ACTA ARITHMETICA
LXXX.1 (1997)

Etude d'un terme d'erreur lié à la fonction totient de Jordan

par

Christian Tudesq (Périgueux)

1. Introduction

1.1. *Historique — Notations.* Si $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction totient de Jordan J_k compte, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre d'entiers m, $1 \le m \le n$, qui ne sont divisibles par aucune des puissances k-ièmes des facteurs premiers de n. Ainsi J_1 est la fonction φ d'Euler,

$$J_1(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Cette relation se généralise en

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \quad \text{pour tout } k \ge 1 \text{ entier et tout } n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

et l'on a

$$\sum_{n \le x} J_k(n) \sim \frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} \qquad (x \to +\infty). \tag{3}$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout entier $k \ge 1$,

$$E_k(x) := \sum_{n \le x} J_k(n) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)}. \tag{4}$$

A la fin du dix-neuvième siècle, Sylvester a laissé entendre qu'il croyait l'inégalité $E_1(n) > 0$ réalisée pour tout entier $n > 0$. Il est amusant de noter que le contre exemple, $n = 820$, fourni par Sarma en 1931, est contenu dans une table publiée par Sylvester (cf. [5]).

En 1950 Erdős et Shapiro ont prouvé

Théorème (Erdős et Shapiro [2]).

$$E_1(n) = \Omega_{\pm}(n \log_4 n). \tag{5}$$

A ce jour le meilleur résultat sur ce sujet est dû à H. L. Montgomery:

Théorème (H. L. Montgomery [3]).

$$E_1(n) = \Omega_\pm(n\sqrt{\log_2 n}). \tag{6}$$

Corollaire immédiat de (5) ou (6) : $E_1(n)$ change de signe une infinité de fois.

Pour k entier ≥ 2, S. D. Adhikari et A. Sankaranarayanan ont obtenu en 1990 dans [1] :

Théorème A.

$$\sum_{n\leq x} E_k(n) \sim \frac{x^{k+1}}{2(k+1)\zeta(k+1)}. \tag{7}$$

Corollaire.

$$\limsup_{n\in\mathbb{N},\, n\to+\infty} \frac{E_k(n)}{n^k} \geq \frac{1}{2\zeta(k+1)}. \tag{8}$$

Théorème B.

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{E_k(x)}{x^k} \leq -\frac{1}{2\zeta(k+1)} \qquad (x \textit{ réel}). \tag{9}$$

Théorème C. *Il existe un entier strictement positif* n_k *tel que*

$$n \geq n_k \Rightarrow E_k(n) > 0 \qquad (k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ n \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

Théorème D.

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{E_k(x)}{x^k} \leq \frac{D}{\zeta(k+1)} \qquad (x \textit{ réel}), \tag{11}$$

où $D = 0.7159$ *pour* $k = 2$, $D = 0.6063$ *pour* $k \geq 3$.

Les démonstrations s'appuient sur la formule de convolution

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)^k, \tag{12}$$

où μ est la fonction de Möbius, et sur la représentation suivante :

$$E_k(x) = x^k \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x}{d}\right\}\right) + o(x^k), \tag{13}$$
$$k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ x \to +\infty,\ x \in \mathbb{R}^+,$$

où $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel u. Soient, pour k entier ≥ 2,

$$s_k := \limsup_{x\to+\infty} E_k(x)x^{-k}, \tag{14}$$

$$i_k := \liminf_{x\to+\infty} E_k(x)x^{-k}, \tag{15}$$

$$I_k := \liminf_{n\in\mathbb{N},\, n\to+\infty} E_k(n)n^{-k}. \tag{16}$$

Adhikari et Sankaranarayanan ont aussi montré :

$$s_k = \limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} E_k(n)n^{-k} \tag{17}$$

et

$$i_k = I_k - \frac{1}{\zeta(k+1)}. \tag{18}$$

Le lecteur aura noté, à l'aide de (15), (16) et (18), la compatibilité des théorèmes B et C.

Le lien entre I_k et s_k a été fait par Y.-F. S. Pétermann, dans [4] :

Théorème (Y.-F. S. Pétermann, 1991). *Pour k entier ≥ 2,*

$$s_k + I_k = \frac{1}{\zeta(k+1)}. \tag{19}$$

Ce dernier a également signalé, dans une communication privée a M. Balazard, que la suite $(I_k)_{k\geq 2}$ est strictemement croissante.

