ACTA ARITHMETICA
LXXXVIII.2 (1999)

Mesures d'approximation de valeurs de fonctions analytiques

par

Patrice Philippon (Paris)

Nous donnons ici deux applications de la méthode décrite dans [6] en montrant des mesures d'approximation de familles de nombres. On sait (au moins en petites dimensions) que de telles mesures entraînent des mesures d'indépendance algébrique de ces mêmes familles. La première application concerne les fonctions elliptiques de Weierstrass, tandis que la seconde concerne les K-fonctions introduites dans [7]. Ces deux applications fournissent par des biais très différents des mesures d'indépendance algébrique des couples de nombres $\pi, \Gamma(1/4)$ ou $\pi, \Gamma(1/3)$ par exemple, mais on verra que les fonctions de Weierstrass permettent d'obtenir des résultats plus fins. On en déduira en particulier que les nombres $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$ ne sont pas des nombres de Liouville.

Soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^m$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $C = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}_p$ suivant le contexte). Pour toute place v du corps de nombres $\mathbb{Q}(\underline{x}) = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$ on note $d(\underline{x})$ le degré sur $\mathbb{Q}$ et d_v le degré local sur $\mathbb{Q}_v$,

$$\|\underline{x}\|_v := \begin{cases} \sqrt{|x_1|_v^2 + \ldots + |x_m|_v^2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max(|x_1|_v, \ldots, |x_m|_v) & \text{si } v \text{ n'est pas archimédienne,} \end{cases}$$

et $H(\underline{x}) := \prod_v \|(1, \underline{x})\|_v^{d_v}$, le produit étant étendu à toutes les places de $\mathbb{Q}(\underline{x})$ (H est une hauteur relative à $\mathbb{Q}(\underline{x})$). On pose

$$h(\underline{x}) = \frac{\log H(\underline{x})}{d(\underline{x})},$$

la hauteur absolue de $\underline{x}$, et si $q_1, \ldots, q_m$ est une famille de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ on appellera *degré* de cette famille le maximum des degrés des q_i et *hauteur* de cette famille la hauteur du vecteur des coefficients de tous les q_i.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11J91, 11J89, 11J82.

Enfin, rappelons qu'on dispose sur un espace projectif $\mathbb{P}_n(C)$ de la distance suivante :

$$\mathrm{Dist}(x,y)=\frac{\|\underline{x}\wedge\underline{y}\|}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|},\quad x,y\in\mathbb{P}_n(C),$$

où $\underline{x}\wedge\underline{y}$ désigne le produit extérieur de systèmes de coordonnées projectives dans C^{n+1} des points x et y. Au voisinage de chaque point $x\in\mathbb{P}_n(C)$ cette distance est équivalente à la distance (euclidienne ou ultramétrique) de toute carte affine de $\mathbb{P}_n(C)$ centrée en x.

1. Mesures d'approximation et fonctions elliptiques. Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques. On note ζ sa primitive impaire et σ la fonction sigma normalisée telle que $\zeta=\sigma'/\sigma$. Soient ω_1, ω_2 une base du réseau Ω des périodes de $\wp$ telle que $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$. On note η_1,η_2 les quasi-périodes de la fonction ζ associées (i.e. $\zeta(z+\omega_i)=\zeta(z)+\eta_i$, $i=1,2$). Plus généralement, si $\omega\in\Omega$ est une période non nulle de $\wp$ on note η la quasi-période de ζ associée. Nous allons montrer

Théorème 1. *Avec les notations ci-dessus il existe un réel $c>0$ tel que si $P\in\mathbb{Z}[X,Y]$ est non nul on a*

$$|P(\pi/\omega,\eta/\omega)|>\exp(-c^5(\log H(P)+d^\circ P\log d^\circ P)(d^\circ P)^2). \tag{1}$$

Si $\theta=(1:\pi/\omega:\eta/\omega)\in\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ et $\alpha\in\mathbb{P}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ on a

$$\mathrm{Dist}(\theta,\alpha)>\exp(-c(h(\alpha)+\log d(\alpha))d(\alpha)^{3/2}). \tag{2}$$

Un énoncé du type (1) a été proposé par G. V. Chudnovsky (voir [1] pour un panorama des travaux de G. V. Chudnovsky sur cette question) et une version légèrement plus faible (avec un facteur $(\log(\log H(P)+d^\circ P))^2$ supplémentaire dans l'exponentielle) a été démontrée par G. Philibert [4] en utilisant un critère de E. M. Jabbouri [2]. L'inégalité (1) du théorème 1 montre en particulier que les nombres π/ω et η/ω ne sont pas des nombres de Liouville. En considérant les courbes elliptiques à multiplications complexes par $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ et $\mathbb{Q}(\mathrm{j})$ les couples $(\pi/\omega,\eta/\omega)$ correspondants sont algébriquement équivalents à $(\pi,\Gamma(1/4))$ et $(\pi,\Gamma(1/3))$ respectivement, on peut donc énoncer :

Corollaire 2. *Il existe un réel $c'>0$ tel que pour tout polynôme $P\in\mathbb{Z}[X,Y]$ non nul on ait*

$$|P(\pi,\Gamma(1/4))|,|P(\pi,\Gamma(1/3))|>(H(P)d^\circ P^{d^\circ P})^{-c'(d^\circ P)^2}.$$

En particulier, les nombres $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ ne sont pas des nombres de Liouville.

La démonstration repose sur le théorème 1 de [6] et une construction des approximations utilisant une idée due à Chudnovsky. L'inégalité (1) (mesure d'indépendance algébrique) se déduit de (2) via une propriété d'approximation adéquate, que nous donnons à la fin de ce paragraphe. Nous montrons d'abord l'inégalité (2) (mesure d'approximation).

Analyse des données. Soit donc $\alpha = (1 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}_2(\overline{\mathbb{Q}})$. On suppose sans perte de généralité que $\omega/3 \notin \Omega$ et on choisit comme corps de base $K_0 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, g_2, \wp(\omega/3), \wp'(\omega/3))$. On considère les fonctions

$$f_1(z) = (\sigma^2\wp)(z), \quad f_2(z) = \sigma(z)\Big(\zeta(z) - \frac{\eta}{\omega}z\Big), \quad f_3(z) = \sigma(z).$$

Soient $D_1, D_2 \in \mathbb{N}^*$. On fait un choix de monômes de la forme

$$\mathcal{D} = \{h \in \mathbb{N}^3 : h_1 \leq D_1,\ h_2 \leq D_2,\ h_3 = 2(D_1 - h_1) + D_2 - h_2\}.$$

Pour $M \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\Omega(M) = \{s_1\omega_1 + s_2\omega_2 : s_1, s_2 \in \mathbb{N},\ s_1, s_2 < M\}$$

et on désigne par c_i des réels > 0 ne dépendant que des fonctions f_1, f_2, f_3, de la base ω_1, ω_2 de Ω et du point $\omega \in \Omega$. On écrit $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ et on identifie $(\Omega(M) + \mathbb{Z}\omega)/\mathbb{Z}\omega$ à un sous-ensemble de représentants dans $\Omega(M)$. Le cardinal de cet ensemble est $\leq c_1 M$ où $c_1 = |a_1| + |a_2|$. On se donne encore des entiers T et T_0.

