ACTA ARITHMETICA
LXXXIII.2 (1998)

Correction au travail "Sur la densité de certains ensembles de multiples, 1"

(Acta Arith. 69 (1995), 121–152)

par

A. Raouj (Marrakech)

Comme a montré K. K. Norton, le lemme 4.4 est faux. Les lignes 16–25 à la page 127 doivent être remplacées par le texte suivant :

Lemme 4.4. *Soit f une fonction arithmétique, multiplicative, telle que $f * \mu \geq 0$. Pour $x \geq 1$, on a*

$$\sum_{n\le x} f(n) \le x \prod_{p\le x}(1-p^{-1}) \sum_{\nu\ge 0} f(p^\nu)p^{-\nu}. \tag{4.5}$$

Nous faisons appel au lemme précédent pour montrer le résultat suivant.

Lemme 4.5. *Soient $y > 1$, $x > 1$. On a*

$$n\varphi(n)^{-1} \le y \tag{4.6}$$

pour tous les entiers $n \le x$ sauf au plus $\ll x \exp(-e^{c_1 y})$.

Démonstration. On applique le lemme précédent à la fonction $f_a(n) := (n\varphi(n)^{-1})^a$, a étant un paramètre positif que l'on choisit de manière à minimiser le second membre de l'inégalité

$$|\{n : n \le x,\, n\varphi(n)^{-1} > y\}| \le y^{-a} \sum_{n\le x} f_a(n).$$

En effet, puisque $f_a * \mu \geq 0$ on a d'après le lemme 4.4,

$$\sum_{n\le x} f_a(n) \le x \prod_{p\le x}(1-p^{-1})\Big(1+\sum_{\nu\ge 1} p^{-\nu}(1-p^{-1})^{-a}\Big) \le x \prod_{p\le x}(1+V_a(p))$$

où l'on a posé $V_a(p) = p^{-1}((1-p^{-1})^{-a}-1)$.

D'une part, si $p > a$ alors $V_a(p) \ll a/p^2$ et donc $\exp\sum_{p>a} V_a(p) \ll 1$. D'autre part, on a

$$\prod_{p\le a}(1+V_a(p)) \le \prod_{p\le a}(1-p^{-1})^{-a}.$$

En utilisant le théorème de Mertens, nous avons par conséquent uniformément en $a \geq 1$,

$$\sum_{n \leq x} f_a(n) \ll x(c_2 \log(a+1))^a.$$

Nous en déduisons

$$|\{n : n \leq x,\, n\varphi(n)^{-1} > y\}| \leq y^{-a} \sum_{n \leq x} f_a(n) \ll x\left(\frac{y}{c_2 \log(a+1)}\right)^{-a},$$

et nous achevons cette démonstration en choisissant

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 3c_2, \\ e^{c_1 y} - 1 \text{ avec } c_1 = 1/(ec_2) & \text{si } y > 3c_2. \end{cases}$$

D'où le lemme. ∎

Université Cadi-Ayyad
Faculté des Sciences, Semlalia
Département de Mathématiques
B.P. S. 15, Marrakech, Maroc

Reçu le 25.3.1997 (2459)