Pour k réel ≥ 1 et $k \notin \mathbb{N}$, nous étendons la définition de J_k par (2). L'extension des définitions de E_k, s_k, I_k, i_k à des valeurs réelles strictement plus grandes que 1 de k, celle de (17), (18), (19), à ce même intervalle, ne soulève pas de difficultés : les démonstrations originelles s'appliquent. Comme le laissaient prévoir (5) ou (6), il n'en va pas ainsi du théorème C.

1.2. *Ennoncé des résultats obtenus.* Le premier travail que nous avons mené a été d'étendre le domaine de validité du théorème C, tout en précisant la valeur de n_k.

Théorème 1. *Pour tout $n \geq 1$ entier et tout k réel ≥ 2,*

$$E_k(n) > 0. \tag{20}$$

Nous avons également obtenu :

Théorème 2. *Pour tout $n \geq 1$ entier et tout k réel ≥ 2,*

$$E_k(n^-) < 0. \tag{21}$$

Ces résultats ne se prolongent pas au voisinage (à droite) de 1. Nous mettons d'abord ce fait en évidence à l'aide des Ω-estimations de E_1, (5) ou (6) :

Proposition.

$$\lim_{\substack{k\to 1\\ k>1}} s_k = +\infty. \tag{22}$$

Puis, en nous inspirant des travaux de H. L. Montgomery, nous avons obtenu une minoration de s_k :

Théorème 3.

$$s_k \geq c\sqrt{\zeta(k)} \quad (k \textit{ réel} > 1) \tag{23}$$

avec

$$c := \frac{1}{5\zeta(2)} \exp\biggl(-\frac{1}{2}\sum_{p\geq 3}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_{p\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)}\frac{1}{p(p-1)}\biggr) > 0.1.$$

Nous terminons cette étude en précisant les variations de I_k sur un domaine non borné :

Théorème 4. *Il existe un réel* k_0, $1 < k_0 \leq 3$, *tel que* I_k *soit strictement croissante sur* $[k_0, +\infty[$.

Nous montrons que l'on peut prendre $k_0 = 1.97$ et nous conjecturons que I_k est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Tous ces résultats seront établis par des méthodes élémentaires.

2. Inégalités concernant la fonction totient de Jordan

2.1. *Principe de la démonstration du théorème* 1. On commence par donner, pour $x \in \mathbb{N}^*$, et k réel ≥ 2, une nouvelle expression de $E_k(x)$ sous forme de somme. Elle fournira les minorations de $E_k(x)$.

Nous distinguons $k \geq 3$ et $k \in [2, 3[$. Dans le premier cas nous établissons une majoration explicite de N_k, $N_k \leq M_k$, où $N_k := \min\{n_k \in \mathbb{N}, n_k \geq 1;\ n \geq n_k \Rightarrow E_k(n) > 0\}$, puis nous montrons que $E_k(n)$ est strictement positif pour $1 \leq n \leq M_k - 1$. Pour cela nous préciserons les variations de la suite $(E_k(n))_{1\leq n\leq M_k-1}$. Pour $k \in [2, 3[$ on prouvera directement $E_k(n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2. *Une estimation de* $E_k(x)$. La partie entière et la partie fractionnaire du nombre réel x sont notées respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\{x\}$.

Lemme 1. *Pour tout* $u \in \mathbb{R}$, $u \geq 1$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, *pour tout* $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$, *pour tout* k *réel*, $k \geq 1$, *on a*

$$\sum_{n\leq u} n^\lambda = \frac{u^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \biggl(\frac{1}{2} - \{u\}\biggr)u^\lambda + \lambda a_\lambda(u), \tag{24}$$

$$|a_\lambda(u)| \leq \frac{u^{\lambda-1}}{8}, \tag{25}$$

$$E_k(x) = -\frac{x^{k+1}}{k+1}\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}} + x^k\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{x}{d}\right\}\right) + k\sum_{d\le x}\mu(d)a_k\left(\frac{x}{d}\right) \tag{26}$$

où l'on a posé

$$a_\lambda(x) := \int_0^x\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)t^{\lambda-1}\,dt.$$

Démonstration. (24) s'obtient par sommation d'Abel, (25) par application de la deuxième formule de la moyenne. (26) est une conséquence de (24) et de l'égalité (12) qui se prolonge aux k réels, $k \ge 1$.

