $a>0$. Dans ce cas, l'équation (19) a des solutions, notamment

$$h(u)=C\sqrt{|u|}, \tag{21}$$

où C est une constante qui peut avoir des valeurs différentes pour les $u>0$ et pour les $u<0$.

La formule (18) se réduit dans le cas envisagé à la formule

$$\Phi(x,y,\mu)=F\left\{\lambda(x)+C\sqrt{\left|y\lambda'(x)+g(\mu)-\frac{1}{2}\lambda^2(x)\right|}\right\} \tag{22}$$

et la dérivée $D\omega$ est donc définie au moyen de la formule suivante

$$D\omega(\xi)=F\left\{\lambda[\omega(\xi)]+C\sqrt{\left|\frac{d\omega}{d\xi}\lambda'[\omega(\xi)]-\frac{1}{2}\lambda^2[\omega(\xi)]+g(\mu)\right|}\right\}. \tag{23}$$

Les fonctions f et g étant arbitraires, on obtient la formule la plus simple en posant

$$f(u)=u,\qquad g(u)=u,\qquad C=1. \tag{24}$$

Dans ce cas, on obtient

$$D\omega=\lambda(\omega)+\sqrt{\left|\frac{d\omega}{d\xi}\lambda'(\omega)-\frac{1}{2}\lambda^2(\omega)+\mu\right|}. \tag{25}$$

Le sousgroupe $a>0$ peut donc avoir la dérivée covariante $D\omega$ donnée par la formule (23) *la plus générale ou bien par la formule la plus simple* (25).

On voit que cette dérivée dépend du champ ω même, de la dérivée ordinaire $d\omega/d\xi$ du champ ω, de la fonction λ, au moyen de laquelle est définie la règle de transformation de la composante du champ, et du paramètre μ qui est un objet de troisième classe.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Remarque. Après avoir rédigé cette note j'ai pris connaissance d'un travail de M. N. N. Mihăileanu, *Objets géométriques en géométrie différentielle* (Studii Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Române Inst. Mat. 1 (1951), p. 318-373), où l'auteur en partant de l'objet ω le plus simple de deuxième classe $(\Lambda(u)=u)$ construit par l'intermédiaire de la dérivation un nouvel objet

$$\Omega=\frac{d\omega}{d\xi}-\frac{1}{2}\omega^2$$

qui est objet de troisième classe. Mais Ω étant d'un autre genre (ayant une autre règle de transformation de la composante) ne peut pas être nommé dérivée covariante de l'objet ω.

Travaux cités

[1] J. A. Schouten, *Tensoranalysis for Physicists*, Oxford 1951.

[2] — and J. Haantjes, *On the theory of the geometrical object*, Proc. London Math. Soc. 42 (1937), p. 356-376.

[3] S. Gołąb, *Sur la théorie des objets géométriques*, Ann. Soc. Pol. Math. 19 (1946), p. 7-35.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES