ACTA ARITHMETICA
LXXX.4 (1997)

Гипотеза Римана для некоторых частей функции $\zeta(s)$ и новая формула для $\pi(x)$

Ян Мозер (Братислава)

1. Главный результат. Пусть (ср. [1], (7), (21); $2P\beta < \ln P_0$)

$$P = (\ln P_0)^{1-\varepsilon}, \quad \beta = [(\ln P_0)^{2\varepsilon/3}], \quad P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{1}$$

где ε – сколь угодно малое положительное число. Пусть далее (p – простое число)

$$\begin{aligned} \zeta_1(s) &= \prod_{p\le P} \sum_{k=0}^{\beta} \frac{1}{p^{sk}} = \sum_{n<P_0,\, p\le P} \frac{1}{n^s} = {\sum_{n<P_0}}' \frac{1}{n^s}, \\ \zeta_2(s) &= \prod_{p\le P} \sum_{k=0}^{\beta} \frac{1}{p^{(1-s)k}} = \sum_{n<P_0,\, p\le P} \frac{1}{n^{1-s}} = {\sum_{n<P_0}}' \frac{1}{n^{1-s}}, \\ \zeta_3(s) &= \chi(s)\zeta_2(s), \end{aligned} \tag{2}$$

где (см. [2], стр. 23)

$$\chi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}, \quad s \ne 2k+1,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

и $s = \sigma + it$ пробегает плоскость Гаусса $\mathbb{C}$.

Определим функцию $\widetilde{\zeta}(s)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \widetilde{\zeta}(s) &= \widetilde{\zeta}(s; P, \beta) = \zeta_1(s) + \zeta_3(s) \\ &= {\sum_{n<P_0}}' \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n<P_0} \frac{1}{n^{1-s}}, \quad s \in \mathbb{C},\ s \ne 2k+1. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как

$$\widetilde{\zeta}(1-s) = {\sum_{n<P_0}}' \frac{1}{n^{1-s}} + \chi(1-s) {\sum_{n<P_0}}' \frac{1}{n^s}$$

и (см. [2], стр. 23)

$$\chi(s)\chi(1-s) = 1,$$

то

$$\widetilde{\zeta}(s)=\chi(s)\widetilde{\zeta}(1-s), \qquad s\in\mathbb{C},\ s\neq 2k+1.$$

Замечание 1. Функция $\widetilde{\zeta}(s)$ удовлетворяет точному функциональному уравнению и, следовательно, её нули расположены симметрично относительно критической прямой $\sigma=1/2$.

Поскольку (ср. [2], стр. 94)

$$\chi(1/2+it)=e^{-i2\vartheta(t)},$$

то из (4) следует соотношение

$$\begin{aligned}(5)\qquad e^{i\vartheta(t)}\widetilde{\zeta}(1/2+it)&=\sum_{n<P_0}{}' \frac{e^{i\{\vartheta(t)-t\ln n\}}}{\sqrt{n}}+\sum_{n<P_0}{}' \frac{e^{-i\{\vartheta(t)-t\ln n\}}}{\sqrt{n}}\\ &=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(t)-t\ln n\}\\ &=Z_1(t;P,\beta).\end{aligned}$$

Нули функции $Z_1(t)$, т.е. нули $\widetilde{\zeta}(s)$ на критической прямой, изучались нами в работе [1].

Пусть

$$(6)\qquad D=D(T,H,K)=\{s:\sigma\in\langle -K,K\rangle, t\in\langle T,T+H\rangle\},\qquad K>1,\ T>0,\ H\leq\sqrt{T}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Имеет место отношение*

$$(7)\qquad \widetilde{\zeta}(s)\neq 0,\qquad s\in D,\qquad \sigma\neq 1/2$$

для всех достаточно больших T, т.е. для $\widetilde{\zeta}(s)$, $s\in D$, $T\to\infty$ справедлив аналог гипотезы Римана.

Напомним приближенное функциональное уравнение Римана–Харди–Литтлвуда ([2], стр. 82, 85; $x=y=\sqrt{|t|/(2\pi)}=t'$):

$$(8)\qquad \zeta(s)=\sum_{n\leq t'}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\leq t'}\frac{1}{n^{1-s}}+O(|t|^{-\sigma/2})$$

и формулу Римана–Зигеля (ср. (5))

$$\begin{aligned}(9)\qquad e^{i\vartheta(t)}\zeta(1/2+it)&=Z(t)\\ &=2\sum_{n\leq t'}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(t)-t\ln n\}+O(t^{-1/4})\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(t)-t\ln n\}$$
$$+ O(T^{-1/4}) + O(HT^{-3/4}),$$

где $t \in \langle T, T+H\rangle$.

