ACTA ARITHMETICA
IX (1964)

Trigonometrische Interpolation bei Funktionen von mehreren Variablen

von

E. Hlawka (Wien)

Herrn Professor L. J. Mordell
zum 75. Geburtstag

Es sei Γ_0 ein Gitter im R^s, $\bar{F}(\Gamma_0)$ sei ein Fundamentalbereich von Γ_0. Es sei Γ_0' das polare Gitter von Γ_0. Es sei nun weiter $f(v)$ eine periodische Funktion mit Γ_0 als Periodengitter.

Es sei nun N eine beliebige natürliche Zahl und wir suchen ein trigonometrisches Polynom, welches an N Stellen $\beta_1, \ldots, \beta_N$ mit $f(v)$ übereinstimmt. Es sollen die $\beta \bmod \Gamma_0$ eine Gruppe bilden. Dann ist $\cup(\Gamma_0+\beta_j)$ eine Obergruppe Γ von Γ_0. Es sei Γ' das polare Gitter zu Γ. Man kann sich, prinzipiell gesehen, immer auf den Fall beschränken, daß N eine Primzahl ist, da ja $\Gamma \bmod \Gamma_0$ eine auflösbare Gruppe ist. Man zeigt leicht, daß das Polynom

$$I(f, v, F') = \frac{1}{N}\sum_j f(\beta_j)\sum_{e'} \exp\big(e'(v-\beta_j)\big) \qquad (\exp\alpha = e^{2\pi i\alpha})$$

das gewünschte Interpolationspolynom ist, wobei die Summe erstreckt wird über alle Gitterpunkte $e'\epsilon\Gamma_0'$, welche in $\bar{F}(\Gamma')$ liegen. Wir nennen allgemein jedes Polynom $\sum_{e'} c(e')\exp(e'v)$ ein *Polynom erster Ordnung in bezug auf* F' $(e'\epsilon\Gamma_0', e'\epsilon\bar{F}(\Gamma'))$. Setzen wir $\Delta = \sup_v |I(fv)-f(v)|$, dann werden wir zeigen

$$\Delta \leqslant E(f, \Gamma')(\Lambda+1),$$

wobei $E = \inf_T \sup_v |f(v)-T(v)|$ erstreckt über alle T von der Ordnung 1. Ist nun N ungerade, dann können wir zeigen (Satz 3)

$$\Lambda < \big(6(1+\log N)\big)^s.$$

Dabei ist der Fundamentalbereich F' von Γ' noch beliebig gewählt.

Nun gehen wir vom affinen zum metrischen Standpunkt über. Es sei $\varphi(x)$ eine konvexe Distanzfunktion, φ' die dazu polare Distanzfunktion. Dann gibt es ein F', so daß

$$E(f, \Gamma') \leqslant 20^s \omega(f, B_1),$$

wobei $\omega(f, B_1) = \sup|f(x)-f(y)|$, $x-y \in B_1$, wo B_1: $\varphi(x) \leqslant s!s^2 / M_1'$, M_1' das erste Minimum von φ' in Bezug auf Γ' ist.

Wir verwenden zum Beweis dieser Sätze Methoden, wie sie von C. L. Siegel [1] und von L. J. Mordell [2] beim analytischen Beweis des Minkowskischen Linearformensatz entwickelt wurden (1).

§ 1. Es sei Γ_0 ein Gitter im R^s. Die Gitterpunkte sollen mit e bezeichnet werden. Es sei $d(\Gamma_0)$ die Determinante des Gitters. $\overline{F}(\Gamma_0)$ sei ein Fundamentalbereich von Γ_0 und mit $F(\Gamma_0)$ bezeichnen wir stets das Innere des Fundamentalbereiches. Bilden $e_1, \ldots, e_s$ eine Basis des Gitters Γ_0, so ist

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_s e_s, \quad -\tfrac{1}{2} < \lambda_j \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, s$$

ein solcher Fundamentalbereich. Γ_0' sei das polare Gitter zu Γ_0. Die Gitterpunkte von ihm bezeichnen wir stets mit e'. Bekanntlich ist Γ_0' die Menge aller Punkte e' des R^s, für die $e'e$ für alle e stets eine ganze rationale Zahl ist. (Unter xy, wenn x und y Punkte aus R^s sind, verstehen wir stets das skalare Produkt.)

Wir betrachten nun stets Funktionen $f(v)$, definiert auf R^s, welche Γ_0 als Periodengitter besitzen, dh. es ist für alle e $f(v+e) = f(v)$. Ein Beispiel dafür bilden die Funktionen $\exp(e'v)$. Unter einen *trigonometrischen Polynom* verstehen wir eine Summe $\sum c(e')\exp(e'v)$, wo die e' eine Menge $M \subset \Gamma_0'$ durchlaufen. Wir suchen nun solche trigonometrischen Polynome, welche an vorgegebenen N verschiedenen Stellen $(N \geqslant 1)$ $\beta_1, \ldots, \beta_N$ in $F(\Gamma_0)$ mit $f(v)$ übereinstimmt.

Wir wollen nun gleich eine wichtige Voraussetzung machen: Die $\beta_1, \ldots, \beta_N$ sollen $\bmod \Gamma_0$ eine Gruppe bilden, dh. folgendes: Für beliebiges i und j soll stets $\beta_i - \beta_j \bmod \Gamma_0$ unter den $\beta_1, \ldots, \beta_N$ vorkommen; dabei bedeutet in üblicher Weise $\alpha \equiv \beta \pmod{\Gamma_0}$, daß $\alpha - \beta$ in Γ_0 liegt. Dann bildet $\bigcup_j (\Gamma_0 + \beta_j)$ eine Obergruppe Γ von Γ_0 und es ist natürlich $N\Gamma \subset \Gamma_0$. Wir wollen die Gitterpunkte von Γ stets mit b bezeichnen. Es ist $d(\Gamma_0) = Nd(\Gamma)$.

