ACTA ARITHMETICA
LXXXV.4 (1998)

Условия ортогональности на конечных отрезках для функций $\pi(x)$, $R(x)$ входящих в закон простых чисел

Ян Мозер (Братислава)

Введение. Напомним следующую формулу для $\pi(x)$:

$$\ln\zeta(s)=\int_2^\infty \frac{s}{x^s-1}\cdot\frac{\pi(x)}{x}\,dx,\qquad s=\sigma+it,\ \sigma>1,$$

существующую в теории дзета-функции Римана. В связи с этой формулой в предлагаемой работе изучается функциональная матрица интегралов

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \displaystyle\int_2^P \operatorname{Re}\left\{\frac{1/2+it}{x^{1/2+it}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx, & \displaystyle\int_2^P \operatorname{Im}\left\{\frac{1/2+it}{x^{1/2+it}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx,\\ \displaystyle\int_2^P \operatorname{Re}\left\{\frac{1/2+it}{x^{1/2+it}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx, & \displaystyle\int_2^P \operatorname{Im}\left\{\frac{1/2+it}{x^{1/2+it}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx, \end{array}$$

соответствующих произведению матриц

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi(x)}{x} \\ \frac{R(x)}{x} \end{pmatrix}\cdot(\operatorname{Re}\{\ldots\},\operatorname{Im}\{\ldots\})$$

для $t\in\langle T,T+H\rangle$, где

$$(2)\qquad P=[(\ln P_0)^{1-\varepsilon}],\qquad P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\qquad H\in\langle P^4,\sqrt{T}\rangle$$

(ε — сколь угодно малое положительное число; условие $H\le\sqrt{T}$ выражает лишь стремление к локализации) и $\pi(x)$, $R(x)$ — функции входящие в формулу

$$(3)\qquad \pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}+R(x).$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11M06.

Так как интегралы (1) соответствуют конечному отрезку $\langle 2, P\rangle$ переменной x и конечному отрезку $1/2+it$, $t\in\langle T, T+H\rangle$, критической прямой, то эти интегралы являются совершенно недоступными для теории основанной на дзета-функции Римана (даже в предположении справедливости гипотезы Римана).

Однако в этом направлении получены следующие канонические свойства функций $\pi(x)$, $R(x)$. При некоторых условиях:

(А) для всех достаточно больших целых P существуют такие конечные множества $\{t^{(1)}(P)\}$, $\{t^{(2)}(P)\}$ значений $t^{(1)}, t^{(2)}\in\langle T, T+H\rangle$, что

$$\int_2^P \mathrm{Re}\left\{\frac{1/2+it^{(1)}}{x^{1/2+it^{(1)}}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx=0,$$

$$\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{1/2+it^{(2)}}{x^{1/2+it^{(2)}}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx=0;$$

(Б) существует бесконечная последовательность $\{\overline{P}\}$ целых чисел и такие конечные множества $\{t^{(3)}(\overline{P})\}$, $\{t^{(4)}(\overline{P})\}$ значений $t^{(3)}, t^{(4)}\in\langle T, T+H\rangle$, что

$$\int_2^{\overline{P}} \mathrm{Re}\left\{\frac{1/2+it^{(3)}}{x^{1/2+it^{(3)}}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx=0,$$

$$\int_2^{\overline{P}} \mathrm{Im}\left\{\frac{1/2+it^{(4)}}{x^{1/2+it^{(4)}}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx=0.$$

Замечание 1. Полученные условия в случае $P=\overline{P}$ можно назвать комбинированными условиями ортогональности для функций $\pi(x)$, $R(x)$, $x\in\langle 2,\overline{P}\rangle$.

Доказательство результатов опирается на функцию $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ (родственную функции $\widetilde{\zeta}(s)$, см. [2]), которая определена (см. (9)) при помощи частичного произведения Эйлера

$$\prod_{p\le P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

(p пробегает простые числа), для которой справедлив аналог гипотезы Римана (см. Лемму 1).

Замечание 2. Удивительным является то обстоятельство, что основную роль в доказательстве играют не критические нули $1/2+i\gamma_\nu$ функции $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$, а корни η некоторых других трансцендентных уравнений.

1. Основные результаты. Справедлива

Теорема 1. *При условиях* (2), *для любого достаточно большого целого P, любого*

$$a = a(P) \in \langle -M_1, M_1 \rangle, \qquad M_1 = M_1(P) = \frac{\sqrt{P}}{\ln P \cdot \ln\ln\ln P}, \tag{4}$$

и сколь угодно малого ε существуют конечные множества $\{\eta^{(1)}\}$, $\{\eta^{(2)}\}$ значений

$$\eta^{(k)} = \eta^{(k)}(P, a, \varepsilon) \in \langle T, T+H \rangle, \qquad k = 1, 2,$$

таких, что

$$\begin{aligned} &\int_2^P \mathrm{Re}\left\{\frac{1/2 + i\eta^{(1)}(a)}{x^{1/2+i\eta^{(1)}(a)} - 1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx = a, \\ &\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{1/2 + i\eta^{(2)}(a)}{x^{1/2+i\eta^{(2)}(a)} - 1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx = a; \end{aligned} \tag{5}$$

при этом число элементов каждого из этих множеств по меньшей мере $A(\varepsilon)H \ln\ln P_0$.

В случае $a = 0$ из (5) получаются условия ортогональности:

Следствие 1.

$$\int_2^P \mathrm{Re}\left\{\frac{1/(2\eta^{(1)}) + i}{x^{1/2+i\eta^{(1)}} - 1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx = 0,$$

$$\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{1/(2\eta^{(2)}) + i}{x^{1/2+i\eta^{(2)}} - 1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx = 0,$$

где $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}(P, 0, \varepsilon)$, $\eta^{(2)} = \eta^{(2)}(P, 0, \varepsilon)$.

Следствие 2. *Функция $\pi(x)$, $x \in \langle 2, P \rangle$, является решением однородных интегральных уравнений*

$$\int_2^P \mathrm{Re}\left\{\frac{1/(2\eta^{(1)}) + i}{x^{1/2+i\eta^{(1)}} - 1}\right\}\frac{\Phi(x; P, \eta^{(1)})}{x}\,dx = 0,$$

$$\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{1/(2\eta^{(2)}) + i}{x^{1/2+i\eta^{(2)}} - 1}\right\}\frac{\Phi(x; P, \eta^{(2)})}{x}\,dx = 0,$$

где $\{\eta^{(1)}\}$, $\{\eta^{(2)}\} \subset \langle T, T+H \rangle$ — дискретные множества параметров (корней некоторых трансцендентных уравнений).