Замечание 2. Сравнение формул (4), (8) уточняет термин «часть функции $\zeta(s)$» и условие $H \le \sqrt{T}$ в (6) связано с формулой (9).

2. Формулы для частей функции $\widetilde{\zeta}(s)$. Имеет место (см. (2))

$$\zeta_1(s) = B_1(s)e^{i\psi_1(s)}, \quad B_1(s) = |\zeta_1(s)| > 0, \quad \sigma > 0,$$

где

$$B_1(s) = \prod_{p\le P}|M_1(p;s,\beta)|, \qquad \psi_1(s) = \sum_{p\le P}\arg\{M_1(p;s,\beta)\},$$
$$M_1(p) = \frac{1-Q_1^{\beta+1}}{1-Q_1}, \quad Q_1 = Q_1(p,s) = \frac{1}{p^s}, \quad |Q_1| = \frac{1}{p^\sigma} < 1 \tag{10}$$

и, аналогичным образом,

$$\zeta_2(s) = B_2(s)e^{i\psi_2(s)}, \quad B_2(s) > 0, \quad \sigma < 1,$$

где

$$B_2(s) = \prod_{p\le P}|M_2(p)|, \qquad \psi_2(s) = \sum_{p\le P}\arg\{M_2(p)\},$$
$$M_2(p) = \frac{1-Q_2^{s+1}}{1-Q_2}, \quad Q_2 = \frac{1}{p^{1-s}}, \quad |Q_2| = \frac{1}{p^{1-\sigma}} < 1. \tag{11}$$

Далее (см. [2], стр. 81, 94, 383)

$$\chi(s) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} e^{-i2\vartheta(t)}\left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}, \tag{12}$$

т.е. $\chi(s) = |\chi(s)|e^{i\psi_3(s)}$, где $(T\to\infty)$

$$|\chi(s)| = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma}\left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}, \qquad |\chi(s)| > 0, \ s \in D,$$
$$\psi_3(s) = -2\vartheta(t) + O(1/t). \tag{13}$$

Следовательно $(T\to\infty)$,

$$\widetilde{\zeta}(s) = B_1(s)e^{i\psi_1(s)} + B_2(s)|\chi(s)|e^{i\psi_4(s)},$$
$$\psi_4(s) = \psi_2(s) + \psi_3(s), \qquad s \in D \cap \{0 < \sigma < 1\}. \tag{14}$$

Замечание 3. Напомним, что формула (12) связана с формулой Стирлинга для $\ln\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$, которая, в свою очередь, связана с любой фиксированной полосой $-K \leq \sigma \leq K$ (см. [2], стр. 81, ср. (6)).

3. Леммы для $B_1(s)$, $B_2(s)$. Пусть

$$D_1(\Delta) = \{s : \sigma \in \langle 1/2 + \Delta, 1 - \Delta\rangle,\ t \in \langle T, T + H\rangle\}, \tag{15}$$

где $\Delta \in (0, 1/4)$. Справедлива

Лемма 1.

$$\exp\left(-\frac{A}{\Delta} P^{1/2-\Delta}\right) < B_1(s) < \exp\left(\frac{A}{\Delta} P^{1/2-\Delta}\right), \tag{16}$$

для $s \in D_1(\Delta)$, $T \to \infty$.

Доказательство. Имеем (см. (10))

$$\begin{aligned} |M_1| &= \left|1 - \frac{1}{p^{(\beta+1)s}}\right| \cdot \left|1 - \frac{1}{p^s}\right|^{-1} \\ &= \left\{1 + \frac{1}{p^{2(\beta+1)\sigma}} - \frac{2\cos\{(\beta+1)\varphi\}}{p^{(\beta+1)\sigma}}\right\}^{1/2} \cdot \left\{1 + \frac{1}{p^{2\sigma}} - \frac{2\cos\varphi}{p^{\sigma}}\right\}^{-1/2} \\ &= M_{11} \cdot M_{12}; \qquad \varphi = t \ln p. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (1)),

$$\begin{aligned} \ln M_{11} &= \frac{1}{2} \ln\left\{1 + O\left(\frac{1}{p^{\beta/2}}\right)\right\} = O\left(\frac{1}{p^{\beta/2}}\right), \\ M_{11} &= \exp\left\{O\left(\frac{1}{p^{\beta/2}}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