Das polare Gitter von Γ bezeichnen wir mit Γ'. Es ist Γ' Teilgitter von Γ_0' und $d(\Gamma') = Nd(\Gamma_0')$.

(1) Der Inhalt dieser Arbeit wurde Zuerst in Brenkelen 1962 und in der Göttinger Mathem. Gesellschaft. Sept. 1963 vorgetragen.

Jeder Fundamentalbereich $\overline{F}' = \overline{F}(\Gamma')$ von Γ' enthält N inkongruente Gitterpunkte von Γ_0', sagen wir $e_1', \ldots, e_N'$. Wir setzen nun

$$T(v) = \sum c(e')\exp(e'v) \qquad (e' \in \overline{F}') \tag{1}$$

und nennen ein solches *Polynom erster Ordnung in bezug auf* $\overline{F}(\Gamma')$. Dieses Polynom besitzt N Koeffizienten. Man kann erwarten, daß man die $c(e')$ so wählen kann, daß für die Stellen $\beta_1, \ldots, \beta_N$, $T(\beta_j) = f(B_j)$ ist.

Zunächst ist für jedes Polynom aus (1)

$$Nc(e') = \sum_{i=1}^{N} T(\beta_i)\exp(-e'\beta_i). \tag{2}$$

Dazu bemerken wir, daß

$$\sum_{i=1}^{N} \exp(e'\beta_i) = \begin{cases} N, & \text{wenn } e' \equiv 0 \pmod{\Gamma'}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerken wir gleich, daß auch umgekehrt

$$\sum_{i=1}^{N} \exp(e_i'\beta) = \begin{cases} N, & \text{wenn } \beta \equiv 0 \pmod{\Gamma_0}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist selbstverständlich, denn es ist $\chi(e', \beta) = \exp(e'\beta)$ für festes e' nichts anderes als ein Charakter der Faktorgruppe Γ/Γ_0 bzw. bei festem β ein Charakter von Γ_0'/Γ'. Allerdings lassen sich diese Relationen auch leicht rechnerisch nachweisen.

Nun zum Beweis von (2). Es ist

$$T(\beta) = \sum c(e')\exp(e'\beta)$$

also

$$\sum_{i=1}^{N} T(\beta_i)\exp(-e'\beta_i) = \sum c(e_1') \sum_{i=1}^{N} \exp\big((e_1'-e')\beta_i\big) = Nc(e').$$

Soll nun $T(\beta_i) = f(\beta_i)$ sein, so erhalten wir

$$Nc(e') = \sum_{i=1}^{N} f(\beta_i)\exp(-e'\beta_i).$$

Also erhalten wir

$$I(f, v, F') = \sum_{i=1}^{N} f(\beta_i)t(v, \beta_i, F'), \tag{3}$$

wo

$$Nt(v,\beta_i,F') = \sum \exp\big(e'(v-\beta_i)\big) \qquad (e'\in \bar{F}'). \tag{4}$$

Bemerkung: Da $f(v+e) = f(v)$, so können die β_i in dieser Formel durch beliebige $b \equiv \beta_i \pmod{\Gamma_0}$ ersetzt werden. Es ist nun tatsächlich $I(\beta_j) = f(\beta_j)$, denn

$$Nt(\beta_j,\beta_i) = \sum \exp\big(e'(\beta_j-\beta_i)\big) = \begin{cases} N, & \text{wenn } \beta_i = \beta_j, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

§ 2. Es seien nun zwei Beispiele betrachtet.

1. Γ_0 ist das Einheitsgitter, dh. alle Gitterpunkte e haben die Gestalt $(l_1,\ldots,l_s)$, l ganze rationale Zahl. Dann ist $\Gamma_0 = \Gamma_0'$ und $F(\Gamma_0)$ der Einheitswürfel. Es seien weiter $n_1,\ldots,n_s$ natürliche Zahlen und Γ die Menge aller Punkte $(l_1/n_1,\ldots,l_s/n_s)$, dann ist $N = n_1n_2\ldots n_s$ und Γ' die Menge aller Punkte $(l_1n_1,\ldots,l_sn_s)$.

2. Es sei wieder Γ_0 das Einheitsgitter. Es sei nun p eine ungerade Primzahl, $g_1,\ldots,g_s$ beliebige ganze Zahlen mit $0 \leqslant g_i < p$ und g_i' $(i = 1,\ldots,s-1)$ ganze Zahlen mit $g_i'g_s+g_i \equiv 0 \pmod{p}$, dann sei Γ die Menge aller Punkte

$$(l_1-l_sg_1'/p,\ldots,l_{s-1}-l_sg_{s-1}'/p,\ l_s/p).$$

Die inkongruenten Punkte mod Γ_0 haben die Gestalt

$$(kg_1,\ldots,kg_s)/p, \qquad 0 \leqslant k < p.$$

Es gibt nämlich zu beliebigem l_s stets ein k so, daß $l_s \equiv kg_s \pmod{p}$. Also ist für jedes i

$$g_i'l_s \equiv kg_sg_i' \equiv -g_i \pmod{p}.$$

Also ist in diesem Fall

$$I = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{kg_1}{p},\ldots,\frac{kg_s}{p}\right) t.$$

Es liegen also die Interpolationspunkte mod Γ_0 auf einer Geraden. Sie sind Vielfache von $(g_1,\ldots,g_s)/p$.

Begrifflich ist dies klar, da die Ordnung von Γ/Γ_0 gleich p ist, also die Gruppe zyklisch ist. Γ' hat die Gestalt

$$(l_1,\ldots,l_{s-1},\ l_1g_1'+\ldots+l_{s-1}g_{s-1}'+pm_s).$$

Jeder Gitterpunkt $(h_1,\ldots,h_s)$ von Γ_0, ist $\equiv (0,\ldots,0,k) \pmod{\Gamma'}$ $(0 \leqslant k < p)$, denn es gibt stets ein k so, daß $h_s-(h_1g_1'+\ldots+h_{s-1}g_{s-1}') \equiv k \pmod{p}$.

