ACTA ARITHMETICA
XCV.1 (2000)

Majoration du premier zéro de la fonction zêta de Dedekind

par

Sami Omar (Talence)

1. Introduction et notations. Soit K un corps de nombres de degré n, de signature (r_1, r_2) et de discriminant d_K. Dans [Od], A. M. Odlyzko évoque le problème de savoir l'ordre de grandeur du premier zéro de la fonction zêta de Dedekind. Dans cette direction, une conjecture a été énoncée dans [To] qui dit que la hauteur du premier zéro est majorée par $C/\ln(|d_K|)$ où C est une constante positive qui ne dépend que de n. L'idée de cette dernière inégalité provient d'un théorème de densité (sous GRH) dû a S. Lang [La1]. Malgré les progrés numériques sur la question (voir [Om] et [To]), nous ne sommes toujours pas en mesure de confirmer expérimentalement cette conjecture. Cependant nous disposons d'un résultat théorique dû à A. Neugebauer [Ne1], [Ne2] qui montre que la hauteur du premier zéro est majorée par $C/\ln\ln\ln(|d_K|)$.

Dans ce qui suit nous donnerons une amélioration de cette inégalité qui sous (GRH) aboutit à la majoration $C/\ln\ln(|d_K|)$. L'outil crucial de la preuve, comme nous le verrons, sont les formules explicites de Weil.

Dans la suite, la notation $\ll$ réfère à une constante absolue alors que la notation $\ll_n$ réfère à une constante qui dépend uniquement de n.

2. Formules Explicites de Weil. Soit F une fonction réelle d'une variable réelle qu'on peut supposer paire et qui vérifie les conditions (A) et (B) suivantes [La2] :

(A) F est continue et continuement dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points a_i où $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ n'ont que des discontinuités de première espèce pour lesquelles F vérifie la condition de la moyenne (i.e. $F(a_i) = \frac{1}{2}(F(a_i+0) + F(a_i-0))$).

(B) Il existe $b > 0$ tel que $F(x)$ et $F'(x)$ sont des $O(e^{-(1/2+b)|x|})$ au voisinage de ∞.

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11R42.

La transformée de Mellin de F :

$$\Phi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{(s-1/2)x}\,dx$$

est alors holomorphe dans toute bande $-a\le\sigma\le 1+a$ où $0<a<b,\ a<1$ et on a le résultat dû à Weil [Po] :

Théorème 1 (Weil). *Soit F vérifiant les conditions* (A) *et* (B) *ci-dessus avec $F(0)=1$. Alors la somme $\sum\Phi(\varrho)$ étendue sur les zéros $\varrho=\beta+i\gamma$ non triviaux de $\zeta_K(s)$ avec $|\gamma|<T$ a une limite quand T tend vers l'infini et sa somme est donnée par la formule* :

$$\sum_{\varrho}\Phi(\varrho)=\Phi(0)+\Phi(1)-2\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\ln(N(\mathfrak{p}))}{N(\mathfrak{p})^{m/2}}F(m\ln(N(\mathfrak{p})))$$
$$+\ln(|d_K|)-n[\ln(2\pi)+\gamma+2\ln(2)]-r_1J(F)+nI(F)$$

avec

$$J(F)=\int_0^{\infty}\frac{F(x)}{2\,\mathrm{ch}(x/2)}\,dx,\qquad I(F)=\int_0^{\infty}\frac{1-F(x)}{2\,\mathrm{sh}(x/2)}\,dx$$

et $\gamma=0.57721566\ldots$ désigne la constante d'Euler.

Remarque. On a

$$\Phi(0)+\Phi(1)=4\int_0^{\infty}F(x)\,\mathrm{ch}(x/2)\,dx.$$

Si $\widehat{F}$ désigne la transformée de Fourier de F alors sous l'hypothèse de Riemann généralisée on a $\Phi(\varrho)=\widehat{F}(t)$ où $\varrho=1/2+it$.

3. Estimation du premier zéro de la fonction zêta de Dedekind. Dans un premier temps on cherche à majorer la multiplicité d'un éventuel zéro de la fonction zêta de Dedekind au point $1/2$ (cf. [Me] pour un résultat analogue sur les courbes elliptiques) :

Proposition 1. *Soit r la multiplicité d'un éventuel zéro de la fonction $\zeta_K(s)$ au point $1/2$. Alors on a la majoration*

$$r\ll\frac{\ln(|d_K|)}{\ln\ln(|d_K|)}.$$

Si on accepte la validité de la conjecture d'Artin sur la simplicité des zéros des séries L d'Artin [Mu-Mu], on voit que r est majoré par le nombre de caractères et ne dépend que de n.