Paramètres primaires
$A = K_0,\ C = \mathbb{C}$ $a = [K_0 : \mathbb{Q}],\ \eta = \eta_0 = 1$
$d = 3 > n = 1$
$R = +\infty$
$\varpi_1(r) = \varpi_2(r) = \varpi_3(r) = c_2 r^2$
$S = \mathbb{N} \times (\omega/3 + \Omega)$

Choix
$\mathcal{D} = \{h \in \mathbb{N}^3 : h_1 \leq D_1,\ h_2 \leq D_2,\ h_3 = 2(D_1 - h_1) + D_2 - h_2\}$
$S_1 = \{0, \ldots, T_0 - 1\} \times (\omega/3 + (\Omega(M) + \mathbb{Z}\omega)/\mathbb{Z}\omega)$ $S_i = \begin{cases} \{T_0 + i - 2\} \times (\omega/3 + \Omega(M)) & \text{si } 2 \leq i \leq T - T_0 + 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$
$S'_i = \{0, \ldots, T_0 - 1\} \times (\omega/3 + \Omega(M)),\quad i \geq 1$

On restreint les choix précédents en posant, pour c_0 un réel ≥ 1 suffisamment grand par rapport aux autres c_i,

(3) $$D_2 = [2c_0c_1M] + 1, \qquad T_0 = [c_0D_1], \qquad T = 2^8c_1(T_0 + 1),$$

de sorte que $2\,\mathrm{card}\, S_1 \le 2c_1T_0M \le D_1D_2 \le \mathrm{card}\,\mathcal{D}$, $T > 2^4\cdot 3D_1$, $TM > 2^8c_0c_1D_1M \ge 2^5\cdot 3D_1D_2$. On supposera M et D_1 assez grands par rapport aux c_i et on pose $U = -\log \mathrm{Dist}(\theta,\alpha)$.

Matrice des approximations. Suivant une idée de Chudnovsky, pour construire les approximations on commence par écrire z et ζ en fonction de $\wp$; c'est le point qui permet d'améliorer les résultats de [4], [2]. Ces fonctions sont des intégrales de première et seconde espèce sur la courbe elliptique paramétrée par $\wp$; on a

$$\frac{dz}{d\wp} = \frac{1}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}} \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{d\wp} = \frac{-\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}.$$

On développe ces expressions au voisinage de $\wp(\omega/3)$ et on intègre, ce qui donne

$$\begin{aligned} \wp &= \wp\Big(\frac{\omega}{3}\Big) + \wp'\Big(\frac{\omega}{3}\Big)u, \\ \zeta - \frac{\eta}{\omega}z &= \gamma_{-1} - \sum_{i\ge 1}\Big(\gamma_i\frac{\eta}{\omega} + \gamma_i\wp\Big(\frac{\omega}{3}\Big) + \gamma_{i-1}\wp'\Big(\frac{\omega}{3}\Big)\Big)\frac{u^i}{i}, \end{aligned} \tag{4}$$

où $u = (\wp - \wp(\omega/3))/\wp'(\omega/3)$ est un paramètre local au voisinage de $\wp(\omega/3)$ et $\gamma_i \in K := \mathbb{Q}(g_2, \wp(\omega/3), \wp'(\omega/3))$ satisfont $H(\gamma_{-1},\ldots,\gamma_i) \le c_3^i$. On notera que $\gamma_{-1} = \zeta(\omega/3) - \eta/3$, $\gamma_0 = 0$ et les γ_i, $i\ge 1$, sont définis par

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\Big(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z\Big) &= \frac{-\Big(\Big(\wp\Big(\frac{\omega}{3}\Big) + \frac{\eta}{\omega}\Big) + \wp'\Big(\frac{\omega}{3}\Big)u\Big)}{\sqrt{1 + 2\frac{\wp''(\omega/3)}{\wp'(\omega/3)}u + 12\wp\Big(\frac{\omega}{3}\Big)u^2 + 4\wp'\Big(\frac{\omega}{3}\Big)u^3}} \\ &= -\Big(\Big(\wp\Big(\frac{\omega}{3}\Big) + \frac{\eta}{\omega}\Big) + \wp'\Big(\frac{\omega}{3}\Big)u\Big)\sum_{i\ge 1}\gamma_i u^{i-1}. \end{aligned}$$

(De façon générale on vérifie que la fonction $\zeta(nz) - n\zeta(z)$ est elliptique pour tout $n\in\mathbb{Z}$.) La quasi-périodicité et la relation de Legendre montrent que si $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ alors

$$\zeta(z + s_1\omega_1 + s_2\omega_2) - \frac{\eta}{\omega}(z + s_1\omega_1 + s_2\omega_2) = \frac{2\mathrm{i}(a_1s_2 - a_2s_1)\pi}{\omega} + \zeta(z) - \frac{\eta}{\omega}z.$$

Considérons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ \cdots & \frac{1}{t!}\cdot\frac{d^t}{du^t}\Big(\wp^{h_1}\cdot\Big(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z + \frac{2\mathrm{i}(a_1s_2 - a_2s_1)\pi}{\omega}\Big)^{h_2}\Big)\Big|_{u=0} & \cdots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}_{\substack{h_1\le D_1,\, h_2\le D_2 \\ 0\le s_1,s_2<M,\, 0\le t<T}}.$$