§ 3. Wir stellen fest, daß für jedes Polynom T von der Ordnung 1

$$I(T) = T.$$

Wir setzen nun weiter

$$\sup_v |f(v)| = \|f\| \qquad (v\in R^s),$$

wobei wir voraussetzen, daß $f(v)$ stetig ist.

Weiter setzen wir (dv Volumselement)

$$\int_{F_0} f^2\,dv = d(\Gamma_0)\,|||f|||^2.$$

Zunächst sieht man sofort, daß

$$|I(f,v)| \leqslant \|f\|\lambda(v), \qquad \lambda(v) = \sum_i |t(v,\beta_i)|.$$

Wir gehen so vor wie in den bekannten Überlegungen von Lebesgue und Faber im eindimensionalen Fall [3]. Wir betrachten alle Polynome T von der Ordnung 1 und setzen

$$E(f) = \inf \Delta(T), \qquad \Delta(T) = \|f-T(f)\|,$$

dann gibt es ein T_0 so daß $E(f) = \Delta(T_0)$; es gibt nämlich eine Folge T_m mit $\lim \Delta(T_m) = E(f)$, nun ist $\|T_m\| \leqslant \|T_m-f\|+\|f\|$.

Daraus folgt für die Koeffizienten der Polynome T_m, daß sie unter einen festen Schranke liegen.

Daraus folgt, daß es eine Teilfolge (m) gibt, so daß $\lim\limits_{(m)} T_m = T_0$ gleichmäßig in v, also

$$E(f) \leqslant \|f-T_0\| \leqslant \|f-T_m\|+\|T_m-T_0\|, \qquad \text{also} \qquad E(f) = \Delta(T_0).$$

Es ist nun

$$|I(f,v)-f(v)| \leqslant |I(f)-I(T_0)|+|I(T_0)-f(v)|;$$

da

$$I(f)-I(T_0) = I(f-T_0), \qquad I(T_0) = T_0$$

so ist

$$|I(f)-I(T_0)| \leqslant \|f-T_0\|\lambda(v).$$

Wir setzen nun $\Lambda = \sup\lambda(v)$ (Lebesgue'sche Konstante), dann erhalten wir

$$\|I(f)-f\| \leqslant E(f)\Lambda+E(f) = E(f)(\Lambda+1).$$

Es bleibt also nur übrig $E(f)$ und Λ abzuschätzen.

Wir wollen noch kurz betrachten $|||I(f)-f|||$, dazu beachten wir, daß die $t(v,b)$, $b\in\Gamma_0$, ein orthogonales System auf $F_0 = F(\Gamma_0)$ bilden.

Es ist

$$\int_{F_0} t(v, b)t(v, b_1)dv = \begin{cases} d(\Gamma), & \text{wenn} \quad b \equiv b_1 \pmod{\Gamma_0}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

da

$$N^2\int t(v, b)t(v, b_1)dv = \sum_{e, e_1'} \int \exp\big(e'(v-b)e_1'(v-b_1)\big)dv$$

$$= d(\Gamma_0)\sum_{e'} \exp e'(b-b_1),$$

dabei wurde benützt, daß

$$\int_{F_0} \exp(e'v)dv = \begin{cases} d(\Gamma_0), & \text{wenn} \quad e' \equiv 0 \pmod{\Gamma_0}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Es sei nun wieder T_0 das Polynom mit $\Delta(T_0) = E(f)$. Da $I(T_0) = T_0$ so ist

$$\int \big(I(v)-T_0(v)\big)^2 dv = \sum \big(f(\beta)-T_0(\beta)\big)^2 \int t^2(v, \beta)dv,$$

also

$$|||I-T_0|||^2 \leqslant NE^2(f)d(\Gamma)/d(\Gamma_0) = E^2(f).$$

Weiter ist $|||T_0-f||| \leqslant E(f)$ und $|||I-f||| \leqslant |||I-T_0|||+|||T_0-f|||$, also ist

$$|||I-f||| \leqslant 2E(f).$$

Um nun die Abschätzungen durchzuführen, betrachten wir

(5) $$Nt(v, b, F') = \sum \exp\big(e'(v-b)\big) \quad (e' \in \overline{F}'),$$

gleich allgemeiner

(6) $$S(u) = \sum \exp(e'u) \quad (e' \in \overline{F}').$$

Es werde nun N ungerade vorausgesetzt, und es sei $\overline{F}'$ gegeben durch $x = \lambda_1 b_1' + \ldots + \lambda_s b_s'$, $-\frac{1}{2} < \lambda_j \leqslant \frac{1}{2}$. Es seien nun die $b_1, \ldots, b_s$ eine Basis von Γ dual zu $b_1', \ldots, b_s'$, also $b_i b_k' = \delta_{ik}$ dann schreibt sich auch $\overline{F}$ in folgender Form:

$$-\tfrac{1}{2} < xb_i \leqslant \tfrac{1}{2} \quad (i = 1, \ldots, s);$$

es kann dann für kein $e' \in \overline{F}'$ ein $\lambda_i = \frac{1}{2}$ sein, denn aus

$$e' = \sum \lambda_i b_i'$$

folgt $e'b_i = \frac{1}{2}$.

Nun ist Ne' ein b' also wäre auch $2b'b_i = N$ im Widerspruch zur Voraussetzung daß N ungerade.

Es liegen also alle e' im Inneren F' von $\overline{F}'$:

$$|xb_i| < \tfrac{1}{2}.$$

Wir wollen gleich definieren: Für beliebige $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ $(\varrho > 0)$

$$F'(\varrho) = F'(\varrho_1, \ldots, \varrho_s): \quad 2|xb_i| < \varrho_i.$$

Wir sagen, ein Polynom

$$\sum c(e')\exp(e'v) \quad (e' \in F'(\varrho))$$

ist von der Ordnung $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ in Bezung auf F'.