равномерно относительно $\Delta \in (0, 1/4)$ и, поскольку

$$1/2 + \Delta \leq \sigma \leq 1 - \Delta, \qquad 1/p^{2\sigma} \leq 1/p^{1+2\Delta} < 1,$$

то

$$\begin{aligned} \ln M_{12} &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{p^{2\sigma}}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2p^{\sigma}}{p^{2\sigma} + 1} \cos\varphi\right) \\ &= \frac{1}{p^{\sigma}} \cos\varphi + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right), \\ M_{12} &= \exp\left\{\frac{1}{p^{\sigma}} \cos\varphi + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (10)),

$$B_1(s) = \exp\left\{\sum_{p \leq P} \frac{1}{p^{\sigma}} \cos\varphi + O\left(\sum_{p \leq P} \frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right\}, \qquad s \in D_1(\Delta), \tag{18}$$

равномерно относительно $\varDelta \in (0, 1/4)$. Так как $\varDelta \le 1-\sigma \le 1/2-\varDelta$, то

$$\left| \sum_{p \le P} \frac{1}{p^{\sigma}} \cos\varphi + O\biggl(\sum_{p \le P} \frac{1}{p^{2\sigma}} \biggr) \right| < A \sum_{p \le P} \frac{1}{p^{\sigma}} \tag{19}$$
$$< \frac{A}{1-\sigma} P^{1-\sigma} < \frac{A}{\varDelta} P^{1/2-\varDelta}$$

и отсюда (см. (18)) следует (16).

Справедлива

Лемма 2.

$$\exp(-AP^{1-\varDelta}) < B_2(s) < \exp(AP^{1-\varDelta}), \tag{20}$$

для $s \in D_1(\varDelta)$, $T \to \infty$ *при условии*

$$\varDelta\beta > \omega(T) \tag{21}$$

где $\omega(T)$ *возрастает к* ∞ *при* $T \to \infty$.

Доказательство. Так как в силу (21) (см. (11))

$$(1-\sigma)(\beta+1) \ge \varDelta(\beta+1) > \omega(T),$$

то, полагая $1-\sigma = \overline{\sigma}$ получаем, аналогично случаю (18), формулу

$$B_2(s) = \exp\biggl\{ \sum_{p \le P} \frac{1}{p^{\overline{\sigma}}} \cos\varphi + O\biggl(\sum_{p \le P} \frac{1}{p^{2\overline{\sigma}}} \biggr) \biggr\}. \tag{22}$$

Так как (см. (15), ср. (19); $\varDelta \le \overline{\sigma} \le 1/2-\varDelta$)

$$\sum_{p \le P} \frac{1}{p^{\overline{\sigma}}} + O\biggl(\sum_{p \le P} \frac{1}{p^{2\overline{\sigma}}} \biggr) = O\biggl(\sum_{p \le P} \frac{1}{p^{\overline{\sigma}}} \biggr)$$
$$= O\biggl(\frac{P^{1-\overline{\sigma}}}{1-\overline{\sigma}} \biggr) = O\biggl(\frac{P^{\sigma}}{\sigma} \biggr) = O(P^{1-\varDelta}),$$

то из (22) следует (20).

Замечание 4. Оценка (20) имеет место и в несколько более широкой области

$$D_1^{+}(\varDelta) = \{ s : \sigma \in \langle 1/2, 1-\varDelta \rangle,\ t \in \langle T, T+H \rangle \}.$$

4. Отсутствие нулей в прямоугольнике $D_1(\varDelta_0)$. Прежде всего (см. (13))

$$|\chi(s)| < \frac{A}{P_0^{2\varDelta}}, \qquad s \in D_1(\varDelta). \tag{23}$$

Далее (см. (14), (16), (20)),

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad |\widetilde{\zeta}(s)| &\geq B_1(s) - |\chi(s)|B_2(s) \\
&> \exp\left(-\frac{A}{\varDelta}P^{1/2-\varDelta}\right) - \frac{A}{P_0^{2\varDelta}}\exp(AP^{1-\varDelta}) \\
&> \exp\left(-\frac{A}{\varDelta}P^{1/2-\varDelta}\right) - \frac{A}{P_0^{2\varDelta}}\exp(AP) \\
&= \left\{1 - \frac{A}{P_0^{2\varDelta}}\exp\left(AP + \frac{A}{\varDelta}P^{1/2-\varDelta}\right)\right\}\exp\left(-\frac{A}{\varDelta}P^{1/2-\varDelta}\right) \\
&> \left\{1 - \frac{A}{P_0^{2\varDelta}}\exp\left(\frac{2A}{\varDelta}P\right)\right\}\exp\left(-\frac{A}{\varDelta}P^{1/2-\varDelta}\right) \\
&= \left\{1 - A\exp\left(\frac{2A}{\varDelta}P - 2\varDelta\ln P_0\right)\right\}\exp\left(-\frac{A}{\varDelta}P^{1/2-\varDelta}\right).
\end{aligned}
$$