Поскольку

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1/(2t)+i}{x^{1/2+it}-1}\right\} = \frac{\sqrt{x}\sin(t\ln x) + (1/(2t))\{\sqrt{x}\cos(t\ln x) - 1\}}{x+1-2\sqrt{x}\cos(t\ln x)},$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1/(2t)+i}{x^{1/2+it}-1}\right\} = \frac{\sqrt{x}\cos(t\ln x) - 1 - (\sqrt{x}/(2t))\sin(t\ln x)}{x+1-2\sqrt{x}\cos(t\ln x)},$$

то делаем

Замечание 3. При любом достаточно большом целом P, существует конечная система функций

$$K_1(u;\eta^{(1)}) = \frac{e^{u/2}\sin(\eta^{(1)}u) + (1/(2\eta^{(1)}))\{e^{u/2}\cos(\eta^{(1)}u) - 1\}}{e^u+1-2e^{u/2}\cos(\eta^{(1)}u)}$$

и конечная система функций

$$K_2(u;\eta^{(2)}) = \frac{e^{u/2}\cos(\eta^{(2)}u) - 1 - (e^{u/2}/(2\eta^{(2)}))\sin(\eta^{(2)}u)}{e^u+1-2e^{u/2}\cos(\eta^{(2)}u)}$$

ортогональных функции $\pi(e^u)$, $u\in\langle\ln 2,\ln P\rangle$ (см. Следствие 1).

Конечно, из системы

$$\{K_1(u;\eta^{(1)})\}\cup\{K_2(u;\eta^{(2)})\}$$

(например), можно выделить линейно независимую систему и по методу ортогонализации Гильберта–Шмидта построить ортонормированную систему. С этим связана возможность аппроксимировать (например) функцию $R(e^u)$, $u\in\langle\ln 2,\ln P\rangle$, в смысле среднего квадратического соответствующим «тригонометрическим полиномом» построенным по функциям ортогональным функции $\pi(e^u)$, $u\in\langle\ln 2,\ln P\rangle$.

Далее отметим, что существует бесконечная последовательность $\{\overline{P}\}$ целых положительных чисел, для которых имеет место оценка

$$|R(\overline{P})| \le \sqrt{\overline{P}\frac{\ln\ln\overline{P}}{\ln\ln\ln\overline{P}}}. \tag{6}$$

Действительно, поскольку (см. (3), P — целое)

$$R'(x) = -\frac{1}{\ln x},\qquad x\in(P,P+1),\qquad R(P+0)-R(P-0) = 0,1,$$

то оценка (6) следует из теоремы Литтлвуда о бесконечности множества изменений знака функции $R(x)$, $x\to\infty$.

Справедлива

Теорема 2. *При условиях* (2) *для любого достаточно большого* $\overline{P}$, *любого*

$$b = b(\overline{P}) \in \langle -M_2, M_2 \rangle, \qquad M_2 = M_2(\overline{P}) = \sqrt{\frac{\ln\ln \overline{P}}{\ln\ln\ln \overline{P}}}, \tag{7}$$

сколь угодно малого ε и $\delta \in (0, 1/3)$ существуют конечные множества $\{\eta^{(3)}\}$, $\{\eta^{(4)}\}$ значений

$$\eta^{(k)} = \eta^{(k)}(\overline{P}, b, \varepsilon, \delta) \in \langle T, T+H \rangle, \qquad k = 3, 4,$$

таких, что

$$\begin{aligned} &\int_2^{\overline{P}} \mathrm{Re}\left\{ \frac{1/2 + i\eta^{(3)}(b)}{x^{1/2+i\eta^{(3)}(b)} - 1} \right\} \frac{R(x)}{x}\, dx = b, \\ &\int_2^{\overline{P}} \mathrm{Im}\left\{ \frac{1/2 + i\eta^{(4)}(b)}{x^{1/2+i\eta^{(4)}(b)} - 1} \right\} \frac{R(x)}{x}\, dx = b; \end{aligned} \tag{8}$$

при этом число элементов каждого из этих множеств по меньшей мере $H(\ln\ln P_0)^{1/3-\delta}$.

Замечание 4. Конечно, из Теоремы 2 получаются аналоги Следствий 1, 2 и Замечания 3. Явно отметим лишь условия ортогональности

$$\int_2^{\overline{P}} \mathrm{Re}\left\{ \frac{1/(2\eta^{(3)}) + i}{x^{1/2+i\eta^{(3)}} - 1} \right\} \frac{R(x)}{x}\, dx = 0,$$

$$\int_2^{\overline{P}} \mathrm{Im}\left\{ \frac{1/(2\eta^{(4)}) + i}{x^{1/2+i\eta^{(4)}} - 1} \right\} \frac{R(x)}{x}\, dx = 0.$$

Пусть далее

$$Q_1 = [A(\varepsilon) H \ln\ln P_0], \qquad Q_2 = [H(\ln\ln P_0)^{1/3-\delta}].$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(1 - x^{-1/2-it}) = \frac{1/2 + it}{x^{1/2+it} - 1} \cdot \frac{1}{x},$$

то по теоремам 1, 2 получается следующее расширение условий ортогональности.

Следствие 3. *Существует по меньшей мере $Q_1 - l$ значений $\eta_l^{(1)}(a) \in \langle T, T+H \rangle, \ldots$ (конечное множество при фиксированных a, b), для которых имеют место следующие условия ортогональности*:

$$\int_2^P \frac{\partial^{l+1}}{\partial x \partial t^l} \mathrm{Re}\{\ln(1 - x^{-1/2-it})\}\Big|_{t=\eta_l^{(1)}(a)} \cdot \pi(x)\, dx = 0,$$

$$l = 0, 1, \ldots, Q_1 - 1, \ldots$$

Но, поскольку $a \in \langle -M_1, M_1\rangle, \dots$, то в целом получается бесконечная система мощности *континуума* условий ортогональности для $\pi(x)$, $x \in \langle 2, P\rangle$ и $R(x)$, $x \in \langle 2, \overline{P}\rangle$ (надо исключить повторяющиеся условия, если они существуют).