Wir wollen noch für $F(\Gamma_0)$ nehmen $\bigcup_i F(\Gamma)\beta_i$.

§ **4.** Wir untersuchen zunächst

(7) $$S(u, \varrho) = \sum \exp(e'u) \quad (e' \in F'(\varrho))$$

allgemein

$$S(u, z', \varrho) = \sum \exp\big((e'+z')u\big) \quad (e' \in F'(\varrho)).$$

Es ist

(8) $$S(z') = S(u, z', \varrho) = \sum \exp\big((e'+z')u\big)\chi\big(e'+z', F'(\varrho)\big),$$

wenn χ die charakteristische Funktion von $F'(\varrho)$ ist. Es ist $S(z')$ periodisch mit dem Periodengitter Γ_0', also

$$S(z') \sim \sum c(e)\exp(ez')$$

wobei

$$d(\Gamma_0')c(e) = \int_{F_0'} S(z')\exp(-ez')dz' = \int_{R^s} \exp\big(z'(u-e)\big)\chi\big(z', F'(\varrho)\big)dz'.$$

Setzen wir $z' = \sum \sigma_i b_i'$, dann ist

$$d(\Gamma_0')c(e) = d(\Gamma')\prod_{i=1}^{s} \int_{2|\sigma_i|<\varrho_i} \exp\big(\sigma_i b_i'(u-e)\big)d\sigma_i'.$$

Wir setzen

(9) $$G(v, \varrho) = \prod_{i=1}^{s} \sin\pi\varrho_i b_i' v/\pi b_i' v.$$

Dann ist, da $d(\Gamma') = Nd(\Gamma_0')$,

(10) $$c(e) = NG(u-e, \varrho).$$

Wir stellen gleich fest, daß $G(b,\varrho)=0$, wenn die ϱ_i natürliche Zahlen sind und $b\neq 0$; für $b=0$ ist $G=\varrho_1\ldots\varrho_s$. Wir erhalten aus (10)

$$S(u,z',\varrho)\sim N\sum_e G(u-e,\varrho)\exp(ez'). \tag{11}$$

Da

$$NI=\sum f(\beta_i)S(v-\beta_i,1)\quad\text{und}\quad f(b+e)=f(b),$$

so ist

$$I(f,v,\Gamma')\sim\sum f(\beta_i)\sum G(v-\beta_i-e,1)=\sum_b f(b)G(v-b,1). \tag{12}$$

Nun gilt ja für jede im quadratischen Sinn integrierbare Funktionen Φ,Ψ mit Periodengitter Γ_0' und Fourierkoeffizienten $a(e)$, $b(e)$

$$\int_{F_0'}\overline{\Phi}(z')\Psi(z')\,dz'=d(\Gamma_0')\sum_e\overline{a}(e)b(e). \tag{13}$$

Wenden wir dies auf $\Phi(z')=S(u,z',\varrho)$, $\Psi=S(u,z'+w',\varrho^*)$ mit $a(e)=NG(u-e,\varrho)$, $b(e)=NG(u-e,\varrho^*)\exp(ew')$ (w', ϱ^* beliebig) an, so erhalten wir daher

$$\begin{aligned} d(\Gamma_0')T(u,w',\varrho,\varrho^*) &= \int_{F_0'}\overline{S}(u,z',\varrho)S(u,z'+w',\varrho^*)\,dz' \\ &= \sum_e\overline{a}(e)b(e). \end{aligned} \tag{14}$$

Es ist der Ausdruck links gleich

$$\begin{aligned} &\int_{R^s}\exp(-z'u)\chi\big(z',F(\varrho)\big)\sum_{e'}\exp\big(u(z'+e'+w')\big)\chi\big(z'+e'+w',F'(\varrho^*)\big) \\ &\quad=\sum_{e'}\exp\big(u(e'+w')\big)\int_D dz'\qquad\big(D=F'(\varrho)\cap F'(\varrho^*)+w'+e'\big). \end{aligned} \tag{15}$$

Wenn es nun ein z' geben soll so, daß

$$2|z'b_i|<\varrho_i,\quad 2(z'-w'-e')b_i<\varrho_i^*\quad(i=1,\ldots,s),$$

so folgt, daß $2|b_i(w'+e')|<\tilde{\varrho}_i$ ($\tilde{\varrho}_i=\varrho_i+\varrho_i^*$). Die e' müssen in $F'(\tilde{\varrho})+w'$ liegen. Es ist also der Ausdruck links in (13) ein endliches trigonometrisches Polynom. Setzen wir insbesondere $w'=0$, so liegt ein trigonometrisches Polynom von der Ordnung $\tilde{\varrho}$ vor. Für $\varrho^*=1$ ist es sogar ein Interpolationspolynom, denn wir haben

$$T(u,0,\varrho,1)=N^2\sum_e G(u-e,\varrho)G(u-e,1)$$

und wir setzen ($R=\varrho_1\ldots\varrho_s$)

$$\begin{aligned} RJ(f,v,\varrho,1) &= \sum f(\beta)\sum_e G(v-\beta-e,1)G(v-\beta-e,\varrho) \\ &= \sum_b f(b)G(v-b,1)G(v-b,\varrho). \end{aligned} \tag{16}$$