On déduit des formules (4) que chaque coefficient de cette matrice est un polynôme $Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}$ à coefficients dans K en $\pi/\omega, \eta/\omega$ de degré $\leq D_2$ et de taille $\leq c_4(D_1 + T + D_2 \log(TM))$. On remarquera que les colonnes indexées par $(t,\underline{s})$ et $(t,\underline{s}')$ avec $a_1(s_2 - s_2') = a_2(s_1 - s_1')$ sont égales, ceci reflète la périodicité en ω des fonctions $\wp$ et $\zeta - (\eta/\omega)z$. On obtient une matrice dont les colonnes engendrent les mêmes sous-espaces en restreignant $\underline{s}$ à varier de sorte que $s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \in (\Omega(M) + \mathbb{Z}\omega)/\mathbb{Z}\omega$. De plus, on vérifie

$$\text{(5)} \qquad \frac{1}{t!} \cdot \frac{d^t}{dz^t}\left(\sigma^{2D_1+D_2}\wp^{h_1} \cdot \left(\zeta - \frac{\eta}{\omega}z\right)^{h_2}\right)\bigg|_{z=\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2} = \sum_{t'=0}^{t} \mu_{t',t,\underline{s}} Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}\left(\frac{\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$$

où

$$\mu_{t,t,\underline{s}} = \sigma\left(\frac{\omega}{3} + s_1\omega_1 + s_2\omega_2\right)^{2D_1+D_2},$$

$$\mu_{t',t,\underline{s}} = \sum_{j=t'}^{t} \frac{1}{(t-j)!} \cdot \frac{d^{t-j}(\sigma^{2D_1+D_2})}{dz^{t-j}}\bigg|_{z=\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2} \times \sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j \\ \tau_i \geq 1}} \prod_{i=1}^{t'} \frac{1}{\tau_i!} \cdot \frac{d^{\tau_i}(\wp/\wp'(\omega/3))}{dz^{\tau_i}}\bigg|_{z=\omega/3}.$$

Pour vérifier (5) on utilise les formules de Leibniz et de changement de variable suivantes, valables pour toutes fonctions $f(u)$ analytique en 0, $g(z)$ analytique en z_0 et $u = \varphi(z)$ analytique en z_0 telle que $\varphi(z_0) = 0$:

$$\frac{1}{t!} \cdot \frac{d^t(g \cdot (f \circ \varphi))}{dz^t}(z_0) = \sum_{j=0}^{t} \frac{1}{(t-j)!} \cdot \frac{d^{t-j}g}{dz^{t-j}}(z_0) \cdot \frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j(f \circ \varphi)}{dz^j}(z_0),$$

$$\frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j(f \circ \varphi)}{dz^j}(z_0) = \sum_{t'=0}^{j} \frac{1}{t'!} \cdot \frac{d^{t'}f}{du^{t'}}(0) \cdot \sum_{\substack{\tau_1+\ldots+\tau_{t'}=j \\ \tau_i \geq 1}} \prod_{i=1}^{t'} \frac{1}{\tau_i!} \cdot \frac{d^{\tau_i}\varphi}{dz^{\tau_i}}(z_0),$$

qui se démontrent par récurrence. On remarquera que le terme correspondant à $t' = 0$ dans le second membre de la seconde identité vaut 0 si $j \neq 0$ et $f(0)$ si $j = 0$. La formule de Cauchy entraîne

$$\left|\frac{1}{(t-j)!} \cdot \frac{d^{t-j}(\sigma^{2D_1+D_2})}{dz^{t-j}}\bigg|_{z=\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2}\right| \leq \mathrm{e}^{c_5(D_1+D_2)M^2},$$

$$\left|\frac{1}{\tau_i!} \cdot \frac{d^{\tau_i}(\wp/\wp'(\omega/3))}{dz^{\tau_i}}\bigg|_{z=\omega/3}\right| \leq \mathrm{e}^{c_6\tau_i},$$

et le nombre de termes dans l'expression de $\mu_{t',t,\underline{s}}$ étant $\le 4^t$, on a

$$\sum_{t'=0}^{t} |\mu_{t',t,\underline{s}}| \le \mathrm{e}^{c_7(t+(D_1+D_2)M^2)}.$$

Les vecteurs approximations $m_{i+1,(T_0+i-1,\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2)}$ sont alors les vecteurs de composantes $Q_{\underline{h},(T_0+i-1,\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\underline{h}\in\mathcal{D}$. On pose de plus

$$\lambda_{i+1,(T_0+i-1,\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2),\mathrm{Id}} = \mu_{T_0+i-1,T_0+i-1,\underline{s}}$$

et

$$M_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{\substack{h_1\le D_1,\, h_2\le D_2\\ s_1\omega_1+s_2\omega_2\in(\Omega(M)+\mathbb{Z}\omega)/\mathbb{Z}\omega,\, 0\le t<T}} .$$

On calcule les paramètres secondaires (voir tableau).

Paramètres secondaires	$i=0$	$1\le i<T-T_0+1$
K_{i+1}	K_0	
$\delta(i)$	1	
$\phi(i)$	$c_8(D_1+T+D_2h(\alpha)+D_2\log M)$	
$\varrho(i)$	$c_9(D_1+D_2)M^2$	
$r'(i)$	—	$\max(\|\omega_1\|,\|\omega_2\|)\cdot(2M+(\|a_1\|+\|a_2\|)/3)+1$
$r(i)$	—	$2\mathrm{e}\max(\|\omega_1\|,\|\omega_2\|)\cdot(2M+(\|a_1\|+\|a_2\|)/3)+2\mathrm{e}$
$\mathcal{D}\varpi(r(i))$	—	$\le c_{10}(D_1+D_2)M^2$
$N(i)$	—	T_0M^2
$-\log E(i)$	—	T_0M^2
$U(i)$	—	$U-c_{11}(T_0+D_2)M^2$
Δ_i	$\le 4(a+2)\log(D_1D_2)$	$\le 4(a+2)\log(D_1D_2T_0M)$

Calcul de $E(i)$. On a $r'(i)/r(i)=1/(2\mathrm{e})$, d'où $E_{r'(i),r(i)}(S_i')\le \mathrm{e}^{-N(i)}$ et $H_{r'(i)}(S_{i+1})=1$. Les conditions $C_{r,r'}$, $C_{N,r}$ et C_E du théorème 1 de [6] sont satisfaites.