Замечание 5. По Теоремам 1, 2 можно, например, образовать еще и другие бесконечные множества мощности континуума условий ортогональности: образованием разностей [сумм] двух различных формул Теоремы 1 при любом $a \in \langle -M_1, M_1\rangle$ $[a, -a \in \langle -M_1, M_1\rangle], \dots$ (нужно исключить тривиальные условия ортогональности соответствующие произведениям $0\cdot\pi(x)$, $0\cdot R(x)$ как и повторяющиеся условия, если они существуют).

2. Функция $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ и формула для $\pi(x)$. В работе [2] был введен, по существу, целый класс функций типа $\widetilde{\zeta}(s)$. Пусть, например,

$$\begin{aligned} \widetilde{\zeta}_{-1}(s) &= \prod_{p\le P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) + \chi(s)\prod_{p\le P}\left(1-\frac{1}{p^{1-s}}\right) \\ &= \sideset{}{'}\sum_{n<P_0}\frac{\mu(n)}{n^s} + \chi(s)\sideset{}{'}\sum_{n<P_0}\frac{\mu(n)}{n^{1-s}}, \qquad s\neq 2k+1,\ k=0,1,2,\dots, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса и P, P_0 удовлетворяют условиям (2).

Напомним, что функция $\widetilde{\zeta}(s)$ оказалась «частью $\zeta(s)$», т.е. частью приближенного функционального уравнения для $\zeta(s)$. Функция же $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ не является «частью $\zeta(s)$» в этом смысле слова, но она, в свою очередь, построена из частей произведения Эйлера. Следовательно, функция $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ сохраняет полнокровное родство с функцией $\zeta(s)$.

Пусть

$$D = D(T,H,K) = \{s : \sigma \in \langle -K, K\rangle,\ t \in \langle T, T+H\rangle\}, \qquad K>1.$$

Справедлива

Лемма 1. *Для всех достаточно больших T,*

$$\widetilde{\zeta}_{-1}(s) \neq 0, \qquad s\in D, \qquad \sigma\neq 1/2,$$

т.е. для $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$, $s\in D$, $T\to\infty$ справедлив аналог гипотезы Римана.

Доказательство этого утверждения получается по образцу доказательства аналогичной теоремы для функции $\widetilde{\zeta}(s)$ в [2]. Только, в силу отсутствия зависимости $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ от β оно несколько упрощается.

Свойства нулей функции $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ на критической прямой $\sigma = 1/2$, т.е. нулей функции

$$e^{i\vartheta(t)}\widetilde{\zeta}_{-1}(1/2+it)=\widetilde{Z}_{-1}(t;P), \qquad t\in\langle T,T+H\rangle, \tag{10}$$

где

$$\chi(1/2+it)=e^{-i2\vartheta(t)}, \qquad \vartheta(t)=\frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{11}$$

следуют теперь из формулы (см. (9), (11))

$$\widetilde{Z}_{-1}(t;P)=2B_{-1}(t;P)\cos\{\vartheta(t)+C_{-1}(t;P)\}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} B_{-1}(t)&=\prod_{p\le P}\left|1-\frac{p^{-it}}{\sqrt{p}}\right|=\exp\left(\mathrm{Re}\left\{\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{p^{-it}}{\sqrt{p}}\right)\right\}\right),\\ C_{-1}(t)&=\sum_{p\le P}\arg\left(1-\frac{p^{-it}}{\sqrt{p}}\right)=\mathrm{Im}\left\{\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{p^{-it}}{\sqrt{p}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, нуль $\gamma_\nu=\gamma_\nu^{-1}(P)$ функции $\widetilde{Z}_{-1}(t;P)$ определен соотношением (см. (12))

$$\vartheta(\gamma_\nu)+C_{-1}(\gamma_\nu)=\pi\nu+\pi/2, \qquad \nu=1,2,\dots \tag{14}$$

Из (14) легко получается

Лемма 2. *Для последовательных нулей $\varrho_\nu=1/2+i\gamma_\nu$, $\varrho_{\nu+1}=1/2+i\gamma_{\nu+1}$ функции $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ имеет место асимптотическая формула*

$$\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu=\frac{\pi}{\ln P_0}+O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{3/2}}\right\}, \qquad \gamma_\nu,\gamma_{\nu+1}\in\langle T,T+H\rangle, \tag{15}$$

для $T\to\infty$.

Далее, справедлива

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$-\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{\varrho_\nu}{x^{\varrho_\nu}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx+\pi(P)\,\mathrm{Im}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right)\right\} = \vartheta[t_\nu(\pi/2)]-\vartheta(\gamma_\nu), \tag{16}$$

где $\gamma_\nu\in\langle T,T+H\rangle$, $H\le\sqrt{T}$ и $\{t_\nu(\pi/2)\}$ — последовательность удовлетворяющая условию (см. [1])

$$\vartheta[t_\nu(\pi/2)]=\pi\nu+\pi/2. \tag{17}$$

Доказательство. Формулу (14) запишем в форме (см. (13), (17))

$$\mathrm{Im}\left\{\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{1}{p^{\varrho_\nu}}\right)\right\}=\vartheta[t_\nu(\pi/2)]-\vartheta(\gamma_\nu). \tag{18}$$

Далее, по формуле

$$\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\varrho_\nu}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n^{\varrho_\nu}}\right)=\varrho_\nu\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x(x^{\varrho_\nu}-1)} \tag{19}$$

получаем

$$\begin{aligned}\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{1}{p^{\varrho_\nu}}\right) \\ &=\sum_{n=2}^{P}\{\pi(n)-\pi(n-1)\}\ln\left(1-\frac{1}{n^{\varrho_\nu}}\right)\\ &=\sum_{n=2}^{P-1}\pi(n)\left\{\ln\left(1-\frac{1}{n^{\varrho_\nu}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\varrho_\nu}}\right)\right\}\\ &\quad+\pi(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right)\\ &=-\varrho_\nu\int\limits_2^P\frac{\pi(x)}{x(x^{\varrho_\nu}-1)}\,dx+\pi(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Теперь из (18) в силу (19), (20) следует (16).