Für $v=b$ ist tatsächlich $J(f)=f(b)$. Die Ordnung des Polynoms ist $1+\varrho_1,\ldots,1+\varrho_s$. Besonders wichtig ist der Fall $\varrho_i=1$, dann erhalten wir ein Polynom von der Ordnung zwei:

$$J(f,v,1)=\sum f(b)G^2(v-b,1). \tag{17}$$

Wir werden so dazu geführt

$$RJ(f,v,\varrho)=\sum_b f(b)G^2(v-b,\varrho) \tag{18}$$

zu betrachten, die also die Ordnung $(2\varrho_1,\ldots,2\varrho_s)$ hat. Es läßt sich (16) auf (18) zurückführen, wenn wir beachten, daß $\sin 2\alpha\sin 2\beta=\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$ so sehen wir, daß $G(1)G(\varrho)$ eine Summe von 2^s Termen $G^2(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)$, wo $\sigma=\frac{1}{2}(1-\varrho)$ bzw. $\frac{1}{2}(1+\varrho)$ ist. Es ist also

$$RJ(f,v,\varrho,1)\leqslant\sum_{(\sigma)}|J(f,v,\sigma)|.$$

Wir wollen (14) für $\varrho=\varrho^*$ noch explizit hinschreiben. Dazu haben wir das Integral $\int_D dz'$ mit

$$D:\quad 2|z'b_i|<\varrho_i,\quad 2\big(|(z'+w'+e')b_i|\big)<\varrho_i$$

zu berechnen. Setzen wir wieder $z'=\sum\sigma_i b_i'$, $(e'+w')b_i=\tau_i$ so erhalten wir $\int=d(\Gamma')\prod_{i=1}^{s}\int_{D_i}d\sigma_i$ (D_i: $2|\sigma_i|<\varrho_i$, $2|\sigma_i+\tau_i|<\varrho_i$). Es ist

$$\int_{D_i}d\sigma_i=\begin{cases}\varrho_i-|\tau_i|, & \text{wenn}\quad |\tau_i|<\varrho_i,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wenn wir setzen

$$V(x',\varrho,F')=\begin{cases}\prod_{i=1}^{s}(\varrho_i-|x'b_i|), & \text{wenn}\quad x'\in F'(2\varrho),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

haben wir

$$T(u,w',\varrho,\varrho)=N\sum_{e'}V(e'+w',\varrho,F')\exp\big((e'+w')u\big), \tag{19}$$

also insbesondere für $w'=0$ nach (14), (18)

$$NRJ(f, v, \varrho) = \sum f(\beta_i) \sum_{e'} V(e', \varrho, F')\exp\big(e'(v-\beta_i)\big). \tag{20}$$

Für $f=1$ erhalten wir rechts $\sum_{e'} V(e')\exp(e'v)\sum_i \exp(-\beta_i e')$. Nun ist die innere Summe $=N$, wenn e' ein b' und 0 sonst. Sind die ϱ_i alle $\leqslant \frac{1}{2}$, so ist $V(b')=0$ außer wenn $b'=0$. Wir erhalten also

$$J(1, u, \varrho) = 1 \qquad (\varrho_i \leqslant \tfrac{1}{2}).$$

Wir gehen wieder nun auf (19) zurück and wenden erneut die Parseval'sche Gleichung an und erhalten

$$\int_{F'_0} |T(u, z', \varrho, \varrho)|^2 dz' = d(\Gamma'_0)N^4 \sum_e G(u-e, \varrho). \tag{22}$$

Die linke Seite ist nach der gleichen Überlegung wie vorher

$$N^2 \sum_{e'} \exp(ue') \int_{R^s} V(z', \varrho)V(z'+e', \varrho)dz'. \tag{23}$$

Nun erstrecken sich die Integrale über D_i: $|z'b_i| < \varrho_i$, $|(z'+b')b_i| < \varrho_i$. Es muß also e' im Bereich $F'(4\varrho_1, \ldots, 4\varrho_s)$ liegen. Es ist also der Ausdruck links ein Polynom T^* von der Ordnung $4\varrho_1, \ldots, 4\varrho_s$

$$T^*(u) = \sum c(e')\exp(e'u) \qquad (e' \in F'(4\varrho)).$$

Wir bilden nun

$$\sum f(\beta_i)T^*(v-\beta_i) = N^4 \sum_b f(b)G^4(v-b, \varrho)$$

und setzen $\varrho_i = \frac{1}{4}$, dann ist T^* ein Polynom höchstens erster Ordnung. Weiters ist für $f=1$

$$\sum_i T^*(v-\beta_i) = \sum_{e'} c(e')\exp(e'v)\sum_i \exp(-\beta_i e')$$
$$= N\sum c(b')\exp(e'b') = Nc(0),$$

da nur $b'=0$ in $F'(1)$. Es ist nun nach (23)

$$d(\Gamma'_0)c(0) = N^2 \int_{R^s} V^2(0, z', \tfrac{1}{4})dz'.$$

Setzen wir wieder $z' = \sum \sigma_i b'_i$, so kommt

$$c(0) = N^3 \sum_{i=1}^{s} \int_{|\sigma_i|<1/4} (\tfrac{1}{4}-|\sigma_i|)^2 d\sigma_i = N^3(2/3)^s.$$

Also erhalten wir

$$K(f, v) = (\tfrac{3}{2})^s N^{-4}\sum f(\beta_i)T^*(v-\beta_i) = (\tfrac{3}{2})^s \sum_b f(b)G^4(v-b, \tfrac{1}{4}) \tag{24}$$

und $K(1, v) = 1$.

§ 5. Mit Hilfe von (24) können wir nun $E(f)$ abschätzen. Wir definieren für eine stetige Funktion $f(v)$ den Stetigkeitsmodul in bezug auf eine abgeschlossene Menge S durch

$$\omega(f, S) = \sup|f(x)-f(y)|, \qquad y-x \in S;$$

es ist dieser Ausdruck stets endlich, da ja $f(v)$ periodisch ist. Wir setzen $\omega(f, F) = \omega\big(f;\ \overline{F}(\Gamma_0)\big)$, es ist dann stets wenn x, $y \in \overline{F}(\Gamma)$ und $b = k_1 b_1 + \ldots + k_s b_s$

$$|f(x+b)-f(y)| \leqslant 2(|k_1|+\ldots+|k_s|)\,\omega(f).$$

B e w e i s. Es ist für irgend ein b_i, z.B. für b_1 und ein beliebiges z

$$\sum_{u=1}^{2k} \big[f(\tfrac{1}{2}ub_1+z) - f\big(\tfrac{1}{2}(u-1)b_1+z\big)\big] = f(kb_1+z)-f(z),$$

also stets $|f(k_1b_1+z)-f(z)| \leqslant 2|k_1|\,\omega(f)$.

