ACTA ARITHMETICA
LXXXIII.4 (1998)

Sur la fermeture de l'ensemble des K-nombres de Pisot

par

TOUFIK ZAÏMI (Riyadh)

1. Introduction. Soient K un corps de nombres et θ un entier algébrique de module > 1 et de polynôme minimal $\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ sur K. Alors θ est dit *K-nombre de Pisot* si pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ le polynôme $\sigma\,\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ possède une unique racine de module > 1 et aucune racine de module 1. Ces nombres ont été définis par A. M. Bergé et J. Martinet [1] et etudiés dans le but de déterminer des polynômes de petite mesure par M. J. Bertin lorsque K est un corps quadratique réel [2] et par l'auteur lorsque K est ou bien un corps quadratique imaginaire ou bien un corps cubique totalement réel [8].

Comme dans [1], on représente un K-nombre de Pisot θ dans l'algèbre $A = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ où (r_1, r_2) désigne la signature du corps K par la suite $(\theta_\sigma)_\sigma$ de ses conjugués de module > 1 et on note S_K leur ensemble dans A. La question suivante a été posée dans [1] :

L'ensemble S_K est-il fermé dans A? Dans le cas où S_K est fermé quels sont ses éléments de mesure minimale?

Les théorèmes suivants répondent a cette question.

THÉORÈME 1. *L'ensemble S_K est fermé dans A si et seulement si $K = \mathbb{Q}$ ou bien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}^-$.*

Si on note S'_K l'ensemble des points limites de S_K, $\mathrm{Inf}\, S_K$ (resp. $\mathrm{Inf}\, S'_K$) un élément de S_K (resp. de S'_K) ayant la plus petite mesure et θ l'élément $(\theta_\sigma)_\sigma$ de S_K (resp. de S'_K) lorsque $\theta = \theta_\sigma$ pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ alors on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Soit K un corps quadratique imaginaire ou bien un corps totalement réel; alors $\mathrm{Inf}\, S_K = \theta_0 = 1.32\ldots$ où $\theta_0^3 - \theta_0 - 1 = 0$ et $\mathrm{Inf}\, S'_K = (1 + \sqrt{5})/2$.*

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11R06.

2. Quelques lemmes. Les preuves des théorèmes 1 et 2 sont basées sur les lemmes suivants :

Lemme 0 ([5]). *Soit K un corps de nombres réel alors il existe un $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot θ tel que $K = \mathbb{Q}(\theta)$.*

Lemme 1. *Soient θ un élément de $S_{\mathbb{Q}}$ et K un corps de nombres. Alors $\theta \in S_K$ si et seulement si* $\mathrm{Irr}(\theta, K, z) = \mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$.

Preuve. Si $\mathrm{Irr}(\theta, K, z) = \mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$ alors pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ on a $\sigma \,\mathrm{Irr}(\theta, K, z) = \mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$ et $\theta \in S_K$. Inversement, comme le polynôme $\sigma \,\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ admet une seule racine de module > 1 qui est nécessairement θ on a l'égalité $[K : \mathbb{Q}] = [K(\theta) : \mathbb{Q}(\theta)]$ et par suite $[K(\theta) : K] = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ d'où le résultat.

Lemme 2. *Soit K un corps de nombres.*

(i) *Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}^-$ et $\theta \in S_{\mathbb{Q}}$ alors $\theta \in S_K$.*

(ii) *Si $K \neq \mathbb{Q}$ et $K \neq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}^-$, alors il existe un élément $\theta \in S_{\mathbb{Q}}$ et $\theta \notin S_K$.*

Preuve. (i) Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}^-$ et $\theta \in S_{\mathbb{Q}}$ alors l'entier θ est réel et le corps $K(\theta)$ est non réel. De l'égalité $[K : \mathbb{Q}] = 2$ et de l'inégalité $[K(\theta) : \mathbb{Q}(\theta)] \geq 2$ on déduit $[K(\theta) : K] = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ et $\mathrm{Irr}(\theta, K, z) = \mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$. Du lemme 1 on déduit $\theta \in S_K$.

(ii) Supposons d'abord qu' il existe au moins un plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ tel que le corps σK contienne un nombre réel irrationnel α. Le lemme 0 montre alors que le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ peut être engendré par un $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot θ. Soit $\sigma^{-1}\theta$ le conjugué de θ dans K alors le polynôme $\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ divise le polynôme $(\mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)/(z - \sigma^{-1}\theta))$ qui est différent du polynôme $\mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$. Du lemme 1 on déduit $\theta \notin S_K$.

Supposons maintenant que pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, le corps σK ne contienne pas de nombres réels irrationnels, alors $[K : \mathbb{Q}] \geq 4$. Soit α un entier algébrique tel que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ et L le corps réel définit par $L = \mathbb{Q}(\alpha + \overline{\alpha}, \alpha\overline{\alpha})$, alors $[L(\alpha) : L] = 2$. En effet d'une part α n'est pas réel donc $\alpha \notin L$ et d'autre part il est racine du polynôme $z^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z + \alpha\overline{\alpha}$ à coefficients dans L. On en déduit $L \neq \mathbb{Q}$ (car sinon K serait de degré 2 sur $\mathbb{Q}$) et le lemme 0 montre l'existence d'un $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot irrationnel θ tel que $L = \mathbb{Q}(\theta)$. Des égalités $K(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha)(\theta) = \mathbb{Q}(\theta)(\alpha) = L(\alpha)$ on déduit $[K(\theta) : \mathbb{Q}(\theta)] = 2$ d'où $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}][K(\theta) : K]/2 \geq 2[K(\theta) : K]$ et par suite $\mathrm{Irr}(\theta, K, z) \neq \mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$. Du lemme 1 on déduit $\theta \notin S_K$.

Lemme 3. *Soit θ un élément de $S_{\mathbb{Q}}$ de degré s sur $\mathbb{Q}$. Il existe alors $r > 0$ tel que pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq r$ l'élément θ^N de $S_{\mathbb{Q}}$ est limite d'une suite $(\theta_n)_n$ d'éléments de $S_{\mathbb{Q}}$ où le degré de θ_n sur $\mathbb{Q}$ est égal à n pour $n \geq s$.*

P r e u v e. Si $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s$ désignent les conjugués de module < 1 du $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot θ alors $\operatorname{Irr}(\theta^N, \mathbb{Q}, z) = (z - \theta^N)(z - \alpha_2^N) \ldots (z - \alpha_s^N)$ pour $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $r > 0$ tel que

$$|\theta|^r > 2^{s-1} + 1 \quad \text{et} \quad |\alpha_j|^r < 1/2$$

pour $2 \le j \le s$, et $m \in \mathbb{N}$. Alors pour $|z| = 1$ et $N \ge r$ on a $|z^m| \cdot |\operatorname{Irr}(\theta^N, \mathbb{Q}, z)| > 1$. Le théorème de Rouché montre alors que le polynôme P_n définit par $P_n(z) = z^m \operatorname{Irr}(\theta^N, \mathbb{Q}, z) + 1$ de degré $n = m + s$ admet $n - 1$ racines de module < 1 et une seule racine θ_n de module > 1. On en déduit que θ_n est un élément de $S_{\mathbb{Q}}$ de degré n sur $\mathbb{Q}$.

Soit $\theta_0 = 1.32\ldots$ le plus petit $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot positif [4]; des inégalités

$$|\theta_n - \theta^N|(\theta_0 - 1)^{s-1} \le |\theta_n - \theta^N| \cdot |\theta_n - \alpha_2^N| \ldots |\theta_n - \alpha_s^N| = \frac{1}{|\theta_n^m|} \le \frac{1}{\theta_0^m},$$

on déduit l'inégalité

$$|\theta_n - \theta^N| \le \frac{1}{\theta_0^m(\theta_0 - 1)^{s-1}}, \qquad \text{d'où } \lim_n \theta_n = \theta^N.$$

LEMME 4. *Soient K un corps de nombres de degré d sur $\mathbb{Q}$ et θ un entier algébrique de degré n sur $\mathbb{Q}$. Si n et d sont premiers entre eux alors* $\operatorname{Irr}(\theta, K, z) = \operatorname{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$.

P r e u v e. Comme l'entier n divise le produit $d[K(\theta) : K]$ et comme $[K(\theta) : K] \le n$, de l'hypothèse on déduit l'égalité $[K(\theta) : K] = n$ d'où le résultat.

LEMME 5 ([4]). *Soit α_n le plus petit $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot positif de degré $n \ge 3$. Alors α_n admet pour polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ le polynôme P_n définit par $P_n(z) = z^n - z^{n-1} - z^{n-2} + z^2 - 1$. De plus la suite $(\alpha_n)_n$ est strictement croissante et converge vers le nombre* $(1 + \sqrt{5})/2$.

3. Preuve des théorèmes

Preuve du théorème 1. Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d < 0$ (resp. $K = \mathbb{Q}$) alors l'ensemble S_K est fermé [3] (resp. [5]). Si $K \ne \mathbb{Q}$ et $K \ne \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d < 0$ alors le lemme 2(ii) montre l'existence d'un élément $\theta \in S_{\mathbb{Q}}$ et $\theta \notin S_K$. Comme $\mathbb{Q}(\theta^N) = \mathbb{Q}(\theta)$ et $K(\theta^N) \subset K(\theta)$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ alors $\theta^N \in S_{\mathbb{Q}}$ et $\theta^N \notin S_K$. Le lemme 3 montre l'existence d'un entier N tel que θ^N soit limite d'une suite $(\theta_n)_n$ d'éléments de $S_{\mathbb{Q}}$ où le degré de θ_n sur $\mathbb{Q}$ est n.

En considérant la sous-suite de $(\theta_n)_n$ choisie telle que le degré du corps K sur $\mathbb{Q}$ et l'entier n soient premiers entre eux, on obtient alors d'après les lemmes 4 et 1 une suite d'éléments de S_K qui converge vers $\theta^N \notin S_K$ d'où le résultat.