Calcul de $U(i)$. Le support de S_i' étant de cardinal M^2 dans $\mathbb{C}$, on a (cf. [6], §2.a, p. 296)

$$G_{r(i),r'(i)}(S_i') \le \left(\frac{133\max(|\omega_1|,|\omega_2|)}{\min_{\omega'\in\Omega}(1,|\omega'|)}\right)^{T_0M^2} \le \mathrm{e}^{c_{12}T_0M^2},$$

car M est supposé assez grand par rapport à c_1. On notera que ce raffinement dans le calcul de la «gravitation» est déjà présent dans [4] via le lemme 4.5 de [9]. Grâce à (5) les quantités à majorer dans la condition C_U du théorème 1 de [6] peuvent s'écrire

$$\Bigl|\sum_{t'=0}^{t}\mu_{t',t,\underline{s}}\Bigl(Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}\Bigl(\frac{\pi}{\omega},\frac{\eta}{\omega}\Bigr)-Q_{\underline{h},(t',\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)\Bigr)\Bigr|$$

pour $0\le s_1,s_2<M$, $0\le t<T_0+i$, et sont donc majorées par

$$\begin{aligned}\sum_{t'=0}^{t}|\mu_{t',t,\underline{s}}|\mathrm{e}^{c_{13}(D_1+T+D_2\log M)-U}&\le \mathrm{e}^{(c_7+c_{13})(T+(D_1+D_2)M^2)-U}\\&\le \mathrm{e}^{(c_{11}-c_{12})(T_0+D_2)M^2-U}.\end{aligned}$$

Calcul de $\phi(i)$ et $\varrho(i)$. On a $|\sigma(\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2)|\ge \mathrm{e}^{-c_{14}M^2}$, d'où la majoration de $|\lambda_{i+1,(T_0+i-1,\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2),\mathrm{Id}}|^{-1}$ et les majorations de la norme et de la taille de $m_{i+1,(T_0+i-1,\omega/3+s_1\omega_1+s_2\omega_2)}$ résultent de celle des polynômes $Q_{\underline{h},(T_0+i-1,\underline{s})}$. Les conditions C_δ, C_ϕ et C_ϱ du théorème 1 de [6] sont ainsi satisfaites.

Rang de $M_{\mathcal{D}}$ et lemme de zéros. On retrouve ici les mêmes arguments que dans [4], §3.3, à ceci près qu'on utilise un lemme de zéro dans les groupes algébriques plutôt qu'une estimation de multiplicité. Si la matrice $M_{\mathcal{D}}$ est de rang $<\operatorname{card}\mathcal{D}$, il existe une combinaison linéaire non triviale de ses lignes, c'est-à-dire une famille $(a_{\underline{h}})_{\underline{h}\in\mathcal{D}}\in\mathbb{C}^{\operatorname{card}\mathcal{D}}\setminus\{0\}$ telle que

$$\sum_{\underline{h}\in\mathcal{D}}a_{\underline{h}}Q_{\underline{h},(t,\underline{s})}(\alpha_1,\alpha_2)=0$$

pour tout $0\le t<T$, $0\le s_1,s_2<M$. Mais chacune de ces combinaisons linéaires s'écrit

$$\frac{1}{t!}\cdot\frac{d^t}{du^t}\Bigl(\sum_{\underline{h}\in\mathcal{D}}a_{\underline{h}}\wp^{h_1}(\zeta-\alpha_2z+2\mathrm{i}(a_1s_2-a_2s_1)\alpha_1)^{h_2}\Bigr)\Bigr|_{u=0},$$

ce qui montre que le polynôme $\sum_{\underline{h}\in\mathcal{D}}a_{\underline{h}}X^{h_1}Y^{h_2}$ s'annule à un ordre $\ge T$ le long du sous-groupe analytique $\exp_G(z,\alpha_2z)$ de l'extension G par $\mathbb{G}_a$ de la courbe elliptique E paramétrée par $\wp$, d'exponentielle $\exp_G(z,w)=(\wp(z),\zeta(z)-w)$, en tous les points

$$\exp_G\Bigl(\frac{\omega}{3},\frac{-2\mathrm{i}(a_1s_2-a_2s_1)\alpha_1}{\alpha_2}\Bigr),\qquad 0\le s_1,s_2<M.$$

Le lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs (cf. [5], thm. 9, par exemple) entraîne alors qu'il existe un sous-groupe algébrique propre G' de G tel que

$$\frac{T}{2}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma+G'}{G'}\right)\le 2^3\cdot 3D_1^{1-\dim\pi(G')}D_2^{1-\dim(G'\cap\mathbb{G}_a)}$$

où

$$\Sigma=\left\{\exp_G\left(\frac{\omega}{3},\frac{-2\mathrm{i}(a_1s_2-a_2s_1)\alpha_1}{\alpha_2}\right):0\le s_1,s_2<M/2\right\}$$

et π désigne la projection de G sur E. On a

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma+G'}{G'}\right)\ge[M/2]+1\quad\text{si } G'\cap\mathbb{G}_a=\{0\}$$

et comme $T>2^4\cdot 3D_1, TM>2^5\cdot 3D_1D_2$, l'inégalité ci-dessus est impossible, ce qui montre que le rang de $M_{\mathcal{D}}$ est égal à $\operatorname{card}\mathcal{D}$.

Condition C_1. D'après nos choix (3) on a $\operatorname{card}\mathcal{D}\ge 2\delta(0)\operatorname{card}S_1$ et $\delta(j)=1$ pour $j\ge 0$. Comme la matrice $M_{\mathcal{D}}$ est de rang $\operatorname{card}\mathcal{D}$ le théorème 1 de [6] affirme l'existence d'un entier $j\ge 1$ tel que

$$\min(-\log E(j)-\mathcal{D}\varpi(r(j)),U(j))\le a(\phi(j)+\phi(0))+\varrho(j)+\varrho(0)+\Delta_j+\Delta_0.$$

Vu le calcul des paramètres secondaires et le fait que l'inégalité

$$\begin{aligned}T_0M^2>{}&(c_{10}+2c_9)(D_1+D_2)M^2\\&+3c_8(D_1+T+D_2h(\alpha)+D_2\log(TM))d(\alpha)\end{aligned}$$

est satisfaite pour nos choix (3) avec $D_1=[2c_0^2(h(\alpha)+\log d(\alpha))\sqrt{d(\alpha)}]+1$ et $M=[c_0\sqrt{d(\alpha)}]$, c'est $U(j)$ qui réalise le minimum dans le membre de gauche. On en déduit

$$U\le(2c_{11}+1)T_0M^2<c_0^6(h(\alpha)+\log d(\alpha))d(\alpha)^{3/2},$$

ce qui établit l'inégalité (2) du théorème 1 car $U=-\log\operatorname{Dist}(x,\alpha)$.

Mesure d'indépendance algébrique. On a le lemme de transfert suivant.

LEMME 3. *Soit $\theta\in\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Il existe un réel $c_{15}>0$ tel que si pour une forme $P\in\mathbb{Z}[X_0,X_1,X_2]$ on a*

$$\log|P(\theta)|\le -b^4(\log H(P)+d^\circ P\log d^\circ P)(d^\circ P)^2$$

où $b\ge c_{15}$ alors il existe $\alpha\in\mathbb{P}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que $P(\alpha)=0$ et

$$\log\operatorname{Dist}(\theta,\alpha)\le-\frac{b}{c_{15}}(h(\alpha)+\log d(\alpha))d(\alpha)^{3/2}.$$

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 3 de [8].