Wendet man die gleiche Überlegung auf die anderen Basiselemente an, so folgt sofort die Behauptung.

Wir bilden nun

$$(\tfrac{2}{3})^s\big(K(f, v)-f(v)\big) = \sum_b \big(f(b)-f(v)\big)G^4(v-b, \tfrac{1}{4}) \tag{25}$$

setzen wir $b = k_1b_1+\ldots+k_sb_s$, $v = b^*+v^*$, $b^* = \sum m_ib_i$, $v^* = \sum \tau_i b_i$, m ganz, $|\tau| < \frac{1}{2}$, so wird (25), wenn wir $k_i = m_i + g_i$ setzen,

$$\sum_{g_1,\ldots,g_s=-\infty}^{\infty} \big(f(g_1b_1+\ldots+g_sb_s+b^*)-f(v^*+b^*)\big)\prod_{i=1}^{s}\big(\sin\tfrac{1}{4}\pi(g_i-\tau_i)/\pi(g_i-\tau_i)\big)^4,$$

also dem Betrage nach

$$\leqslant (2/\pi)^s\omega(f)\sum_g (|g_1|+\ldots+|g_s|)\prod_{i=1}^{s}|g_i|^{-4} < (4/\pi)^s\omega(f)\sum_{g=1}^{\infty} g^{-3},$$

also $|K(f, v)-f(v)| < 3s6^s\omega(f, \overline{F}_0)$, also

SATZ 1.

$$E(f) \leqslant 20^s\omega(f, \overline{F}_0). \tag{26}$$

Wir wollen weiter

$$\delta = R\big(J(f, v, \varrho) - f(v)\big) = \sum_b \big(f(b) - f(v)\big) G^2(v - b, \varrho)$$

abschätzen. Wir haben wie vorher

$$|\delta| \leqslant \sum_g \big(f(g_1 b_1 + \ldots + g_s b_s + b^*) - f(v^* + b^*)\big) G^2\big(v^* - (g_1 b_1 + \ldots + g_s b_s)\big).$$

Es sei zunächst L eine beliebige natürliche Zahl. Zerlegen wir den Summationsbereich in 2 Teile. Der erste Teil besteht aus jenen g, für die $\operatorname{Max}(|g_1|, \ldots, |g_s|) \leqslant L$, der zweite Teil aus jenen für die $\operatorname{Max}|g| \geqslant L$. Es sei $M = \sup f(v)$, dann haben wir

$$\Big|\sum\nolimits_2\Big| \leqslant (2M/\pi^s)\Big(2\sum_{g=L}^{\infty} g^{-2}\Big)\Big(\sum_{g=1}^{\infty} g^{-2}\Big)^{s-1} < 4^s M/L.$$

Für den 1. Teil haben wir

$$\Big|\sum\nolimits_1\Big| \leqslant (2/\pi)^s \omega(f) \sum_{|g_i| \leqslant L} (|g_1| + \ldots + |g_s|) \prod_{i=1}^{s} |g_i|^{-2},$$

also

$$\Big|\sum\nolimits_1\Big| \leqslant (4/\pi)^s \omega(f)(1 + \log L).$$

Wir nehmen jetzt für L die nächstgrößere ganze Zahl an $1/\omega$, dann erhalten wir

$$|\delta| < 4^s \omega(f)[1 + M + \log(1 + 1/\omega)]$$

daraus folgt, wenn wir alle $\varrho = \varepsilon$ setzen,

Satz 2.

(28) $$|J(f, v, 1, \varepsilon) - f(v)| < (8/\varepsilon)^s \omega[1 + M + \log(l + 1/\omega)],$$

dabei ist $J(f, v, 1, \varepsilon)$ *ein Interpolationspolynom von der Ordnung* $1 + s$.

§ 6. Zur Agbschätzung von Λ betrachten wir nach einer Methode von Siegel [1]

$$\varphi(u, z') = \sum_{e'} \exp\big(u(e' + z')\big) \prod_{i=1}^{s} e^{-N\alpha_i |(e'+z')b_i|},$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ komplexe Zahlen mit Realteil $\operatorname{Re}\alpha_i > 0$. Diese Funktion können wir in eine absolut konvergente Fourierreihe entwickeln, also $\varphi = \sum c(e)\exp(ez')$.

Dabei ist

$$d(\Gamma_0')c(e) = \int_{R^s} \exp\big(z'(u - e)\big) \prod_{i=1}^{s} e^{-N\alpha_i |b_i z'|}.$$

Wir setzen $z' = \sum \sigma_i b_i$ und haben

$$c(e) = N \prod_{j=1}^{s} \Big(\big(N\alpha_j - 2\pi i b_j'(u - e)\big)^{-1} + \big(N\alpha_j + 2\pi i b_j'(u - e)\big)^{-1}\Big).$$

Also wird für $z' = 0$

$$\varphi(u, 0) = N \sum_e \prod_{j=1}^{s} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \big(N\alpha_j + 2\pi i \varepsilon b_j'(u - e)\big)^{-1}.$$

Wir setzen nun $\overline{\Gamma} = N\Gamma$ mit Determinante $N^s d(\Gamma) = N^{s-1} d(\Gamma_0)$. Jedes e läßt sich in der Form schreiben $r + \sum_i N k_i b_i$ wo $r \bmod N\Gamma$ bestimmt ist. Dann haben wir mit $q = N\alpha + 2\pi i b(u - r)$

$$\varphi(u, 0) = N \sum_r \prod_s \sum_{k_j} \sum_{\varepsilon} (q_j + \varepsilon 2\pi i N k_j)^{-1}.$$

Nun ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} = q^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} + \sum_{k=-1}^{-\infty} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \sum_{\eta = \pm 1} (q + \varepsilon \eta k)^{-1},$$

dabei soll das Glied $k = 0$ nur einmal genommen werden, dann wird

$$\sum_{e'} \exp(e'u) \prod_i e^{-N\alpha_i |b_i e'|} = N \sum_r \sum_j \sum_{k_j}{}' \sum_{\varepsilon_j, \eta_i} (q_j + \varepsilon_j \eta_j k_j)^{-1}.$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung rechts und links mit

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i \alpha_j} e^{N\alpha_j/2}$$

und integrieren von $1 - \infty i$ nach $1 + \infty i$.

