From (7.3) we have then $\varepsilon_1 < 1$, $\eta_1 = \eta\sqrt{\frac{4n}{3}}/Q < 1$ and by (7.19) the condition (7.8) is satisfied, so that the Lemmata 7, 8 and 9 can be applied, while

$$q < \frac{2Q}{\eta\varepsilon^n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{3}{4}}^{n+1} = \frac{2}{\eta\varepsilon^n}\left(\sqrt{3n}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{3}{4}}^{n+1} = \frac{2}{\eta\varepsilon^n}\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{\eta\varepsilon^n},$$

$$q < \frac{3}{\eta\varepsilon^n}, \quad 0 < g \leqslant q < \frac{3}{\eta\varepsilon^n}. \tag{7.24}$$

We have therefore in the formula (7.18) of the Lemma 9, by the first inequality in (7.19),

$$\frac{1}{\varepsilon}|P, g\pi + \Gamma_1| \leqslant \frac{Q_0}{Q} + \sqrt{\frac{4n}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{n},$$

and (7.5) follows. The Theorem 4 is proved.

References

[1] J. W. S. Cassels, *An introduction to the Geometry of Numbers*, Berlin 1959.

[2] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin 1936.

[3] E. Landau, *Ueber Diophantische Approximationen*, Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum, 1923.

[4] L. H. Thomas, *An extended form of Kronecker's Theorem with an application which shows that Burger's Theorem on adiabatic invariants is statistically true for an assembly*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 22 (1925), pp. 886-903.

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1964

ACTA ARITHMETICA
IX (1964)

Remarks on two theorems of Siegel

by

S. Chowla (University Park, Pa.)

Dedicated to L. J. Mordell

1. Siegel found that for $n \geqslant 3$ the number of solutions of

$$ax^n - by^n = c$$

(i) does not exceed 1 if $|ab|$ exceeds a certain limit depending on c and n alone [1],

(ii) does not exceed 75 if $c = 1$ [2].

Assuming a certain conjecture (Conjecture C below) we shall reduce 75 to 2 in (ii), provided $n \geqslant 1$ (in fact, even when $c \neq 1$). As for (i) we obtain the result (i) without the restriction that "$|ab|$ should exceed a certain limit depending on c and n" but at the cost of replacing 1 by 2, and again demand $n \geqslant 7$.

The hypothesis is as follows:

Conjecture C. *The equation (where n is a fixed position integer $\geqslant 3$)*

$$\sum_{m=1}^{n-1} \pm X_m^n = 0$$

is impossible in positive integers X_m, unless it is trivially possible (i.e. by "cancellation").

Both our results concerning (i) and (ii) are covered by the

Theorem. *Suppose Conjecture C is true. Then*

$$ax^n - by^n = C \tag{1}$$

has at most 2 solutions for $n \geqslant 7$.

[1] Abh. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1929, 1-70, p. 70.

[2] According to Erdös, Proc. Boulder No. Theory Conference, 1958, p. 238, Siegel's proof was never published.

Proof. Assume 3 solutions:

$$x = x_m, \quad y = y_m \quad (1 \leqslant m \leqslant 3).$$

Substituting in (1), and eliminating a, b, c we get

$$\begin{vmatrix} x_1^n & y_1^n & 1 \\ x_2^n & y_2^n & 1 \\ x_3^n & y_3^n & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

which is impossible for $n \geqslant 7$ by Conjecture C, q.e.d.

Reçu par la Rédaction le 7. 2. 1964

ACTA ARITHMETICA
IX (1964)

Über den Klassenkörper zum quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante —47

von

H. Hasse (Hamburg)

Prof. L. J. Mordell
zum 75. Geburtstag gewidmet

Unter den imaginär-quadratischen Zahlkörpern $\Omega = \mathbf{P}(\sqrt{d})$ mit Primzahldiskriminanten $d = -p$ $(\equiv 1 \bmod 4)$ und dann ungerader Klassenzahl h sind die ersten Fälle mit $h > 1$ bekanntlich:

$$d = -23 \quad \text{mit} \quad h = 3,$$
$$d = -31 \quad \text{mit} \quad h = 3,$$
$$d = -47 \quad \text{mit} \quad h = 5.$$

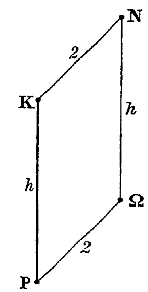

Fig. 1 [1]

Allgemein ist der Klassenkörper $\mathbf{N}$ von Ω normal über dem rationalen Zahlkörper $\mathbf{P}$, mit Diedergruppe der Ordnung $2h$. Dem zyklischen Normalteiler der Ordnung h ist der quadratische Teilkörper Ω zugeordnet. Für die h konjugierten Untergruppen der Ordnung 2 haben die zugeordneten Teilkörper $\mathbf{K}$ über $\mathbf{P}$ den Grad h, und einer von ihnen ist als der größte reelle Teilkörper von $\mathbf{N}$ gekennzeichnet.

Während es in den beiden Fällen $d = -23$ und $d = -31$ leicht ist, den so definierten Zahlkörper $\mathbf{K}$ vom Grade $h = 3$ explizit in einer arithmetisch-kanonischen Erzeugung anzugeben, ist diese Aufgabe im Falle $d = -47$, wo $\mathbf{K}$ den Grad 5 hat, bisher nur durch aus der Transformationstheorie der Modulfunktionen fließende Gleichungen (sogen. Modulargleichungen) gelöst,

---

(1) Die fette Linie deutet eine nicht-normale Erweiterung mit h verschiedenen Konjugierten an; die dünnen Linien stellen normale Erweiterungen dar. Entsprechendes gilt auch für die beiden späteren Figuren.