On applique ce résultat avec $b=c\cdot c_{15}$ où $c\ge c_{15}$ désigne la constante du théorème 1, pour déduire (1) de (2) dans le théorème 1.

2. Mesures d'approximation et K-fonctions. Soient K un corps de nombres, $d > 1$ et $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions analytiques dans $B(0,1)$ dont les développements de Taylor en l'origine sont à coefficients dans K. Pour $\mathcal{D}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^d$ notons $|\mathcal{D}| = \max(|\mu_1| + \ldots + |\mu_d| : \mu \in \mathcal{D})$ et

$$D_t \underline{f}^{\mathcal{D}}(0) = (D_{t'}(f_1^{\mu_1} \ldots f_d^{\mu_d})(0) : \mu \in \mathcal{D},\ t' = 0, \ldots, t);$$

c'est un vecteur de $K^{(t+1)\operatorname{card}\mathcal{D}}$.

DÉFINITION. Soient $c \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\mathcal{A}$ un ensemble infini de parties finies de $\mathbb{N}^d$, $\varphi : \mathcal{A} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq \mathrm{e}}$ une fonction telle que $\varphi_{\mathcal{D}}(t)$ soit croissante et $(\log \varphi_{\mathcal{D}}(t))/t$ soit décroissante par rapport à t pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$, et

$$\liminf_{|\mathcal{D}| \to \infty} \frac{\log \varphi_{\mathcal{D}}(\operatorname{card}\mathcal{D}/(2[K:\mathbb{Q}]))}{\operatorname{card}\mathcal{D}/(2[K:\mathbb{Q}])} = 0.$$

Rappelons (cf. [7], §3) que $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_d)$ est un *système de K-fonctions de type* φ si $H(D_t \underline{f}^{\mathcal{D}}(0)) \leq \varphi_{\mathcal{D}}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^d$.

Nous disons que $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^d$ est *c-admissible pour* $\underline{f}$ si pour tout $Q \in C[X_1, \ldots, X_d]$ supporté par $\mathcal{D}$, on a

$$\operatorname{ord}_0 Q(f_1(z), \ldots, f_d(z)) \leq c \cdot \operatorname{card}\mathcal{D}.$$

Soit encore $\mathcal{K} \subset C$ une extension de type fini de K et $\theta_1, \ldots, \theta_m$ un système générateur de $\mathcal{K}/K$. On note $\theta = (1 : \theta_1 : \ldots : \theta_m) \in \mathbb{P}_m(C)$ et on dira qu'une famille d'éléments $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{K}$ est de *degré* $\leq \delta$ et *taille* $\leq \tau$ s'il existe une famille de polynômes $p_0, p_1, \ldots, p_m \in K[X_1, \ldots, X_m]$ de degré $\leq \delta$ et taille $\leq \tau$ telle que $y_i = p_i(\theta)/p_0(\theta)$, $\log|p_i(\theta)| \leq \delta \log\|\theta\| + \tau$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $\log|p_0(\theta)| \geq -\delta \log\|\theta\| - \tau$.

On dira encore qu'une matrice $\mathcal{M}$ est *produit d'une matrice triangulaire et d'une matrice à coefficients dans* $\mathcal{K}$ *de degré* $\leq \delta$ *et taille* $\leq \tau$ s'il existe une matrice triangulaire supérieure $\mathcal{T}$ à coefficients dans C et une matrice $\mathcal{R}$ à coefficients dans $\mathcal{K}$ telles que $\mathcal{M} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{T}$, les coefficients et les inverses des termes diagonaux de $\mathcal{T}$ sont de valeurs absolues $\leq \mathrm{e}^{\tau}$ et la famille des coefficients de $\mathcal{R}$ est de degré $\leq \delta$ et taille $\leq \tau$.

THÉORÈME 4. *Soient* $\delta \in \mathbb{N}^*$, $\tau, c, c' \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_d)$ *un système de K-fonctions de type* φ, $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$ *c-admissible pour* $\underline{f}$ *et* $0 < r'' \leq r' < 1$. *On suppose qu'il existe un ensemble pondéré* S *de support dans la couronne* $B(0,r') \setminus \overline{B(0,r'')}$ *tel que la matrice* $\underline{f}^{\mathcal{D}}(S)$ *soit produit d'une matrice triangulaire et d'une matrice à coefficients dans* $\mathcal{K}$ *de taille* $\leq \tau$ *et degré* $\leq \delta$ *et que les conditions suivantes soient réalisées* :

(1) $\quad -4m(S)\log(\sqrt{r'} - \eta_0 r') \leq -T_0 \log r'$,

(2) $\quad -\log E_{r,\sqrt{r'}}(S) > 12\log\varphi_{\mathcal{D}}(T) + 8[K:\mathbb{Q}](\log(8T) + \log\operatorname{card} S)$,

$$(3) \qquad -\operatorname{card} S \cdot \log r'' + \log G_{r,\sqrt{r'}}(S) \le -\frac{c'}{c} T \log r'',$$

$$(4) \qquad 16 \log(T_0 + \varphi_{\mathcal{D}}(T_0)) \le T_0 \min(1, -\log r'),$$

où $T = [c \cdot \operatorname{card} \mathcal{D}] + 1$, $T_0 = [\operatorname{card} \mathcal{D}/(2[K:\mathbb{Q}])]$ *et* $r = 1 - 2(\log \varphi_{\mathcal{D}}(T))/T$. *Alors*, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{P}_m(\overline{\mathbb{Q}})$ *satisfaisant*

$$(5) \qquad 33\biggl(\delta(h(\alpha) + \log(4\|\theta\|)) + 2\tau + \frac{\log \varphi_{\mathcal{D}}(T)}{[K:\mathbb{Q}]} + \log(8T) + \log \operatorname{card} S\biggr) d(\alpha) < -\frac{T_0 \log r'}{[K:\mathbb{Q}]},$$

on a

$$(6) \qquad \log \operatorname{Dist}(\theta, \alpha) \ge -\operatorname{card} \mathcal{D} \cdot (c' \log r'' + 2c \log r').$$

Analyse des données

Paramètres primaires
$A = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}_p$ $a = 1$, $\eta = 1$, $\eta_0 = 1$ ou 0
$d > n = 1$
$R = 1$
$\omega_1(r), \ldots, \omega_d(r)$
$S \cup (\mathbb{N} \times \{0\})$