Так как

$$2\varDelta\ln P_0 - \frac{2A}{\varDelta}P = \frac{2\ln P_0}{\varDelta}\left(\varDelta^2 - A\frac{P}{\ln P_0}\right)$$

то мы полагаем (см. (1))

$$\varDelta_0 = \varDelta_0(\varepsilon, T) = \left(2A\frac{P}{\ln P_0}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2A}}{(\ln P_0)^{\varepsilon/2}}. \tag{25}$$

Поскольку (см. (1), (21))

$$\varDelta_0\beta > A_1(\ln P_0)^{\varepsilon/6} \to \infty, \qquad T \to \infty,$$

то условие (21) выполняется.

Теперь из (24) в силу (1), (25) получаем оценку

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\zeta}(s)| &> \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A}{\varDelta_0}P^{1/2-\varDelta_0}\right) > \exp\left(-\frac{A}{\varDelta_0}P^{1/2}\right) \\
&= \exp\left(-\sqrt{\frac{A}{2}\ln P_0}\right), \qquad s \in D_1(\varDelta_0),\ T \to \infty.
\end{aligned}
$$

Следовательно, имеет место

Лемма 3.

$$|\widetilde{\zeta}(s)| > \frac{1}{e^{\sqrt{A\ln P_0}}}, \qquad s \in D_1(\varDelta_0),\ T \to \infty.$$

Следствие 1.

$$\widetilde{\zeta}(s) \neq 0, \qquad s \in D_1(\varDelta_0),\ T \to \infty. \tag{26}$$

5. Отсутствие нулей в прямоугольнике $D_2(\varDelta_0)$. Пусть

$$D_2(\varDelta_0) = \{s : \sigma \in \langle 1 - \varDelta_0, K\rangle,\ t \in \langle T, T + H\rangle\}.$$

Отметим, что формула (18) справедлива и для всех $\sigma \in \langle 1-\Delta_0, K\rangle$ (см. доказательство леммы 1). Так как в нашем случае (ср. (19))

$$\left|\sum_{p\le P}\frac{1}{p^\sigma}\cos\varphi + O\left(\sum_{p\le P}\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right| < A\sum_{p\le P}\frac{1}{p^{1-\Delta_0}} < \frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0},$$

то имеет место оценка (ср. (16))

$$\exp\left(-\frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0}\right) < B_1(s) < \exp\left(\frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0}\right) \tag{27}$$

для $s\in D_2(\Delta_0),\ T\to\infty$.

Далее для $\zeta_2(s)$ используем представление (см. (2))

$$\zeta_2(s) = {\sum_{n<P_0}}' \frac{1}{n^{1-s}}.$$

Прежде всего (см. (1), (25) и (2) – представление $\zeta_2(s)$ произведением),

$$\begin{aligned} {\sum_{n<P_0}}' 1 &= (\beta+1)^{\pi(P)} = \exp\{\pi(P)\ln(\beta+1)\} \\ &< \exp\left(A(\varepsilon)\frac{P}{\ln P}\ln\ln P_0\right) = \exp\{A(\varepsilon)(\ln P_0)^{1-\varepsilon}\} \\ &< \exp(\Delta_0 \ln P_0) = P_0^{\Delta_0} \end{aligned} \tag{28}$$

(для $\pi(x)$ использована оценка сверху Чебышева). Далее (см. (1), (13)),

$$|\chi(s)| < \frac{A}{P_0^{2\sigma-1}},\qquad 1-\Delta_0\le\sigma\le K.$$

Теперь:

(A) в прямоугольнике $D_{21}(\Delta_0) = D_2(\Delta_0)\cap\{1-\Delta_0\le\sigma\le 1\}$ имеем (см. (2), (28); $1-2\Delta_0\le 2\sigma-1\le 1$)

$$\begin{aligned} \zeta_3(s) = \zeta_2(s)\chi(s) &= O\left(\frac{1}{P_0^{2\sigma-1}}{\sum_{n<P_0}}'\frac{1}{n^{1-\sigma}}\right) = O\left(\frac{1}{P_0^{2\sigma-1}}{\sum_{n<P_0}}' 1\right) \\ &= O\left(\frac{1}{P_0^{1-2\Delta_0}}P_0^{\Delta_0}\right) = O\left(\frac{1}{P_0^{1-3\Delta_0}}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

(B) в прямоугольнике $D_{22}(\Delta_0) = D_2(\Delta_0)\cap\{1<\sigma\le K\}$ имеем

$$\begin{aligned} \zeta_3(s) &= O\left(\frac{1}{P_0^{2\sigma-1}}{\sum_{n<P_0}}'\frac{1}{n^{1-\sigma}}\right) = O\left\{\frac{1}{P_0^\sigma}{\sum_{n<P_0}}'\left(\frac{n}{P_0}\right)^{\sigma-1}\right\} \\ &= O\left(\frac{1}{P_0^\sigma}{\sum_{n<P_0}}' 1\right) = O\left(\frac{1}{P_0^{1-\Delta_0}}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Следовательно (см. (29), (30)),

$$\zeta_3(s) = O\left(\frac{1}{P_0^{1-3\Delta_0}}\right), \qquad s \in D_2(\Delta_0). \tag{31}$$

Так как (см. (1), (25))

$$\frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0} = \frac{A}{\sqrt{2A_1}}(\ln P_0)^{\varepsilon/2}(\ln P_0)^{(1-\varepsilon)\Delta_0} < (\ln P_0)^{2\varepsilon/3}, \qquad T \to \infty,$$

то (см. (14), (27), (31)) в $D_2(\Delta_0)$ при $T \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned} |\widetilde{\zeta}(s)| &\geq B_1(s) - |\zeta_3(s)| > \exp\left(-\frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0}\right) - \frac{A}{P_0^{1-3\Delta_0}} \\ &= \left(1 - \exp\left\{\frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0} - (1-3\Delta_0)\ln P_0 + \ln A\right\}\right)\exp\left(-\frac{A}{\Delta_0}P^{\Delta_0}\right) \\ &> \frac{1}{2}\exp\{-(\ln P_0)^{2\varepsilon/3}\} > \exp\{-(\ln P_0)^{\varepsilon}\}, \end{aligned}$$

т.е. справедлива

Лемма 4.

$$|\widetilde{\zeta}(s)| > \frac{1}{e^{(\ln P_0)^{\varepsilon}}}, \qquad s \in D_2(\Delta_0),\ T \to \infty.$$

Следствие 2.

$$\widetilde{\zeta}(s) \neq 0, \qquad s \in D_2(\Delta_0),\ T \to \infty. \tag{32}$$

6. Лемма о разности логарифмов. Пусть

$$D_3(\Delta_0) = \{s : \sigma \in (1/2, 1/2+\Delta_0\rangle,\ t \in \langle T, T+H\rangle\} \tag{33}$$

и $\sigma = 1/2 + \delta,\ \delta \in (0, \Delta_0\rangle$. Справедлива

Лемма 5.

$$\ln B_1(s) - \ln B_2(s) = O\{\delta(\ln P_0)^{(1-\varepsilon)/2}\}, \qquad s \in D_3(\Delta_0),\ T \to \infty. \tag{34}$$

Доказательство. В силу (10), (11) имеем

$$\ln B_1(s) - \ln B_2(s) = Y_1 + Y_2, \tag{35}$$

где ($|z| = |\bar{z}|$)

$$Y_1 = \sum_{p \leq P}\left\{\ln\left|1 - \frac{p^{-i(\beta+1)t}}{p^{(\beta+1)(1/2+\delta)}}\right| - \ln\left|1 - \frac{p^{-i(\beta+1)t}}{p^{(\beta+1)(1/2-\delta)}}\right|\right\},$$

$$Y_2 = \sum_{p \leq P}\left\{\ln\left|1 - \frac{p^{it}}{p^{1/2-\delta}}\right| - \ln\left|1 - \frac{p^{it}}{p^{1/2+\delta}}\right|\right\}.$$

Пусть

$$x = \frac{1}{p^{\sigma}}, \qquad x \in \left\langle \frac{p^{-\delta}}{\sqrt{p}}, \frac{p^{\delta}}{\sqrt{p}} \right\rangle.$$