Dans la preuve de la proposition 1, on suit une démarche similaire à celle de Ram Murty [Mu] qui donne une majoration de la multiplicité de $1/2$ comme zéro d'une série L de Dirichlet.

P r e u v e (de la proposition 1). Soit F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \le 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors F vérifie les conditions du théorème 1 et on a

$$\widehat{F}(u) = \left(\frac{2\sin(u/2)}{u}\right)^2.$$

Si on pose $F_T(x) = F(x/T)$ alors $\widehat{F}_T(u) = T\widehat{F}(Tu)$.

En appliquant maintenant les Formules Explicites à la fonction F_T, on obtient les inégalités

$$rT \le 4\int_0^T \operatorname{ch}(x/2)\,dx + \ln(|d_K|) + n\int_0^T \frac{x}{2T\operatorname{sh}(x/2)}\,dx,$$
$$rT \le e^{T/2} + \ln(|d_K|) + n.$$

Si on pose $T = 2\ln\ln(|d_K|)$, il s'ensuit que

$$r \le \frac{\ln(|d_K|)}{\ln\ln(|d_K|)} + \frac{n}{2\ln\ln(|d_K|)}.$$

Comme $n \ll \ln(|d_K|)$ (inégalité d'Odlyzko), on a $r \ll \ln(|d_K|)/\ln\ln(|d_K|)$.

THÉORÈME 2. *Soit h la hauteur du premier zéro différent de $1/2$ de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres K de discriminant d_K. Alors on a l'estimation*

$$h \ll_n \frac{1}{\ln\ln(|d_K|)}.$$

COROLLAIRE 1. *Si on prend une suite de corps de nombres pour lesquels n est fixe et d_K tend vers ∞ alors le premier zéro tend vers $1/2$.*

Pour démontrer le théorème 2, on a besoin de trois lemmes :

LEMME 1. *Soit F la fonction paire à support compact définie sur $[0,\infty]$ par*

$$F(x) = \begin{cases} (1-x)\cos(\pi x) + \frac{3}{\pi}\sin(\pi x) & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors F vérifie les conditions du théorème 1 et

$$\widehat{F}(u) = \left(2 - \frac{u^2}{\pi^2}\right)\left[\frac{2\pi}{\pi^2 - u^2}\cos(u/2)\right]^2.$$

P r e u v e. On pourra vérifier que $F(x)$ s'écrit en termes de la fonction d'Odlyzko G [Po] et de sa dérivée seconde. En effet $F(x) = 2G(x) + \frac{1}{\pi^2}G''(x)$.

LEMME 2. *Si on pose $F_T(x) = F(x/T)$ avec F comme au lemme 1 alors on a l'estimation suivante de la somme sur les idéaux premiers :*

$$\left|\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\ln(N(\mathfrak{p}))}{N(\mathfrak{p})^{m/2}} F_T(m\ln(N(\mathfrak{p})))\right| \ll n^2 e^{T/2}. \tag{1}$$

P r e u v e. On a

$$\left|\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\ln(N(\mathfrak{p}))}{N(\mathfrak{p})^{m/2}} F_T(m\ln(N(\mathfrak{p})))\right| \le 2 \sum_{N(\mathfrak{p})^m \le e^T} \frac{\ln(N(\mathfrak{p}))}{N(\mathfrak{p})^{m/2}} \le 2n^2 \sum_{p^m \le e^T} \frac{\ln(p)}{p^{m/2}}.$$

On introduit d'une manière naturelle les fonctions arithmétiques $\Lambda(n)$ de Mangoldt et $\Psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$ de Chebyshev. On réécrit alors la dernière somme :

$$\sum_{p^m \le e^T} \frac{\ln(p)}{p^{m/2}} = \sum_{n \le e^T} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} = \int_1^{e^T} \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\Psi(x).$$

Une intégration par parties de cette dernière intégrale donne

$$\int_1^{e^T} \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\Psi(x) = \frac{\Psi(e^T)}{e^{T/2}} + \frac{1}{2}\int_1^{e^T} \frac{\Psi(x)}{x^{3/2}}\, dx.$$