Choix
$\mathcal{D} \in \mathcal{A}$, c-admissible
$S_{i+1} = \begin{cases} \{0, \ldots, T_0 - 1\} \times \{0\} & \text{si } i = 0 \\ S & \text{si } i = 1 \\ \{(i + T_0 - 2, 0)\} & \text{si } i = 2, \ldots, T - T_0 + 2 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$
$S'_i = \bigcup_{j=1}^{i} S_j$

Matrice des approximations. La matrice $\underline{f}^{\mathcal{D}}(S)$ est produit d'une matrice triangulaire $\mathcal{T}$ et d'une matrice $\mathcal{R}$ à coefficients dans $\mathcal{K}$. On obtient la matrice $M_{\mathcal{D}}$ des approximations en spécialisant θ en α dans $\mathcal{R}$ et en lui adjoignant les colonnes de $\underline{f}^{\mathcal{D}}(\{0, \ldots, T\} \times \{0\})$ (à coefficients dans K).

On a $\operatorname{card} S_1 = T_0$, $\delta(0) = [K:\mathbb{Q}]$, $\phi(0) = \varrho(0) = (\log \varphi_{\mathcal{D}}(T_0))/[K:\mathbb{Q}]$ et on calcule les paramètres secondaires (voir tableau). Posons $U = -\log \operatorname{Dist}(\theta, \alpha)$ et supposons $U > 3(\tau + \delta \log(4\|\theta\|))$.

Paramètres secondaires	$i=1$	$2 \le i \le T - T_0 + 2$
K_{i+1}	$K(\alpha)$	K
$\delta(i)$	$[K:\mathbb{Q}]\cdot d(\alpha)$	$[K:\mathbb{Q}]$
$\phi(i)=\varrho(i)$	$\delta h(\alpha)+2\tau$	$\log\varphi_{\mathcal{D}}(T)/[K:\mathbb{Q}]$
$r'(i)$	${r'}^{1/2}$	
$r(i)$	$r_0 = 1-2(\log\varphi_{\mathcal{D}}(T_0))/T_0$	$r = 1-2(\log\varphi_{\mathcal{D}}(T))/T$
$\mathcal{D}\varpi(r(i))$	$\le \log(T_0+\varphi_{\mathcal{D}}(T_0))$	$\le \log(T+\varphi_{\mathcal{D}}(T))$
$N(i)$	T_0	$T+\operatorname{card} S$
$-\log E(i)$	$-\frac{1}{4}T_0\log r' - 3\log\varphi_{\mathcal{D}}(T_0)$	$-\log E_{r,\sqrt{r'}}(S) - 3\log\varphi_{\mathcal{D}}(T)$
$U(i)$	$(U+T_0\log r')/(d(\alpha)[K:\mathbb{Q}])$	$U+T_0\log r' + T(\log r' + (c'/c)\log r'')$
Δ_i	$\le (a+2)\log(2(\operatorname{card}\mathcal{D}+T+\operatorname{card} S))$	

Majoration de la croissance $\mathcal{D}\varpi$. Soit $t_0 \in \mathbb{N}^*$, $r_0 = 1-(2\log\varphi_{\mathcal{D}}(t_0))/t_0$ et on écrit, pour $\mu \in \mathcal{D}$,

$$M(\underline{f}^\mu; r_0) \le \sum_{t\ge 0} |D_t \underline{f}^\mu(0)| r_0^t \le \varphi_{\mathcal{D}}(t_0) + \sum_{t>t_0} \varphi_{\mathcal{D}}(t)\varphi_{\mathcal{D}}(t_0)^{-2t/t_0}$$
$$\le \varphi_{\mathcal{D}}(t_0) + \sum_{t>t_0} \varphi_{\mathcal{D}}(t_0)^{-t/t_0}$$

car $\varphi_{\mathcal{D}}(t)^{1/t}$ est décroissante, puis

$$M(\underline{f}^\mu; r_0) \le \varphi_{\mathcal{D}}(t_0) + \frac{\varphi_{\mathcal{D}}(t_0)^{-1}}{1-\varphi_{\mathcal{D}}(t_0)^{-1/t_0}}$$
$$\le \varphi_{\mathcal{D}}(t_0) + \frac{t_0}{\log\varphi_{\mathcal{D}}(t_0)} \le \varphi_{\mathcal{D}}(t_0) + t_0.$$

Calcul de $E(i)$ pour $i=1$. On a

$$E(i) = \left(\frac{r'^{1/2}}{r(i)}\right)^{T_0} H_{\sqrt{r'}}(S)$$

et on vérifie $r(i)^{T_0} \ge \exp(-3\log\varphi_{\mathcal{D}}(T_0))$ grâce à (4). Enfin, $H_{\sqrt{r'}}(S) \le (\sqrt{r'}-\eta_0 r')^{m(S)}$ et la condition (1) entraîne $\log H_{\sqrt{r'}}(S) \le \frac{1}{4}T_0\log r'$.

Calcul de $E(i)$ pour $i=2,\dots,T-T_0+2$. On a

$$E(i) = E_{r(i),r'(i)}(S)\left(\frac{r'(i)}{r(i)}\right)^{i+T_0-2} r'(i)^{-(i+T_0-2)}$$

et on vérifie $r(i)^{-i-T_0+2} \le \varphi_{\mathcal{D}}(T)^3$ grâce à (4).

Calcul de $\phi(i)$ pour $i=1$ et $U(i)$. En spécialisant θ en α dans une famille de polynômes q, $p_{l,c}$ ($l=1,\dots,\operatorname{card}\mathcal{D}$, $c=1,\dots,\operatorname{card} S$) de degré et taille convenables qui décrivent la famille des coefficients de $\mathcal{R}$, on obtient des éléments de $K(\alpha)$ de hauteur $\le \delta h(\alpha) + h(q,\underline{p}) \le \delta h(\alpha) + \tau$ où $\underline{p} = (p_{l,c})$. Compte tenu de l'estimation des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire $\mathcal{T}$, cela donne la majoration de $\phi(i) = \varrho(i)$.