Очевидно (см. (1), (25)), что

$$\delta \ln p = O(\varDelta_0 \ln P) = O\left\{ \frac{\ln\ln P_0}{(\ln P_0)^{\varepsilon/2}} \right\} \to 0, \qquad T \to \infty,$$

$$\frac{p^{\delta} - p^{-\delta}}{\sqrt{p}} = O\left(\delta \frac{\ln p}{\sqrt{p}} \right).$$

Тогда, по теореме о среднем,

$$\ln \left| 1 - \frac{p^{-i(\beta+1)t}}{p^{(\beta+1)(1/2+\delta)}} \right| - \ln \left| 1 - \frac{p^{-i(\beta+1)t}}{p^{(\beta+1)(1/2-\delta)}} \right| = \frac{p^{-\delta} - p^{\delta}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{d}{dx} \{ \ln |1 - x^{\beta+1} p^{-i(\beta+1)t}| \} |_{x=x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{p^{\sigma_1}}, \qquad \sigma_1 \in (1/2 - \delta, 1/2 + \delta).$$

Так как ($\varphi = t \ln p$)

$$\ln |1 - x^{\beta+1} p^{-i(\beta+1)t}| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^{2\beta+2} - 2x^{\beta+1} \cos\{(\beta+1)\varphi\}),$$

то (см. (1))

$$\frac{d}{dx} \ln |\ldots| = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\beta+2)x^{2\beta+1} - 2(\beta+1)x^{\beta} \cos\{(\beta+1)\varphi\}}{1 + x^{2\beta+2} - 2x^{\beta+1} \cos\{(\beta+1)\varphi\}} = O\left(\frac{\beta}{p^{\sigma\beta}} \right) = O\left(\frac{\beta}{p^{\beta/2 - \delta/2}} \right) = O\left(\frac{\beta}{p^{\beta/2}} \right).$$

Следовательно,

$$(36) \qquad Y_1 = O\left(\delta \sum_{p \le P} \frac{\beta}{p^{\beta/3}} \cdot \frac{\ln p}{\sqrt{p}} \right) = O\left(\delta \frac{\beta}{2^{\beta/6}} \sum_{p \le P} \frac{1}{p^{\beta/6}} \right) = O(\delta).$$

В случае Y_2 аналогичным образом получаем

$$\ln \left| 1 - \frac{p^{it}}{p^{1/2-\delta}} \right| - \ln \left| 1 - \frac{p^{it}}{p^{1/2+\delta}} \right| = \frac{p^{-\delta} - p^{\delta}}{2\sqrt{p}} \cdot \frac{d}{dx} \ln(1 + x^2 - 2x\cos\varphi) |_{x=x_2},$$

где

$$\frac{d}{dx} \ln(\ldots) = \frac{2x - 2\cos\varphi}{1 + x^2 - 2x\cos\varphi} = O(1),$$

так как

$$1 + x^2 - 2x\cos\varphi \ge (1-x)^2 > (1 - 2^{-1/2+\delta})^2 > (1 - 2^{-1/3})^2 > 0.$$

Следовательно (см. (1)),

$$Y_2 = O\left(\delta \sum_{p\le P} \frac{\ln p}{\sqrt{p}}\right) = O(\delta\sqrt{P}) = O\{\delta(\ln P_0)^{(1-\varepsilon)/2}\} \tag{37}$$

(использовано преобразование Абеля, ср. [1], (31), (33)). Теперь из (35) в силу (36), (37) следует (34).

7. Более точное выражение для $\ln|\chi(s)|$**.** Справедлива

Лемма 6.

$$\ln|\chi(s)| = -(\sigma - 1/2)\ln\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{2\sigma-1}{t}\right), \quad s \in D_3(\varDelta_0),\ T\to\infty. \tag{38}$$

Доказательство. Так как (см. (3))

$$|\chi(s)| = \pi^{\sigma-1/2}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2} - i\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + i\frac{t}{2}\right)}\right| = \pi^{\sigma-1/2}G_1(\sigma,t),$$

где $G_1(\sigma,t) > 0,\ s\in D_3(\varDelta_0),\ T\to\infty$, то

$$\ln|\chi(s)| = (\sigma-1/2)\ln\pi + \ln G_1(\sigma,t) = (\sigma-1/2)\ln\pi + G_2(\sigma,t) \tag{39}$$