3. Формула для $R(x)$. Справедлива

Лемма 4. *Пусть*

$$U(x)=\int\limits_2^x\frac{du}{\ln u},\qquad x\in\langle 2,P\rangle. \tag{21}$$

Тогда при $\sigma\in\langle 1/2,K\rangle$ имеет место

$$\begin{aligned}s\int\limits_2^P U(x)\frac{dx}{x(x^s-1)}&=U(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right)\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int\limits_2^P\frac{dx}{x^{(n+1)s}\ln x}\\ &=U(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right)+O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{T}\right).\end{aligned} \tag{22}$$

Доказательство. Пусть

$$V(x)=V(x;s)=\int\limits_2^x\frac{dv}{v(v^s-1)}. \tag{23}$$

Тогда

$$(24)\qquad \int_2^P U(x)\frac{dx}{x(x^s-1)} = U(P)V(P) - \int_2^P \frac{V(x)}{\ln x}\,dx.$$

Так как суммированием соотношений (19) для $\varrho_\nu \to s$, $n=2,\dots,P-1$, получается формула

$$\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) = s\int_2^P \frac{dx}{x(x^s-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{2^s}\right),$$

то

$$(25)\qquad \begin{aligned} U(P)V(P) &= U(P)\int_2^P \frac{dx}{x(x^s-1)} \\ &= \frac{U(P)}{s}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Далее (см. (23)),

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_2^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v^{(n+1)s+1}}\,dv \\ &= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{(n+1)s}} - \frac{1}{x^{(n+1)s}}\right) \\ &= -\frac{1}{s}\ln\left(1-\frac{1}{2^s}\right) - \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)x^{(n+1)s}} \end{aligned}$$

и (см. (21))

$$(26)\qquad -s\int_2^P \frac{V(x)}{\ln x}\,dx = U(P)\ln\left(1-\frac{1}{2^s}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_2^P \frac{dx}{x^{(n+1)s}\ln x}.$$

Следовательно (см. (24)–(26)),

$$(27)\qquad \begin{aligned} s\int_2^P U(x)\frac{dx}{x(x^s-1)} &= U(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_2^P \frac{dx}{x^{(n+1)s}\ln x}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_2^P x^{-(n+1)s}\frac{dx}{\ln x} = \frac{1}{(n+1)s-1}\left\{\frac{1}{2^{(n+1)s-1}\ln 2} - \frac{1}{P^{(n+1)s-1}\ln P} - \int_2^P \frac{dx}{x^{(n+1)s}\ln^2 x}\right\}$$
$$= \frac{1}{(n+1)s-1}\{O(1)+O(\sqrt{P})+O(\sqrt{P})\}$$
$$= O\left\{\frac{\sqrt{P}}{(n+1)T}\right\},$$

то (см. (2))

$$\Omega(s;P) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_2^P\frac{dx}{x^{(n+1)s}\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} O\left\{\frac{\sqrt{P}}{(n+1)^2T}\right\} = O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{T}\right). \tag{28}$$

Теперь из (27) в силу (28) следует (22). Доказательство Леммы 4 закончено.

Полагая $\pi(x) = U(x) + R(x)$ (см. (3), (21)) в выражении

$$W = -\int_2^P \frac{\varrho_\nu}{x^{\varrho_\nu}-1}\cdot\frac{\pi(x)}{x}\,dx + \pi(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right), \tag{29}$$

по Лемме 4 ($s=\varrho_\nu$) получаем

$$W = -\int_2^P \frac{\varrho_\nu}{x^{\varrho_\nu}-1}\cdot\frac{R(x)}{x}\,dx + R(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right) - \varrho_\nu\int_2^P\frac{U(x)}{x(x^{\varrho_\nu}-1)}\,dx + U(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right)$$
$$= -\int_2^P \frac{\varrho_\nu}{x^{\varrho_\nu}-1}\cdot\frac{R(x)}{x}\,dx + R(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{T}\right). \tag{30}$$

Следовательно, нами доказана (см. (16), (29), (30))

Лемма 5. *При условиях* (2) *имеет место формула*

$$-\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{\varrho_\nu}{x^{\varrho_\nu}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx + R(P)\,\mathrm{Im}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_\nu}}\right)\right\} + O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{T}\right) = \vartheta[t_\nu(\pi/2)] - \vartheta(\gamma_\nu), \quad T\to\infty, \tag{31}$$

для $\gamma_\nu \in \langle T, T+H\rangle$.

Замечание 6. В модели основанной на функции $\widetilde{\zeta}_{-1}(s)$ эффект сближения интегральных уравнений для $\pi(x)$ и $R(x)$ — формула (31) получается из формулы (16) очень малым возмущением (28) — проявляется в более «чистой» форме чем в работе [2].

4. Обобщение основных формул. Пусть теперь $\{\gamma_{2\nu}(\alpha)\}$ — последовательность удовлетворяющая условию (ср. (14))

$$\vartheta[\gamma_{2\nu}(\alpha)] + C_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)] = 2\pi\nu + \alpha, \qquad \alpha\in\langle -\pi,\pi\rangle \tag{32}$$

(существование $\{\gamma_{2\nu}(\alpha)\}$ является следствием возрастания функции $\vartheta(t)+C_{-1}(t)$). Так как $\{\gamma_{2\nu}(\pi/2)\}\cup\{\gamma_{2\nu}(-\pi/2)\} = \{\gamma_\nu\}$, то $\{\gamma_{2\nu}(\alpha)\}$ является обобщением последовательности $\{\gamma_\nu\}$.

Отметим, что из (12) в случае $t=\gamma_{2\nu}(\alpha)$ получаем формулу

$$\widetilde{Z}_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha);P] = 2B_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha);P]\cos\alpha. \tag{33}$$

Из формулы (32) получаются следующие результаты (ср. Леммы 2, 3 и 5).

Лемма 6. *Для соседних членов последовательности* $\{\gamma_{2\nu}(\alpha)\}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\gamma_{2\nu+2}(\alpha) - \gamma_{2\nu}(\alpha) = \frac{2\pi}{\ln P_0} + O\left\{\frac{1}{(\ln P_0)^{3/2}}\right\}$$

для $\gamma_{2\nu}(\alpha), \gamma_{2\nu+2}(\alpha)\in\langle T,T+H\rangle$, $T\to\infty$.