2.3. *Preuve du théorème* 1

Lemme 2. *Pour tout k réel ≥ 3 on a*

$$N_k \le M_k := \left\lfloor\frac{k\zeta(k-1)}{8-4\zeta(k)}\right\rfloor + 2.$$

Démonstration. Soit k réel ≥ 3 et $x \in \mathbb{R}$, $x \ge 1$. On minore successivement chacun des termes de (26). On a

$$-\frac{x^{k+1}}{k+1}\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}} \ge -\frac{x}{k(k+1)}. \tag{27}$$

Puis, on a

$$\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{x}{d}\right\}\right) \ge \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{x^k}\right)\right) \ge 1-\frac{\zeta(k)}{2},$$

donc

$$x^k\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{x}{d}\right\}\right) \ge x^k\left(1-\frac{\zeta(k}{2}\right). \tag{28}$$

Par (25)

$$\left|\sum_{d\le x}\mu(d)a_k\left(\frac{x}{d}\right)\right| \le \frac{x^{k-1}}{8}\sum_{d\le x}\frac{1}{d^{k-1}},$$

d'où

$$k\sum_{d\le x}\mu(d)a_k\left(\frac{x}{d}\right) \ge -\frac{k}{8}x^{k-1}\zeta(k-1). \tag{29}$$

On obtient ainsi

$$E_k(x) \ge A_k(x) := \left(1-\frac{\zeta(k)}{2}\right)x^k - \frac{k}{8}x^{k-1}\zeta(k-1) - \frac{x}{k(k+1)}.$$

Posons
$$x_k := \frac{k\zeta(k-1)}{8-\zeta(k)} \qquad \left(\text{donc } x_k \ge \frac{k\zeta(k)}{8-\zeta(k)} \ge \frac{k}{4} \ge \frac{3}{4}\right).$$
Pour tout $z \in \mathbb{R},\ z \ge 1$, nous avons
$$\begin{aligned} A_k(x_k+z) &= \left(1-\frac{\zeta(k)}{2}\right)z(x_k+z)^{k-1} - \frac{x_k+z}{k(k+1)} \\ &= (x_k+z)\left(\left(1-\frac{\zeta(k)}{2}\right)z(x_k+z)^{k-2} - \frac{1}{k(k+1)}\right), \end{aligned}$$
qui est supérieur ou égal à
$$(x_k+z)\left(\left(1-\frac{\zeta(3)}{2}\right)\left(\frac{3}{4}+1\right) - \frac{1}{12}\right) > 0,$$
d'où le lemme 2.

Notons que pour k réel ≥ 3 on a
$$\frac{k\zeta(k-1)}{8-\zeta(k)} \le \frac{2}{3}$$
puisque $3\zeta(k-1) - 16 + 8\zeta(k) \le 3\zeta(2) + 8\zeta(3) - 16 < 0$.

Lemme 3. *Pour tout k réel et n entier*, $1 \le n \le M_k - 2$, *on a* $E_k(n) \le E_k(n+1)$.

Cela achève la démonstration du théorème 1 pour k réel ≥ 3 puisque $E_k(1)$ est trivialement strictement positif.

Preuve du lemme 3. Soit k réel ≥ 3, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le n \le M_k - 2$. On a
$$E_k(n+1) = E_k(n) + \frac{n^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} + J_k(n+1) - \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)}.$$
Or
$$J_k(n+1) - \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} = (n+1)^k\left(\prod_{p\mid n+1}\left(1-\frac{1}{p^k}\right) - \frac{n+1}{(k+1)\zeta(k+1)}\right),$$
qui est minoré par
$$\begin{aligned} &(n+1)^k\left(\frac{1}{\zeta(k)} - \frac{n+1}{(k+1)\zeta(k+1)}\right) \\ &\qquad \ge \frac{(n+1)^k}{\zeta(k+1)}\left(\frac{\zeta(k+1)}{\zeta(k)} - \frac{(2k/3)+1}{k+1}\right) \\ &\qquad \ge \frac{(n+1)^k}{\zeta(k+1)}\left(\frac{1}{\zeta(k)} - \frac{3}{4}\right) \ge \frac{(n+1)^k}{\zeta(k+1)}\left(\frac{1}{\zeta(3)} - \frac{3}{4}\right) > 0, \end{aligned}$$
d'où le lemme 3.

Démonstration du théorème 1 pour $k \in [2,3[$. Soient $k \in [2,3]$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 6$. (27) est encore valable; de plus,

$$\sum_{d=1}^{x} \frac{1}{d^{k-1}} \leq \sum_{d=1}^{x} \frac{1}{d} \leq \log x + \gamma + \frac{1}{x} \leq \log x + 0.778,$$

où γ désigne la constante d'Euler, et

$$\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x}{d}\right\}\right) \geq 1 - \frac{\zeta(k)}{2} + \frac{1}{2(x+1)^{k-1}(k-1)}.$$