и $G_2(\sigma,t)$ – аналитическая функция действительной переменной σ для любого фиксированного t при $s\in D_3(\varDelta_0),\ T\to\infty$. Поскольку

$$|\chi(1/2+it)| = 1,$$

то $G_2(1/2,t) = 0$ и

$$G_2(\sigma,t) = (\sigma-1/2)G_3(\sigma,t).$$

Теперь (см. (39))

$$\ln|\chi(s)| = (\sigma-1/2)\{\pi + G_3(\sigma,t)\}, \qquad s\in D_3(\varDelta_0),\ T\to\infty. \tag{40}$$

В случае (12) имеем

$$\ln|\chi(s)| = -(\sigma-1/2)\ln\frac{t}{2\pi} + G_4(\sigma,t), \qquad G_4(\sigma,t) = O(1/t), \tag{41}$$

при условиях формулы (40), где $G_4(\sigma,t)$ – аналитическая функция действительной переменной σ. Так как, в силу (40), (41), $G_4(1/2,t) = 0$, то

$$G_4(\sigma,t) = (\sigma-1/2)G_5(\sigma,t). \tag{42}$$

Однако, для $s\in D_3(\varDelta_0),\ T\to\infty$, в силу (42), функции $G_4(\sigma,t)$, $G_5(\sigma,t)$ – одинакового порядка в переменной t. Так как (см. (41)) $G_4(\sigma,t) = O(1/t)$, то и

$$G_5(\sigma,t) = O(1/t). \tag{43}$$

Теперь из (41) в силу (42), (43) следует (38).

Замечание 5. Конечно, соотношение (38) можно получить и прямо (несколько кропотливыми вычислениями).

8. Завершение доказательства теоремы. Рассмотрим функцию

$$\ln \varLambda(s) = \ln B_1(s) - \ln B_2(s) - \ln|\chi(s)|,$$

для $s \in D_3(\varDelta_0)$, $T \to \infty$. Поскольку (см. (1), (38), $\sigma = 1/2 + \delta$)

$$\begin{aligned} \ln|\chi(s)| &= -\delta \ln \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{\delta}{t}\right) \\ &= -2\delta \ln P_0 + O\left(\frac{\delta H}{T}\right) + O\left(\frac{\delta}{T}\right), \end{aligned} \tag{44}$$

то в силу (6), (34), (44) получаем

$$\begin{aligned} \ln \varLambda(s) &= 2\delta \ln P_0 + O\{\delta(\ln P_0)^{(1-\varepsilon)/2}\} + O\left(\frac{\delta}{\sqrt{T}}\right) \\ &= \delta\left(2\ln P_0 + O\{(\ln P_0)^{(1-\varepsilon)/2}\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\right) \\ &> \delta \ln P_0 > 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Следовательно,

$$\varLambda(s) > 1, \qquad s \in D_3(\varDelta_0),\ T \to \infty$$

и (см. (14))

$$\begin{aligned} |\widetilde{\zeta}(s)| &\geq B_1(s) - |\chi(s)|B_2(s) = |\chi(s)|B_2(s)\left(\frac{B_1(s)}{|\chi(s)|B_2(s)} - 1\right) \\ &= |\chi(s)|B_2(s)(\varLambda(s) - 1) > 0, \qquad s \in D_3(\varDelta_0),\ T \to \infty \end{aligned} \tag{46}$$

(напомним, что по замечанию 4, $B_2(s) > 0$, $s \in D_3(\varDelta_0)$, $T \to \infty$). Теперь, в силу (26), (32), (46) и замечания 1 получаем (7).

В связи с доказательством теоремы мы еще получим оценку снизу для $\widetilde{\zeta}(s)$ в $D_3(\varDelta_0)$. Справедлива

Лемма 7.

$$|\widetilde{\zeta}(s)| > \frac{1}{P_0} \operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{2} \ln P_0\right), \qquad s \in D_3(\varDelta_0),\ T \to \infty, \tag{47}$$

где $\delta \in (0, \varDelta_0)$.

Доказательство. Так как (см. (1), (20), замечание 4 и (33))

$$B_2(s) > \exp(-AP^{1-\varDelta_0}) > \exp(-AP) = \exp\{-A(\ln P_0)^{1-\varepsilon}\}$$

и (см. (44), (45))

$$|\chi(s)| > P_0^{-(2+\varepsilon)\delta}, \qquad \Lambda(s) > P_0^{\delta},$$

то (см. (46))

$$\begin{aligned}|\widetilde{\zeta}(s)| &> \frac{\exp\{-A(\ln P_0)^{1-\varepsilon}\}}{P_0^{(2+\varepsilon)\delta}}(P_0^{\delta}-1) \\ &> 2\frac{\exp\{-A(\ln P_0)^{1-\varepsilon}\}}{P_0^{(3/2+\varepsilon)\Delta_0}}\cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{2}\ln P_0\right) > \frac{1}{P_0}\operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{2}\ln P_0\right),\end{aligned}$$

т.е. (47).