Лемма 7. *При условиях* (2) *имеет место формула*

$$-\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{\varrho_{2\nu}(\alpha)}{x^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx + \pi(P)\,\mathrm{Im}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}}\right)\right\} = \vartheta[t_{2\nu}(\alpha)] - \vartheta[\gamma_{2\nu}(\alpha)],$$

где $\{t_{2\nu}(\alpha)\}$ *удовлетворяет условию* (см. [1])

$$\vartheta[t_{2\nu}(\alpha)] = 2\nu\pi + \alpha \tag{34}$$

и $\varrho_{2\nu}(\alpha) = 1/2 + i\gamma_{2\nu}(\alpha)$.

Лемма 8. *При условиях* (2) *имеет место формула*

$$-\int_2^P \mathrm{Im}\left\{\frac{\varrho_{2\nu}(\alpha)}{x^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx + R(P)\,\mathrm{Im}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}}\right)\right\}+\omega_1[\gamma_{2\nu}(\alpha)] = \vartheta[t_{2\nu}(\alpha)]-\vartheta[\gamma_{2\nu}(\alpha)], \tag{35}$$

где (см. (27), (28))

$$\Omega(s;P) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_2^P \frac{dx}{x^{(n+1)s}\ln x} = O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{T}\right),$$

$$\omega_1[\gamma_{2\nu}(\alpha)] = \omega_1[\gamma_{2\nu}(\alpha);P] = \mathrm{Im}\{\Omega[\varrho_{2\nu}(\alpha);P]\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_2^P\frac{\sin\{(n+1)\gamma_{2\nu}(\alpha)\ln x\}}{x^{(n+1)/2}}\,dx,$$

для $\gamma_{2\nu}(\alpha)\in\langle T,T+H\rangle$.

Пусть (см. (13))

$$D_{-1}(t) = \ln\{B_{-1}(t)\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{p^{-it}}{\sqrt{p}}\right)\right\}. \tag{36}$$

Так как из (33) следует формула

$$B_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)] = \frac{\widetilde{Z}_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)]}{2\cos\alpha}, \qquad \alpha\in\langle-\pi,\pi\rangle$$

(напомним, что $B_{-1}(t)>0$ и $\gamma_{2\nu}(\pm\pi/2)$ — нули функции $\widetilde{Z}_{-1}(t)$), то

$$D_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)] = \mathrm{Re}\left\{\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{p^{i\gamma_{2\nu}(\alpha)}}{\sqrt{p}}\right)\right\}. \tag{37}$$

Теперь из (37) в силу (20) следует

Лемма 9. *При условиях* (2) *имеет место формула*

$$-\int_2^P \mathrm{Re}\left\{\frac{\varrho_{2\nu}(\alpha)}{x^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}-1}\right\}\frac{\pi(x)}{x}\,dx+\pi(P)\,\mathrm{Re}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}}\right)\right\} = D_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)].$$

Отсюда, аналогично случаю Леммы 7 и Леммы 8, следует

Лемма 10. *При условиях* (2) *имеет место формула*

$$\begin{aligned}(38)\qquad -\int_2^P \operatorname{Re}\left\{\frac{\varrho_{2\nu}(\alpha)}{x^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}-1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx \\ + R(P)\operatorname{Re}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{P^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}}\right)\right\} + \omega_2[\gamma_{2\nu}(\alpha)] \\ = D_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)],\end{aligned}$$

где

$$\omega_2[\gamma_{2\nu}(\alpha)] = \omega_2[\gamma_{2\nu}(\alpha);P] = \operatorname{Re}\{\Omega[\varrho_{2\nu}(\alpha);P]\}.$$

5. Лемма о корнях первого трансцендентного уравнения

5.1. *Невозмущенное уравнение*. Пусть

$$\begin{aligned}(39)\qquad C_0(t) &= \sum_{p\le P}\frac{\sin(t\ln p)}{\sqrt{p}} + \sum_{p\le P}\frac{\sin(2t\ln p)}{2p} \\ &= C_1(t)+C_2(t), \qquad t\in\langle T, T+H\rangle,\end{aligned}$$

и $N_1[\langle T, T+H\rangle; C_0]$ обозначает число нулей функции $C_0(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$. Справедлива следующая

Лемма 11. *Пусть $H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle$ и $\delta \in (0, 1/3)$. Тогда при условиях* (2) *имеет место оценка*

$$(40)\qquad N_1 > H(\ln\ln P_0)^{1/3-\delta}, \qquad T\to\infty,$$

для любых допустимых фиксированных ε, δ.

Доказательство леммы получается точно по методу А. Сельберга ([3], стр. 21–26) доказательства теоремы о числе изменений знака известной (скачкообразной) функции $S(t)$. Напомним, что в [3] используется представление для $S(t)$ верное в предположении справедливости гипотезы Римана — обстоятельство не касающееся нашего случая. Следовательно, достаточно привести лишь основные формулы, соответствующие замене $S(t)\to C_0(t)$.

Поскольку (ср. [3], стр. 13, $k=1$, $x\to P$, стр. 14, (4.2))

$$\int_T^{T+H} \{C_1(t)\}^2\,dt = \frac{1}{2}H\ln\ln P + O(H), \qquad H \ge P^2,$$

и, аналогичным образом,

$$\int_T^{T+H}\{C_2(t)\}^2\,dt = O(H), \qquad \int_T^{T+H} C_1(t)C_2(t)\,dt = O(H\sqrt{\ln\ln P}),$$

то

$$\int\limits_T^{T+H} \{C_0(t)\}^2\,dt = \frac{1}{2}H\ln\ln P + O(H\sqrt{\ln\ln P}), \qquad H \geq P^2. \tag{41}$$

Далее (ср. [3], стр. 13, $k=2$, $x \to P$, стр. 14, (4.2)),

$$\int\limits_T^{T+H} \{C_1(t)\}^4\,dt = \frac{3}{4}H(\ln\ln P)^2 = O\{H(\ln\ln P)\}, \qquad H \geq P^4,$$

и, аналогичным образом,

$$\int\limits_T^{T+H} \{C_2(t)\}^4\,dt = O(H).$$

Так как

$$\{C_0(t)\}^4 = C_1^4 + 4C_1^3C_2 + \dots,$$

то, используя в надлежащих местах формулу Коши–Буняковского, получаем

$$\int\limits_T^{T+H} \{C_0(t)\}^4\,dt = \frac{3}{4}H(\ln\ln P)^2 + O\{H(\ln\ln P)^{3/2}\}, \qquad H \geq P^4. \tag{42}$$