Preuve du théorème 2. Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d < 0$ et $\theta \in S_K$. Si θ est non réel alors la mesure de θ qu'on note $M(\theta)$ vérifie $M(\theta) > 1.7 > (1+\sqrt{5})/2$ [8]. Si θ est réel alors $\theta \in S_{\mathbb{Q}}$ et du lemme 2(i) et du lemme 5 on déduit le résultat.

Soient K un corps totalement réel et $\theta \in S_K$ tel que $\theta \notin S_{\mathbb{Q}}$ et θ admet $v \geq 2$ conjugués sur $\mathbb{Q}$ de module > 1. Tout conjugué θ_σ sur $\mathbb{Q}$ de module > 1 de θ est repété $[K(\theta) : \mathbb{Q}(\theta)]$ fois par les plongements de $K(\theta)$ dans $\mathbb{C}$ on déduit alors l'égalité $[K : \mathbb{Q}] = v[K(\theta) : \mathbb{Q}(\theta)]$ et par suite l'inégalité

$$\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2[K(\theta):\mathbb{Q}(\theta)]} \geq 1. \tag{1}$$

Si $\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ est non réciproque, on a d'aprés [6] l'inégalité :

$$(M(\theta))^{[K(\theta):\mathbb{Q}(\theta)]} = \prod_\sigma |\theta_\sigma| \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{[K:\mathbb{Q}]/2}. \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit l'inégalité $M(\theta) \geq (1+\sqrt{5})/2$.

Si $\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ est réciproque alors il en est de même pour $\mathrm{Irr}(\theta^2, K, z)$ et $\mathrm{Irr}(\theta^2, K, z) = z^2 + uz + 1$ où $u = \theta^2 + 1/\theta^2 > 2$. Les conjugués de u sur $\mathbb{Q}$ sont parmi les $\left(\theta_\sigma^2 + \frac{1}{\theta_\sigma^2}\right)_\sigma$ qui sont tous > 2.

Si $u \in \mathbb{Z}$ alors $\theta^2 + 1/\theta^2 \geq 3$, et $M(\theta) \geq (1+\sqrt{5})/2$.

Sinon l'entier u est de degré ≥ 2 sur $\mathbb{Q}$ et tous ses conjugués sont > 2. Comme le discriminant de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est ≥ 1 il existe au moins un conjugué $\theta_\sigma^2 + 1/\theta_\sigma^2$ tel que $\theta_\sigma^2 + 1/\theta_\sigma^2 > 3$ et par suite on a $M(\theta) \geq \max_\sigma |\theta_\sigma| \geq (1+\sqrt{5})/2$.

En choisissant parmi les nombres $(\alpha_n)_n$ définis par le lemme 5 ceux dont le degré n est premier au degré du corps K sur $\mathbb{Q}$ on obtient le résultat par les lemmes 4 et 1.

Remarques. 1. En considérant la suite $(\alpha_n)_n$ définie dans le lemme 5 et en appliquant les lemmes 4 et 1 on obtient $(1+\sqrt{5})/2 \in S'_K$ pour tout corps de nombres K. Ceci prouve que S_K n'est pas fermé si $\sqrt{5} \in K$.

2. Soit K un corps de nombres tel que si $x^3 - x - 1 = 0$ alors $x \notin K$. Le polynôme P_3 définit dans le lemme 5 est alors irréductible sur K et $\alpha_3 = 1.32\ldots$ est un élément de S_K non réciproque ayant la plus petite mesure [7].

3. Soit K un corps de nombres de degré d. On peut obtenir des K-nombres de Pisot de petite mesure selon les lemmes 5 et 4. On choisit N tel que $N = \min\{n \geq 3, (n,d) = 1\}$, ensuite on vérifie si les $(\alpha_j)_{j \leq N}$ ne sont pas des K-nombres de Pisot et on prend α_N.

Bibliographie

[1] A. M. Bergé et J. Martinet, *Notions relatives de régulateurs et de hauteurs*, Acta Arith. 54 (1989), 155–170.
[2] M. J. Bertin, *K-nombres de Pisot et de Salem*, ibid. 68 (1994), 113–131.
[3] C. Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 8 (1958), 211–262.
[4] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 72 (1955), 69–92.
[5] R. Salem, *Algebraic Numbers and Fourier Analysis*, Heath Math. Monographs, Heath, Boston, 1963.
[6] A. Schinzel, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number*, Acta Arith. 24 (1973), 385–399.
[7] C. J. Smyth, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer*, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 169–175.
[8] T. Zaïmi, *Sur les K-nombres de Pisot de petite mesure*, Acta Arith. 77 (1996), 103–131.

Department of Mathematics
King Saud University
P.O. Box 2455
Riyadh 11451, Saudi Arabia
E-mail: F40m009@SAKSU00.bitnet

Reçu le 7.1.1997
et révisé le 12.6.1997 (3109)