Nun ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{N\alpha(1/2 - a)} \frac{d\alpha}{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad a < \tfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{wenn} \quad a > \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

und

$$\int e^{N\alpha/2}\big(\alpha(N\alpha + 2\pi i \xi)\big)^{-1} d\alpha = (1 - e^{-i\pi\xi})/\xi.$$

Also wird mit $c_i = b_i'(u - r)$

$$S(u) = S(u, 1) = N \sum_r \prod_j \sum_{k_j} \sum_{\eta_j} \sin\pi(N\eta_j - k_j + c_j)/\pi(N\eta_j k_j + c_j).$$

Es war $c_j = b_j'(u - r)$ und wir nehmen nun $u = v - \beta$ und haben

$$N\lambda(v) = \sum_\beta |S(v - \beta)|.$$

Wenn r ein Restsystem der $e \bmod N\Gamma$ durchläuft, so durchläuft $r+\beta$ ein volles Restsystem der $\Gamma \bmod N\Gamma$. Wir können daher alle $b = l_1 b_1 + \ldots + l_s b_s$ nehmen mit $0 \leqslant l_i \leqslant N-1$. Also erhalten wir, wenn wir noch setzen $v = \sum \varrho_i b_i$, $|\varrho_i| < \frac{1}{2}$,

$$\lambda \leqslant \sum_{l_1,\ldots,l_s=0}^{N-1} \prod_j \sum_{k_j}{}' = \prod_j \sum_{l_j} \sum_{k_j}{}' |\sin\pi(\varrho_j - l_j)| \Big| \sum_{\eta_j} \big(\pi(N\eta_j k_j + \varrho_j - l_j)\big)^{-1} \Big|.$$

Nun ist

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty}{}' = \sum_l \sum_k{}' \Big| \sum_\eta |\sin\pi(N\eta k + \varrho - l)| / \pi(N\eta k + \varrho - l) \Big|,$$

Da $|\varrho - l| \leqslant N - \frac{1}{2}$, so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_\eta{}' \Big| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{Nk+\varrho-l} - \frac{1}{Nk+\varrho-l} \Big]$$

$$\leqslant \frac{2(N-\frac{1}{2})}{N^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < 16/3N.$$

Also

$$\sum_l \sum_k{}' < 1 + \sum_{l=1}^{N} (l-\tfrac{1}{2})^{-1} + 16/3 < 6(1+\log N)$$

also

Satz 3.

$$\Lambda < \big(6(1+\log N)\big)^s. \tag{29}$$

Man überzeugt sich leicht, daß Λ stets $> \log N$. Fassen wir also die bisherigen Sätze zusammen, so erhalten wir.

Satz 4.

$$\|I(f, F') - f\| < \big(200(1+\log N)\big)^s \omega(f, F'). \tag{30}$$

Satz 5.

$$|||I - f||| < 40^s \omega(f, F'). \tag{31}$$

§ 7. Es sei nun $\varphi(x)$ eine konvexe Distanzfunktion und $M_1, \ldots, M_s$ die sukzessiven Minima von φ in bezug auf Γ. Dann gilt bekanntlich, wenn $V(\varphi)$ das Volumen von $\varphi(x) \leqslant 1$

$$2^s d(\Gamma)/s! \leqslant V(\varphi) M_1 \ldots M_s \leqslant 2^s d(\Gamma).$$

Es seien m_i Gitterpunkte von Γ mit $\varphi(m_i) = M_i$. Es gibt dann stets eine Basis $b_1, \ldots, b_s$ von Γ so, daß $m_j = \sum_{k=1}^{j} v_{jk} b_k$, $0 \leqslant v_{ij} < v_{ii}$ $(j = 1, \ldots, s)$.

Wir wählen nun für $F(\Gamma)$ gerade jenen Fundamentalbereich, der von diesen $b_1, \ldots, b_s$ erzeugt wird. Damit ist dann auch $F' = F(\Gamma')$ bestimmt. Es ist

$$\varphi(b_j) \leqslant j M_j \leqslant s M_s.$$

Wir haben daher für alle Punkte $x = \sum \lambda_j b_j$, $-\frac{1}{2} < \lambda_j \leqslant \frac{1}{2}$, vor $F(\Gamma)$: $2\varphi(x) \leqslant \sum_j \varphi(b_j) < s^2 M_s$, dh. $F(\Gamma)$ liegt im konvexen Körper A: $\varphi(x) \leqslant s^2 M_s/2$ also

$$\omega(f, F') \leqslant \omega(f, A).$$

Nun ist $V(\varphi) M_1^{s-1} M_s \leqslant 2^s d(\Gamma)$. Also ist

$$\omega(f, F') \leqslant \omega(f, B), \qquad B\colon \varphi \leqslant 2^s s^2 d(\Gamma)/M_1^{s-1} V(\varphi).$$

Erfüllt z. B. f eine Lipschitz-Bedingung in bezug auf φ,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\varphi(x-y) \qquad (L > 0), \tag{32}$$

so wird

$$\omega(f, F') < 2^s s^2 L d(\Gamma)/M_1^{s-1} V(\varphi).$$

Betrachten wir das polare Gitter Γ' und die polare Distanzfunktion φ' zu φ, dann ist, wenn M_1' das erste Minimum von φ' in Bezug auf Γ'

$$M_s M_1' \leqslant s!$$

und wir erhalten

$$\omega(f, F') \leqslant \omega(f, B_1), \qquad B_1\colon \varphi(x) \leqslant s^2 s!/M_1'. \tag{33}$$