Следовательно, по формулам (41), (42) получаем (ср. [3], стр. 24)

$$\begin{aligned} \int\limits_T^{T+H} |C_0(t)|\,dt &\geq \frac{\left\{\int\limits_T^{T+H} \{C_0(t)\}^2\,dt\right\}^{3/2}}{\left\{\int\limits_T^{T+H} \{C_0(t)\}^4\,dt\right\}^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}H\sqrt{\ln\ln P} + O(H), \qquad H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle. \end{aligned} \tag{43}$$

Пусть

$$\begin{aligned} I &= I(t,h) = \int\limits_t^{t+h} C_0(\tau)\,d\tau, \\ J &= J(t,h) = \int\limits_t^{t+h} |C_0(\tau)|\,d\tau, \\ h &= \left(\frac{1}{\ln P}\right)^{1/3-2\delta/3}. \end{aligned} \tag{44}$$

Так как (ср. [3], стр. 22, (5.3))

$$\int_T^{T+H} |I|\,dt \le \sqrt{H}\Big\{\int_T^{T+H}\Big|\int_t^{t+h} C_1(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+h} C_2(\tau)\,d\tau\Big|^2 dt\Big\}^{1/2},$$

$$\int_T^{T+H}\Big|\int_t^{t+h} C_1(\tau)\,d\tau\Big|^2 dt \le \frac{Hh^2}{2}\ln\frac{1}{h} + O(Hh^2),$$

$$\int_T^{T+H}\Big|\int_t^{t+h} C_2(\tau)\,d\tau\Big|^2 dt = O(Hh^2),$$

$$\int_T^{T+H}\Big(\int_t^{t+h} C_1(\tau)\,d\tau\Big)\Big(\int_t^{t+h} C_2(\tau)\,d\tau\Big)\,dt = O(Hh^2\sqrt{\ln(1/h)}),$$

то (ср. [3], стр. 21, лемма 7)

$$\int_T^{T+H} |I|\,dt < \frac{1-\delta}{\sqrt{6}} Hh\sqrt{\ln\ln P}. \tag{45}$$

Далее, из соотношения (ср. [3], стр. 24)

$$\int_T^{T+H} J\,dt = h\int_T^{T+H} |C_0(t)|\,dt + O\Big(h\frac{\sqrt{P}}{\ln P}\Big), \qquad C_0(t) = O\Big(\frac{\sqrt{P}}{\ln P}\Big),$$

в силу (43), (44) получаем оценку снизу (ср. [3], стр. 24, лемма 8)

$$\int_T^{T+H} J\,dt > \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(1-\frac{\delta}{2}\Big) Hh\sqrt{\ln\ln P}. \tag{46}$$

Пусть E — подмножество интервала $(T, T+H)$, на котором $J > |I|$. В силу (45), (46),

$$\int_E J\,dt \ge \int_T^{T+H} (J - |I|)\,dt > \frac{\delta}{5} Hh\sqrt{\ln\ln P} \tag{47}$$

и далее (ср. [3], стр. 25),

$$\int_T^{T+H} J^2\,dt < Hh^2 \ln\ln P. \tag{48}$$

Следовательно, для меры E имеем оценку

$$m(E) \ge \Big\{\int_E J\,dt\Big\}^2 \Big\{\int_T^{T+H} J^2\,dt\Big\}^{-1} > \frac{\delta^2}{25} H. \tag{49}$$

Доказательство Леммы 11 завершается следующим образом.

Подразделим $(T, T+H)$ на $[H/h] = l_0$ интервалов $j_1, \dots, j_{l_0}$. Если j_i содержит точку из E, $1 \le i \le l_0$, то $C_0(t)$ должна изменить знак или в j_i или в j_{i+1}. Так как по меньшей мере $m/h-2$ этих интервалов содержит точку из E, мы видим, что $C_0(t)$ имеет по меньшей мере (см. (2))

$$\begin{aligned}\frac{m}{2h} - 1 > \frac{\delta^2}{50} \cdot \frac{H}{h} - 1 &= \frac{\delta^2}{50} H(\ln P)^{1/3-2\delta/3} - 1 \\ &= \frac{\delta^2}{50}(1-\varepsilon)^{1/3-2\delta/3} H(\ln\ln P_0)^{1/3-2\delta/3} - 1 > H(\ln\ln P_0)^{1/3-\delta}\end{aligned}$$

нулей нечетного порядка в интервале $(T, T+H)$, т.е. имеет место оценка (40).

5.2. *Возмущенное уравнение.* Теперь рассмотрим вопрос о корнях уравнения

$$C_{-1}(t) = R(P)\,\mathrm{Im}\left\{ \ln\left(1 - \frac{P^{-it}}{\sqrt{P}}\right)\right\} + \omega_1(t) + b, \tag{50}$$

$t \in \langle T, T+H\rangle$, где $b \in \langle -M_2, M_2\rangle$ (см. (7)). Пусть $N_2[\langle T, T+H\rangle; C_{-1}]$ обозначает число корней уравнения (50).

Справедлива

Лемма 12. *Пусть* $H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle$, $\delta \in (0, 1/3)$. *Тогда при условиях* (2) *имеет место оценка*

$$N_2 > H(\ln\ln P_0)^{1/3-\delta}, \qquad T \to \infty, \tag{51}$$

для любых допустимых $\overline{P}$, b, ε, δ.

Доказательство. Рассмотрим корни уравнения (50) в случае условия (6). Уравнение (50) напишем в форме

$$C_0(t) = R(\overline{P})\,\mathrm{Im}\left\{ \ln\left(1 - \frac{\overline{P}^{-it}}{\sqrt{\overline{P}}}\right)\right\} + \omega_1(t) - r_1(t) + b, \tag{52}$$

где (см. (2), (39))

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \sum_{p\le P}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(nt\ln p)}{np^{n/2}} = O\left(\sum_{p\le P}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{p})^n}\right) \\ &= O\left(\sum_{p\le P}\frac{1}{p^{3/2}}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right) = O(1). \end{aligned} \tag{53}$$

Напомним, что метод А. Сельберга (т.е. и оценка (40)) является инвариантным относительно преобразования (ср. [3], стр. 26)

$$C_0(t) \to C_0(t) - F_1(t), \qquad t \in \langle T, T+H\rangle$$

если

$$F_1(t) = o(\sqrt{\ln\ln \overline{P}}), \qquad \overline{P} \to \infty. \tag{54}$$

В нашем случае имеем (см. (2), (6), Лемму 8, (52), (53))

$$\begin{aligned} F_1(t) &= R(\overline{P})\,\mathrm{Im}\left\{\ln\left(1 - \frac{\overline{P}^{-it}}{\sqrt{\overline{P}}}\right)\right\} + \omega_1(t) - r_1(t) + b \\ &= O\left(\sqrt{\frac{\ln\ln \overline{P}}{\ln\ln\ln \overline{P}}}\right), \end{aligned}$$

т.е. условие (54) выполнено. Следовательно, оценка (51) имеет место в случае последовательности $\{\overline{P}\}$.