Or on sait que d'après le théorème de Shapiro [Ap] on a $\Psi(x) \ll x$, ce qui montre que

$$\sum_{p^m \le e^T} \frac{\ln(p)}{p^{m/2}} \ll e^{T/2}.$$

LEMME 3. *Soient A, B, C trois constantes réelles positives vérifiant $C > 2B$. Si $T > 0$ vérifie $AT + Be^{T/2} \ge C$, alors*

$$T \ge \varepsilon \ln(C), \quad \text{où} \quad \varepsilon = \min\left(\frac{C}{2A\ln(C)}, \frac{2\ln(C/(2B))}{\ln(C)}\right).$$

P r e u v e. Par l'absurde.

Preuve du théorème 2. On applique cette fois-ci les Formules Explicites à la fonction $F_T(x) = F(x/T)$ où F est la fonction définie dans le lemme 1 ; et on pose $T = \sqrt{2}\pi/h$ où h est la hauteur du premier zéro différent de 1/2 de la fonction $\zeta_K(s)$. On obtient alors l'inégalité

$$\begin{aligned}\frac{8}{\pi^2} rT \ge \Phi_T(0) + \Phi_T(1) - 2\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\ln(N(\mathfrak{p}))}{N(\mathfrak{p})^{m/2}} F_T(m\ln(N(\mathfrak{p})))\\ + \ln(|d_K|) - n\,[\ln(2\pi) + \gamma + 2\ln(2)] - r_1 J(F_T) + nI(F_T)\end{aligned} \tag{2}$$

il est facile de vérifier que

$$|\Phi_T(0) + \Phi_T(1)| \ll e^{T/2}$$

et que les intégrales $J(F_T)$ et $I(F_T)$ sont bornées quand T est grand. En se servant maintenant du lemme 2, l'inégalité (2) donne alors une inégalité comme celle du lemme 3 avec

$$A = c_1 \frac{\ln(|d_K|)}{\ln\ln(|d_K|)}, \qquad C = \ln(|d_K|),$$

où c_1 est tel que $r < c_1 \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\ln(|d_K|)}{\ln\ln(|d_K|)}$ (ceci est assuré grâce à la proposition 1).

Finalement avec les constantes ci-dessus, on obtient

$$\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2c_1}, 1 - \frac{\ln(2B)}{\ln\ln(|d_K|)}\right),$$

et le résultat du théorème 2 découle facilement du lemme 3.

Références

[Ap] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[La1] S. Lang, *On the zeta function of number fields*, Invent. Math. 12 (1971), 337–345.

[La2] —, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1968.

[Me] J.-F. Mestre, *Courbes elliptiques et formules explicites*, dans : Seminar on Number Theory, Paris, 1981–82, Progr. Math. 38, Birkhäuser, 1983, 179–187.

[Mu] M. R. Murty, *Simple zeros of L-functions*, dans : Number Theory, R. Mollin (ed.), de Gruyter, 1989, 427–439.

[Mu-Mu] M. R. Murty and V. K. Murty, *Non-vanishing of L-Functions and Applications*, Birkhäuser, 1997.

[Ne1] A. Neugebauer, *On the zeros of the Dedekind zeta function near the real axis*, Funct. Approx. Comment. Math. 16 (1988), 165–167.

[Ne2] —, *On zeros of zeta functions in low rectangles in the critical strip*, Ph.D. thesis, A. Mickiewicz University, Poznań, Poland, 1985.

[Od] A. M. Odlyzko, *Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions: A survey of recent results*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux 2 (1990), 119–141.

[Om] S. Omar, *Localization of the first zero of the Dedekind zeta function*, Math. Comp., à paraître.

[Po] G. Poitou, *Sur les petits discriminants*, Sém. Delange–Pisot–Poitou, 18e année, 1976/77, no. 6.

[To] E. Tollis, *Zeros of Dedekind zeta functions in the critical strip*, Math. Comp. 66 (1997), 1295–1321.

Laboratoire d'Algorithmique Arithmétique
Université Bordeaux I
351 cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex, France
E-mail: omar@math.u-bordeaux.fr

Reçu le 21.9.1999
et révisé le 27.12.1999 (3688)