Nehmen wir das erste Beispiel aus § 2 und $\varphi(x) = \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_s|)$ so sieht man unmittelbar, daß $M_1' \geqslant \operatorname{Min}(n_1, \ldots, n_s) = n$ und wir erhalten in diesem Fall, wenn (32) gilt $(N = n_1 \ldots n_s)$,

$$\|I(f) - f\| < \big(200 s^2 (1+\log N)\big)^s / n.$$

Betrachten wir jetzt das zweite Beispiel! Wir denken uns nun $g_1, \ldots, g_s$ so gewählt, daß für alle ganzen $h_1, \ldots, h_s \neq$ (nicht alle 0) mit

$$h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s \equiv 0 \pmod p), \qquad K(h) \geqslant p(\log p)^{-s},$$

wobei $K(h) = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Max}(|h_j|, 1)$. Solche $g_1, \ldots, g_s$ existieren stets [4].

Es sei nun $(l_1, \ldots, l_{s-1} l_s)$, wo $l_s = l_1 g^* + \ldots + l_{s-1} g_{s-1}^* + p m_s$ ein beliebiger Punkt $\neq 0$ aus Γ'. Dann erfüllen die Zahlen $l_1, \ldots, l_s$ die obieg Kongruenz.

Nun ist $(|l_1| + \ldots + |l_s|)/s \geqslant K^{1/s}$. Daher $M_1' \geqslant s p^{1/s}/\log p$, also erhalten wir in diesem Fall

$$\|I - f\| \leqslant \big(200 s^2 (1+\log p)\big)^s \log p / p^{1/s}. \tag{34}$$

Wir wollen noch ein weiteres Beispiel betrachten. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ aus einem reellen algebraischen Zahlkörper k vom Grad $s+1$ und es seien $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ linear unabhängig, so gilt bekanntlich für alle ganzen $(h_1, \ldots, h_s) \neq (0, \ldots, 0)$, $\|h\| = \mathrm{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|)$

$$\{h_1\alpha_1 + \ldots + h_s\alpha_s\} \geqslant c(K)\,\|h\|^{-s}, \qquad \{\alpha\} = \inf_h |\alpha - h|.$$

Wir nehmen jetzt wieder das zweite Beispiel und wählen für die g_i, die Zahlen $\{\alpha_i p\}$, dann folgt sofort, daß wir stets haben $M_1' \geqslant c p^{1/(s+1)}$, denn es gilt ja für $\|h\| \neq 0$ mit $h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s \equiv 0 \pmod p$

$$c(k) p \|h\|^{-s} \leqslant |p(h_1\alpha_1 + \ldots + h_s\alpha_s) - (h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s)|$$
$$\leqslant |h_1| + \ldots + |h_s| \leqslant s\|h\|,$$

also

(35) $$\|I - f\| \leqslant c(k)\big(200 s^2 (1 + \log p)\big)^s / p^{1/(s+1)}$$

wenn in (34), (35) f die Bedingung (32) erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] C. L. Siegel, Math. Annalen 87.
[2] L. J. Mordell, Math. Annalen 102.
[3] I. P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin 1955, S. 389 ff.
[4] E. Hlawka, Monatshefte f. Mathem. 66, S. 140-151.

Reçu par la Rédaction le 2. 1. 1964

ACTA ARITHMETICA
IX (1964)

Zur Gitterpunktlehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden

von

V. Jarník (Praha)

Es sei $Q(u) = Q(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ eine positiv definite quadratische Form. Wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so daß $Q(u) = \alpha Q_1(u)$ ist, wo Q_1 ganze Koeffizienten hat, so heiße die Form Q rational, sonst irrational. Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Ellipsoid $Q(u) \leqslant x$; $V(x) = V(1)x^{r/2}$ sei das Volumen dieses Ellipsoids, und man setze $P(x) = A(x) - V(x)$. Für jede Form Q ist

$$P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$$

(vgl. [1]). Für rationale Q und $r > 4$ ist die definitive Größenordnung von P bekannt:

$$P(x) = O(x^{r/2-1}), \qquad P(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

(vgl. [2], [3]). Weiter betrachten wir nur irrationale Formen der speziellen Gestalt

(1) $$Q(u) = \alpha_1(u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2 + \ldots + u_{1,r_1}^2) + \ldots + \alpha_\tau(u_{\tau,1}^2 + \ldots + u_{\tau,r_\tau}^2),$$
$$\alpha_j > 0, \quad r_j > 0, \quad r_1 + \ldots + r_\tau = r > 4, \quad \tau \geqslant 2.$$

Für diese irrationalen Formen gilt $P(x) = o(x^{r/2-1})$ (vgl. [4], [5], [6]) und diese Abschätzung läßt sich nicht verschärfen, solange man alle irrationalen Formen der Gestalt (1) zuläßt (vgl. [4]). Es gilt aber

Satz 1. *Für fast alle Systeme $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau)$ von positiven Zahlen (im Sinne des Lebesgueschen Massbegriffes) und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt* (vgl. [7])

(2) $$P(x) = O(x^{r/2-\lambda+\varepsilon}) \qquad (r > 4, \tau \geqslant 2),$$

wo

(3) $$\lambda = \sum_{j=1}^{\tau} \mathrm{Min}(1, \tfrac{1}{4} r_j).$$

Mann sieht, daß immer $\lambda > 1$ ist. Übrigens läßt sich x^ε durch eine Potenz von $\log x$ ersetzen. Hier sind zwei Fälle besonders interessant: Sind alle $r_j \leqslant 4$, so lautet (2)

$$P(x) = O(x^{r/4+\varepsilon});$$