6. Лемма о корнях второго трансцендентного уравнения

6.1. *Невозмущенное уравнение*. Пусть

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \sqrt{\ln\ln P}\cos(t\ln P) + \frac{\sqrt{P\ln\ln P}}{\pi(P)}D_0(t) \\ &= D_{11}(t) + D_{12}(t), \qquad t \in \langle T, T+H\rangle, \end{aligned} \tag{55}$$

где

$$D_0(t) = -\sum_{p\le P}\frac{\cos(t\ln p)}{\sqrt{p}} - \sum_{p\le P}\frac{\cos(2t\ln p)}{2p}. \tag{56}$$

Пусть $N_3[\langle T, T+H\rangle; D_1(t)]$ обозначает нули функции $D_1(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$. Справедлива

Лемма 13. *Пусть $H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle$. Тогда при условиях* (2) *имеет место оценка*

$$N_3 > A_1(\varepsilon)H\ln\ln P_0, \qquad T \to \infty,$$

для любого сколь угодно малого ε.

Доказательство. Так как (см. (55), (56))

$$\frac{\sqrt{P\ln\ln P}}{\pi(P)}D_0(t) = O(\sqrt{\ln\ln P})$$

(простые соображения — соответствующие случаю $o(\sqrt{\ln\ln P})$ — не успевают), то мы и здесь применим модифицированный метод А. Сельберга.

Поскольку прямым вычислением получаем

$$\int_T^{T+H}\{D_{11}\}^2\,dt \sim \frac{1}{2}H\ln\ln P, \qquad \int_T^{T+H}\{D_{11}\}^4\,dt \sim \frac{3}{8}H(\ln\ln P)^2$$

и по методу А. Сельберга

$$\int_T^{T+H}\{D_{12}\}^2\,dt\sim\frac{P\ln\ln P}{2\pi^2(P)}H\ln\ln P,$$

$$\int_T^{T+H}\{D_{12}\}^4\,dt\sim\frac{3}{4}\cdot\frac{(P\ln\ln P)^2}{\pi^4(P)}H(\ln\ln P)^2,$$

то справедливы формулы

$$\begin{aligned}\int_T^{T+H}\{D_1(t)\}^2\,dt&\sim\frac{1}{2}H\ln\ln P,\\ \int_T^{T+H}\{D_1(t)\}^4\,dt&\sim\frac{3}{8}H(\ln\ln P)^2.\end{aligned}\tag{57}$$

Пусть

$$\begin{gathered}I_k=\int_t^{t+h}D_{1k}(\tau)\,d\tau,\qquad k=1,2,\\ I^1=\int_t^{t+h}D_1(\tau)\,d\tau,\qquad J^1=\int_t^{t+h}|D_1(\tau)|\,d\tau.\end{gathered}\tag{58}$$

Так как

$$\begin{aligned}\int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h}D_{11}(\tau)\,d\tau\right|^2dt&=\frac{1}{2}Hh^2\ln\ln P\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\ln P\right)}{\frac{h^2}{4}\ln^2 P}+O\left(\frac{\ln\ln P}{\ln^2 P}\right)\\ &<\{1+o(1)\}\frac{1}{2}Hh^2\ln\ln P\end{aligned}$$

при условии (ср. (44))

$$h=1/\ln P,\tag{59}$$

то

$$\begin{aligned}\int_T^{T+H}|I_1|\,dt&\le\sqrt{H}\left\{\int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h}D_{11}(\tau)\,d\tau\right|^2dt\right\}^{1/2}\\ &<\{1+o(1)\}\frac{1}{2}Hh\sqrt{\ln\ln P},\end{aligned}\tag{60}$$

при условии (59).

Далее (см. (56), ср. [3], стр. 22, 23; нам достаточна тривиальная оценка главного члена),

$$\begin{aligned}\int_T^{T+H}\Big|\int_t^{t+h} D_{12}(\tau)\,d\tau\Big|^2 dt &= \frac{P\ln\ln P}{\pi^2(P)}\int_T^{T+H}\Big|\int_t^{t+h} D_0(\tau)\,d\tau\Big|^2 dt\\ &= 4\frac{P\ln\ln P}{\pi^2(P)}\sum\sum_{p,q\le P}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\ln p\right)\sin\left(\frac{h}{2}\ln q\right)}{\sqrt{pq}\ln p\ln q}\\ &\quad\times\int_{T+h/2}^{T+H+h/2}\cos(t\ln p)\cos(t\ln q)\,dt+\dots\\ &= \frac{P\ln\ln P}{\pi^2(P)}\left\{2H\sum_{p\le P}\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\ln p\right)}{p\ln^2 p}+O(H)\right\}\\ &= O\left(\frac{P\ln\ln P}{\pi^2(P)}H\right)=O\left(\frac{P\ln^2 P}{\pi^2(P)}Hh^2\ln\ln P\right),\end{aligned}$$

т.е. (см. (58))

$$\int_T^{T+H}|I_2|\,dt = o(Hh\sqrt{\ln\ln P}), \tag{61}$$

при условии (59). Теперь (см. (58)–(61))

$$\int_T^{T+H}|I^1|\,dt < (1+\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}Hh\sqrt{\ln\ln P}. \tag{62}$$

Так как из (57) следует неравенство (ср. (43))

$$\int_T^{T+H}|D_1(t)|\,dt > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\varepsilon}{4}\right)H\sqrt{\ln\ln P},$$

то (см. (58), ср. (46))

$$\begin{aligned}\int_T^{T+H}J^1\,dt &= h\int_T^{T+H}|D_1(t)|\,dt+O(h\sqrt{\ln\ln P})\\ &> \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\varepsilon}{2}\right)Hh\sqrt{\ln\ln P}.\end{aligned} \tag{63}$$

Поскольку (см. (62), (63), ср. (47))

$$\int_E J^1\,dt > \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\varepsilon\right)Hh\sqrt{\ln\ln P}$$

и (ср. (48))

$$\int\limits_T^{T+H} \{J^1\}^2\,dt < Hh^2 \ln\ln P,$$

то доказательство завершается как в п. 5.