Le calcul de $U(i)$ ne fait intervenir que les approximations des vecteurs $D_t \underline{f}^{\mu}(y)$ pour $\mu \in \mathcal{D}$ et $(t,y) \in S$, les coefficients des autres colonnes étant dans K. Le corps $K(\alpha)$ est considéré comme sous-corps de C par un plongement σ_0; nous notons σ les conjugués de ce plongement. Comme $\mathrm{Dist}(\theta,\alpha) \le (4\|\theta\|)^{-\delta}\mathrm{e}^{-\tau}$ on a $\|\alpha\| \le 2\|\theta\|$, $|q(\alpha)| \ge |q(\theta)|/2$ et on écrit $p_{l,c}(\theta)q(\alpha) - q(\theta)p_{l,c}(\alpha)$ en développant $\alpha = (\alpha-\theta)+\theta$. En notant c l'indice de la colonne $D_t \underline{f}^{\mathcal{D}}(y)$ dans la matrice $\underline{f}^{\mathcal{D}}(S)$, p_c le vecteur colonne $(p_{l,c})_{l=1,\ldots,\mathrm{card}\,\mathcal{D}}$ et $\lambda_{c',c}$ les coefficients de $\mathcal{T}$ correspondants, il vient, pour tout plongement σ de $K(\alpha)$ dans C,

$$\log\Big|D_t \underline{f}^{\mathcal{D}}(y) - \sum_{c'=1}^{c} \lambda_{c',c}\sigma\Big(\frac{p_c(\alpha)}{q(\alpha)}\Big)\Big| \le -U^{\sigma}$$

où

$$\begin{aligned} -U^{\sigma_0} &\le \log|\alpha-\theta| + \log\Big(\sum_{c'=1}^{c}|\lambda_{c',c}|\Big) + \log\|(q,\underline{p})\| \\ &\qquad + \max(d^\circ q, d^\circ \underline{p})\log(4\|\theta\|\cdot\|\alpha\|) - \log|q(\alpha)| - \log|q(\theta)| \\ &\le \log \mathrm{Dist}(\theta,\alpha) + 4(\log\|(q,\underline{p})\| + \delta\log(4\|\theta\|\cdot\|\alpha\|) + \tau + \log\mathrm{card}\,S) \end{aligned}$$

et, pour $\sigma \ne \sigma_0$,

$$\begin{aligned} -U^{\sigma} &\le \log\Big(\sum_{c'=1}^{c}|\lambda_{c',c}|\Big) + \log\|\sigma(q,\underline{p})\| + \max(d^\circ q, d^\circ \underline{p})\log(4\|\theta\|\cdot\|\sigma(\alpha)\|) \\ &\le 4(\log\|\sigma(q,\underline{p})\| + \delta\log(4\|\theta\|\cdot\|\sigma(\alpha)\|) + \tau + \log\mathrm{card}\,S). \end{aligned}$$

Dans ces estimations on a utilisé

$$|D_t \underline{f}^{\mathcal{D}}(y)| = \Big|\sum_{c'=1}^{c}\lambda_{c',c}\frac{p_c(\theta)}{q(\theta)}\Big| \le \mathrm{card}\,S\cdot \mathrm{e}^{3\tau}\|\theta\|^{2\delta}.$$

En sommant, il vient

$$\begin{aligned} \delta(i)U(i) &= \sum_{\sigma} U^{\sigma} \\ &\ge U - 4[K:\mathbb{Q}]d(\alpha)(\delta h(\alpha) + \delta\log(4\|\theta\|) + 2\tau + \log\mathrm{card}\,S), \end{aligned}$$

mais d'après la condition principale (5) le second terme du membre de droite est majoré par $-T_0\log r'$, d'où l'estimation de $U(i)$ pour $i=1$. Pour $i>1$ et chaque plongement de K dans C on utilise la première estimation. De plus, la condition (3) majore $\log(G_{r(i),r'(i)}(S'_i)H_{r'(i)}(S_{i+1}))$ par $-T\log r' - (c'/c)T\log r''$ et on en déduit comme précédemment l'estimation de $U(i)$ pour $i>1$.

Si la matrice $M_{\mathcal{D}}$ n'était pas de rang $\operatorname{card}\mathcal{D}$ il existerait une combinaison linéaire non triviale de ses lignes, c'est-à-dire un polynôme $Q \in C[X_1, \ldots, X_d]$ non nul, s'annulant sur tous les $m_{i+1,(t,y)}$, $(t, y) \in S \cup (\{0, \ldots, T\} \times \{0\})$. En particulier on aurait $\operatorname{ord}_0 Q(f_1, \ldots, f_d) > T$; mais l'ensemble $\mathcal{D}$ est c-admissible, $T = [c \cdot \operatorname{card}\mathcal{D}] + 1$ entraîne que ceci n'est pas possible et la matrice $M_{\mathcal{D}}$ est de rang $\operatorname{card}\mathcal{D}$. Par ailleurs $2\delta(0)\operatorname{card} S_1 \le \operatorname{card}\mathcal{D}$ et le théorème 1 de [6] montre l'existence d'un entier $i \ge 1$ tel que la condition C_1 suivante soit réalisée :

$$\min(-\log E(i) - \mathcal{D}\varpi(r(i)), \delta(i)U(i)) \le \delta(i)((a+1)(\phi(i)+\phi(0)) + \Delta_i + \Delta_0).$$

Condition C_1 pour $i = 1$. Le membre de droite est majoré par

$$4[K:\mathbb{Q}]d(\alpha)\left(\delta h(\alpha) + 2\tau + \frac{\log\varphi_{\mathcal{D}}(T)}{[K:\mathbb{Q}]} + \log(8T) + \log\operatorname{card} S\right),$$

d'après les conditions (5) et (4) il est donc plus petit que

$$-\tfrac{1}{8}T_0\log r' \le -\tfrac{1}{4}T_0\log r' - 4\log(T_0 + \varphi_{\mathcal{D}}(T_0)) \le -\log E(1) - \mathcal{D}\varpi(r(1)).$$

Ainsi lorsque la condition C_1 est réalisée pour $i = 1$ on obtient une majoration de $U + T_0\log r'$ par $-\frac{1}{8}T_0\log r'$, qui entraîne le résultat.

Condition C_1 pour $i = 2, \ldots, T - T_0 + 2$. Le membre de droite est majoré par

$$8[K:\mathbb{Q}]\left(\frac{\log\varphi_{\mathcal{D}}(T)}{[K:\mathbb{Q}]} + \log(8T) + \log\operatorname{card} S\right) \le -\frac{T_0\log r'}{4d(\alpha)}$$

d'après la condition principale (5), et la condition (2) entraîne qu'il est plus petit que $-\log E_{r,\sqrt{r'}}(S) - 4\log(T + \varphi_{\mathcal{D}}(T))$. Ainsi lorsque la condition C_1 est réalisée pour $i > 1$ on obtient une majoration de $U + T_0\log r' + T(\log r' + (c'/c)\log r'')$ par $-T_0\log r'/(4d(\alpha))$, qui entraîne à nouveau le résultat.