9. Замечания о функциях $\pi(x)$, $R(x)$. Пусть

$$D(\Delta_0) = D(\Delta_0, T, H, K) = \{s : \sigma \in \langle 1/2+\Delta_0, K\rangle,\ t \in \langle T, T+H\rangle\},$$
$$\Delta_0 = A/(\ln P_0)^{\varepsilon/2}.$$

Можно доказать, что имеет место

Формула 1.

$$\ln\widetilde{\zeta}(s) = s\int_2^P \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx - \pi(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) + O(e^{-A\beta}),$$
$$s \in D(\Delta_0),\ T\to\infty,$$

где $O(e^{-A\beta})$ – оценка величины

$$\sum_{p\le P}\ln\left(1-\frac{1}{p^{s(\beta+1)}}\right) + \ln\left(1+\frac{\chi(s)\zeta_2(s)}{\zeta_1(s)}\right) = \Omega_1(s;P,\beta)$$

в указанной области.

Так как

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + R(x) = U(x) + R(x),$$

то из формулы 1 получается

Формула 2.

$$\ln\widetilde{\zeta}(s) = s\int_2^P \frac{R(x)}{x(x^s-1)}\,dx - R(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) + O(e^{-A\beta}),$$
$$s \in D(\Delta_0),\ T\to\infty,$$

где $O(e^{-A\beta})$ – оценка величины

$$\Omega_1(s;P,\beta) + \Omega_2(s;P)$$

и

$$\begin{aligned}\Omega_2(s) = &-s\int\limits_2^P\left(\int\limits_2^x \frac{dv}{v(v^s-1)}\right)\frac{dx}{\ln x} - U(P)\ln\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int\limits_2^P \frac{dx}{x^{(n+1)s}\cdot\ln x}\\ &= O\left(\frac{\sqrt{\ln T}}{T}\right)\end{aligned}$$

в указанной области.

Итак, сложилась следующая обстановка. Функция $\pi(x)$, $x \in \langle 2, P\rangle$, является решением интегрального уравнения (при любом фиксированном $s \in D(\Delta_0)$)

$$\ln\widetilde{\zeta}(s) = s\int\limits_2^P \frac{\Phi(x)}{x(x^s-1)}\,dx - \Phi(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) + \Omega_1(s) \tag{48}$$

и $R(x)$, $x \in \langle 2, P\rangle$ – решением *возмущенного* интегрального уравнения

$$\ln\widetilde{\zeta}(s) = s\int\limits_2^P \frac{\Phi(x)}{x(x^s-1)}\,dx - \Phi(P)\ln\left(1-\frac{1}{P^s}\right) + \Omega_1(s) + \Omega_2(s). \tag{49}$$

З а м е ч а н и е 6. Тот факт, что функции $\pi(x)$, $R(x)$ удовлетворяют *близким* интегральным уравнениям (48), (49) (очень малое возмущение переводит одно из них в другое) соответственно, является совершенно новым фактом, который не имеет аналога в теории функций $\pi(x)$, $R(x)$ основанной на дзета-функции Римана.

Напомним, что функции $\pi(x)$, $R(x)$ ведут себя качественно различным образом: $\pi(x) \sim x/\ln x$, $x \to \infty$, а $R(x)$ при $x \to \infty$ бесчисленное число раз меняет знак (Литтлвуд, 1914 г.), при этом, амплитуда осцилляций $R(x)$ неограниченно возрастает при $x \to \infty$.

Вероятно за этим поведением функций $\pi(x)$, $R(x)$ при $x \to \infty$ кроется (ср. Замечание 6) некоторая форма *неустойчивости* соответствующих решений интегральных уравнений (48), (49).

Литература

[1] Ян М о з е р, *Простые числа и «блуждание» нулей некоторых частей формулы Римана–Зигеля*, Math. Slovaca (в печати).

[2] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Иностранная Литература, Москва, 1953.

Kat. Mat. Anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava, Slovakia
E-mail: Gera@fmph.uniba.sk

Поступило 19.9.1995
и в дополненной форме 2.7.1996

(2865)