6.2. *Возмущенное уравнение.* Теперь рассмотрим вопрос о корнях уравнения

$$D_{-1}(t) = \pi(P)\,\mathrm{Re}\left\{ \ln\left(1 - \frac{P^{-it}}{\sqrt{P}}\right)\right\} + a, \qquad t \in \langle T, T+H\rangle, \tag{64}$$

где $a \in \langle -M_1, M_1\rangle$ (см. (4)). Пусть $N_4[\langle T, T+H\rangle; D_{-1}(t)]$ обозначает число корней уравнения (64).

Справедлива

Лемма 14. *Пусть* $H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle$. *Тогда при условиях* (2) *имеет место оценка*

$$N_4 > A(\varepsilon) H \ln\ln P_0, \qquad T \to \infty,$$

для любых допустимых a, ε.

Доказательство. Так как (см. (36), (56), ср. (53))

$$D_{-1}(t) = D_0(t) - \sum_{p \le P} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(nt\ln p)}{n(\sqrt{p})^n} = D_0(t) + r_2(t) = D_0(t) + O(1)$$

и

$$\mathrm{Re}\left\{ \ln\left(1 - \frac{P^{-it}}{\sqrt{P}}\right)\right\} = -\frac{\cos(t\ln P)}{\sqrt{P}} + O\left(\frac{1}{P}\right),$$

то уравнение (64) напишем в форме (см. (55))

$$D_1(t) - F_2(t) = 0, \qquad t \in \langle T, T+H\rangle,$$

где

$$F_2(t) = \frac{\sqrt{P\ln\ln P}}{\pi(P)}\left\{ a - r_2(t) + O\left(\frac{1}{P}\right)\right\} = O\left(\frac{\ln P \cdot \sqrt{\ln\ln P}}{\sqrt{P}} \cdot |a|\right).$$

Поскольку метод А. Сельберга является инвариантным относительно преобразования

$$D_1(t) \to D_1(t) - F_2(t)$$

при условии

$$F_2(t) = o(\sqrt{\ln\ln P}),$$

а это условие выполняется в случае

$$|a| \le \frac{\sqrt{P}}{\ln P \cdot \ln\ln\ln P}$$

(см. (4)), то отсюда следует утверждение Леммы 14.

7. Леммы о корнях третьего и четвертого трансцендентного уравнений. Рассмотрим уравнение

$$D_{-1}(t) = R(P)\operatorname{Re}\left\{\ln\left(1 - \frac{P^{-it}}{\sqrt{P}}\right)\right\} + \omega_2(t) + b.$$

Пусть $N_5[\langle T, T+H\rangle; D_{-1}(t)]$ обозначает число корней этого уравнения. Аналогично случаю Леммы 12 доказывается

Лемма 15. *Пусть* $H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle, \delta \in (0, 1/3)$. *Тогда при условиях* (2) *имеет место оценка*

$$N_5 > H(\ln\ln P_0)^{1/3-\delta}, \qquad T \to \infty,$$

для любых допустимых $\overline{P}$, b, ε, δ.

Далее рассмотрим уравнение

$$C_{-1}(t) = \pi(P)\operatorname{Im}\left\{\ln\left(1 - \frac{P^{-it}}{\sqrt{P}}\right)\right\} + a.$$

Пусть $N_6[\langle T, T+H\rangle; C_{-1}(t)]$ обозначает корни этого уравнения. Аналогично случаю Леммы 14 доказывается

Лемма 16. *Пусть* $H \in \langle P^4, \sqrt{T}\rangle$. *Тогда при условиях* (2) *имеет место оценка*

$$N_6 > A(\varepsilon)H\ln\ln P_0, \qquad T \to \infty,$$

для любых допустимых a, ε.

8. Доказательство Теорем 1, 2. Так как непрерывная функция

$$\vartheta(t) + C_{-1}(t), \qquad t \in \langle T, T+H\rangle, \tag{65}$$

возрастает (имеет положительную производную в этом промежутке) и значения $2\pi\nu + \alpha$, $\alpha \in \langle -\pi, \pi\rangle$, заполняют без пробелов область значений функции (65), то для любого $t \in \langle T, T+H\rangle$ существует пара (ν, α) (две пары только для некоторого конечного числа случаев) такая, что $t = \gamma_{2\nu}(\alpha)$. Поскольку в силу (2), (32), (34), (35) имеем

$$\begin{aligned} -\int_2^P \operatorname{Im}\left\{\frac{\varrho_{2\nu}(\alpha)}{x^{\varrho_{2\nu}(\alpha)} - 1}\right\}\frac{R(x)}{x}\,dx& \\ + R(P)\operatorname{Im}\left\{\ln\left(1 - \frac{1}{P^{\varrho_{2\nu}(\alpha)}}\right)\right\} + \omega_1[\gamma_{2\nu}(\alpha)]& \\ = C_{-1}[\gamma_{2\nu}(\alpha)],& \end{aligned}$$

то отсюда, по Лемме 12, следует вторая формула Теоремы 2. Аналогичным образом: Леммы 9, 14 приводят к первой формуле Теоремы 1; Леммы 10, 15 приводят к первой формуле Теоремы 2; Леммы 7, 16 приводят к второй формуле Теоремы 1.

Литература

[1] Ян Мозер, *Новые следствия из формулы Римана–Зигеля*, Acta Arith. 42 (1982), 1–10.
[2] —, *Гипотеза Римана для некоторых частей функции* $\zeta(s)$ *и новая формула для* $\pi(x)$, ibid. 80 (1997), 297–310.
[3] A. Selberg, *On the remainder in the formula for* $N(T)$*, the number of zeros of* $\zeta(s)$ *in the strip* $0 < t < T$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo I Mat.-Nat. Kl. 1944, no. 1.

Kat. Mat. Anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava, Slovakia
E-mail: Gera@fmph.uniba.sk

Поступило 15.7.1997 (3225)