Application. Prenons $d = 4$, $f_4(z) = z$ et

$$f_i(z) = 1 + \gamma_i \sum_{k\ge 1}\Big(\sum_{l|k} l^{2i-1}\Big)z^k, \qquad i = 1, 2, 3,$$

avec $\gamma_1 = -24$, $\gamma_2 = 240$ et $\gamma_3 = -504$, les séries d'Eisenstein. On a un système de K-fonctions de type φ où $\varphi_{\mathcal{D}}(t) \le (504\zeta(5)t^6)^{|\mathcal{D}|}$ car $\sum_{l|k} l^{2i-1} \le \zeta(2i-1)k^{2i-1}$. De plus le lemme de multiplicité de [3] (théorème 3) montre que toute partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^4$ de la forme $\{\mu \in \mathbb{N}^4 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 < D,\ \mu_4 < D\log D\}$ est c-admissible pour $\underline{f}$ et un réel $c > 0$ convenable. Soit D un entier assez grand; on applique le théorème 4 avec $S = \{0, \ldots, N-1\} \times \{y\}$ où $y \in C$ satisfait $0 < |y| < 1$ et

$$N = \left[\frac{c_{16}D\log D}{-\log E_{r,\sqrt{r'}}(y)}\right].$$

On prend $r' = r'' = |y|$, on a $E_{r,\sqrt{r'}}(S) = E_{r,\sqrt{r'}}(y)^N$, $G_{r,\sqrt{r'}}(S) \leq 2^N$ pour $r = 1 - c_{17}(\log D)/D^3$, $T_0 = [D^4 \log D/2]$, $T = [cD^4 \log D] + 1$ et on vérifie les conditions (1)–(4) du théorème. Enfin, on déduit du système d'équations différentielles satisfait par les séries $\underline{f}$:

$$\begin{aligned} 12zf_1'(z) &= f_1(z)^2 - f_2(z), \\ 3zf_2'(z) &= f_1(z)f_2(z) - f_3(z), \\ 2zf_3'(z) &= f_1(z)f_3(z) - f_2(z)^2, \\ zf_4'(z) &= f_4(z), \end{aligned} \tag{7}$$

que la matrice $\underline{f}^{\mathcal{D}}(S)$ est produit d'une matrice diagonale (dont les coefficients sont des puissances $< N$ de y^{-1}) et d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}(f_1(y), f_2(y), f_3(y), y)$ de degré $\leq c_{18}D \log D$ et taille $\leq c_{18}D(\log D)^2$. En effet, si $D = zd/dz$ on a, pour toute fonction f,

$$z^t \frac{d^t f}{dz^t} = D^t f - \sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} z^i \frac{d^i f}{dz^i} \tag{8}$$

où $a_{i,t} \in \mathbb{N}$ satisfont $a_{i,t} = 0$ si $i \notin \{1, \ldots, t\}$ et $a_{i,t} = ia_{i,t-1} + a_{i-1,t-1}$ sinon, pour $t > 0$. En particulier, on a $a_{i,t} \leq c_{19}t^{3(t-i)}$. Le système différentiel (7) montre que si f désigne un monôme $\underline{f}^{\mu}$, $\mu \in \mathcal{D}$, alors $D^t f$ s'écrit comme un polynôme de $\mathbb{Q}[\underline{f}]$ de degré $\leq D + t$ en f_1, f_2, f_3, de degré $\leq D \log D$ en f_4 et de hauteur $\leq c_{20}(D \log D + t) \log(D + t)$. Et la même assertion pour $z^t d^t f/dz^t$ suit par récurrence sur t de (8). Soit $\alpha \in \mathbb{P}_4(\overline{\mathbb{Q}})$; en choisissant

$$D = c_{21}(t(\alpha)d(\alpha))^{1/3}$$

où on a posé $t(\alpha) = h(\alpha) + \log d(\alpha)$, de sorte que la condition (5) du théorème est satisfaite, on obtient $\log \mathrm{Dist}(\theta, \alpha) \geq -c_{22}D^4 \log D$.

Corollaire 5. *Soit $y \in C$, $0 < |y| < 1$ et $\theta = (1 : f_1(y) : f_2(y) : f_3(y) : y) \in \mathbb{P}_4(C)$. Il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{P}_4(\overline{\mathbb{Q}})$ on ait*

$$\mathrm{Dist}(\theta, \alpha) \geq \exp(-c(t(\alpha)d(\alpha))^{4/3} \log(t(\alpha)d(\alpha)))$$

où $t(\alpha) = h(\alpha) + \log d(\alpha)$.

En spécialisant ce corollaire en $y = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\tau} \in \mathbb{C}$ où τ est le quotient des périodes fondamentales d'une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ on obtient une mesure d'approximation des points $(1 : \pi/\omega : \eta/\omega : \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\tau}) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Remarquons que cette mesure n'est pas assez fine pour exclure que les nombres π/ω et η/ω soient des nombres de Liouville (contrairement au théorème 1 du paragraphe 1). Elle améliore toutefois celle présentée dans [6] et on en déduirait également, en étendant le lemme 3, une amélioration du théorème 3 de [7].

Références

[1] G. V. Chudnovsky, *Contributions to the Theory of Transcendental Numbers*, Math. Surveys Monographs 19, Amer. Math. Soc., 1984.

[2] E. M. Jabbouri, *Sur un critère pour l'indépendance algébrique de P. Philippon*, dans : Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy 1990), de Gruyter, 1992, 195–202.

[3] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Mat. Sb. 187 (1996), no. 9, 65–96 (in Russian); English transl.: Russian Acad. Sci. Sb. Math. 187 (1996), 1319–1348.

[4] G. Philibert, *Une mesure d'indépendance algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), no. 3, 85–103.

[5] P. Philippon, *Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Rocky Mountain J. Math. 26 (1996), 1069–1088.

[6] —, *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques*, J. Number Theory 64 (1997), 291–338.

[7] —, *Indépendance algébrique et K-fonctions*, J. Reine Angew. Math. 497 (1998), 1–15.

[8] —, *Approximations algébriques des points dans les espaces projectifs*, J. Number Theory, à paraître.

[9] E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 47–79.

UMR 7586 du CNRS–Problèmes Diophantiens
Université P. & M. Curie
T. 46-56, 5ème ét.
F-75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: pph@math.jussieu.fr

Reçu le 5.5.1997
et révisé le 15.7.1998 (3178)