Ainsi, par (26),

$$\begin{aligned}
E_k(x) &\geq \left(1 - \frac{\zeta(k)}{2}\right)x^k - \frac{k}{8}(\log x + 0.778)x^{k-1} \\
&\quad + \frac{x^k}{2(x+1)^{k-1}(k-1)} - \frac{x}{k(k+1)} \\
&\geq x^{k-1}\left(\left(1 - \frac{\zeta(2)}{2}\right)x - \frac{k}{8}(\log x + 0.778)\right) + x\left(\frac{36}{196} - \frac{1}{6}\right) \\
&=: f_k(x).
\end{aligned}$$

La fonction

$$g_k(x) := \left(1 - \frac{\zeta(2)}{2}\right)x - \frac{k}{8}(\log x + 0.778)$$

est strictement croissante sur $[6, +\infty[$, avec $g_k(x) \geq g_3(6) > 0$; ceci assure $E_k(n) > 0$ pour tout n entier ≥ 6.

Toujours pour $k \in [2,3]$, $E_k(x)$ est trivialement > 0 pour $x \in \{1,2,3\}$. D'autre part, pour $x = 4$ on a l'équivalence

$$E_k(4) > 0 \Leftrightarrow 3^k + 4^k - 1 > \frac{4^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)}.$$

Les deux membres de cette dernière inégalité sont des fonctions croissantes de k (noter la croissance de $k \mapsto 4^{k+1}/(k+1)$) et on vérifie les cinq inégalités

$$3^{2+0.2n} + 4^{2+0.2n} - 1 > \frac{4^{3+0.2(n+1)}}{(3+0.2(n+1))\zeta(3+0.2(n+1))}, \quad n \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Le raisonnement est le même pour $x = 5$:

$$E_k(5) > 0 \Leftrightarrow 3^k + 4^k + 5^k - 2 > \frac{5^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)}$$

et l'on vérifie

$$3^{2+0.2n} + 4^{2+0.2n} + 5^{2+0.2n} - 2 > \frac{5^{3+0.2(n+1)}}{(3+0.2(n+1))\zeta(3+0.2(n+1))},$$

$n \in \{0,1,2,3,4\}$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

2.4. *Principe de la démonstration du théorème* 2. Nous avons, par définition,

$$E_k(n^-) = \sum_{m<n} J_k(m) - \frac{n^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} \quad (k \text{ réel } > 1,\ n \in \mathbb{N}^*).$$

La démonstration du théorème 2 est similaire à celle du théorème 1 : on distingue encore $k \geq 3$ et $k \in [2,3[$. Pour $k \geq 3$ on calcule explicitement, avec (26), un entier L_k tel que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq L_k \Rightarrow E_k(n^-) < 0$, notamment,

$$L_k = \left\lfloor \frac{k}{8} \cdot \frac{\zeta(k-1)\zeta(k)}{1-\zeta(k)^2/2} \right\rfloor + 2;$$

puis on établit que la suite $(E_k(n^-))_{1\leq n\leq L_k-1}$ est strictement décroissante. Pour $k \in [2,3[$ on prouve plus directement $E_k(n^-) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant des résultats, notamment numériques, de [4].

3. Comportement de s_k au voisinage à droite de $k = 1$

3.1. *Une preuve de* $\lim_{k\to 1,\, k>1} s_k = +\infty$. On a l'analogue du théorème 3.3 de [1] pour $k = 1$:

$$E_1(n) = n \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d} \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{n}{d} \right\} \right) + O(n),$$

qui entraîne

$$E_1(n) = -n \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d} \left\{ \frac{n}{d} \right\} + O(n). \tag{30}$$

D'autre part, pour tout k réel > 1,

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{n}{d} \right\} \right) = \frac{1}{2\zeta(k)} - n \sum_{d=n+1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^{k+1}} - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^k} \left\{ \frac{n}{d} \right\} \tag{31}$$

et

$$\left| \frac{1}{2\zeta(k)} - n \sum_{d=n+1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^{k+1}} \right| \leq \frac{3}{2}. \tag{32}$$

Soit M réel > 0. Puisque $E_1(n) = \Omega_+(n \log_4 n)$, (30) entraîne qu'il existe m_M, entier > 0, tel que

$$-\sum_{d=1}^{m_M} \frac{\mu(d)}{d} \left\{ \frac{m_M}{d} \right\} > M.$$

Par suite, comme

$$\lim_{\substack{k\to 1\\ k>1}} -\sum_{d=1}^{m_M} \frac{\mu(d)}{d^k} \left\{ \frac{m_M}{d} \right\} = -\sum_{d=1}^{m_M} \frac{\mu(d)}{d} \left\{ \frac{m_M}{d} \right\},$$

il existe k_M, réel > 1, tel que

$$1 < k < k_M \Rightarrow -\sum_{d=1}^{m_M} \frac{\mu(d)}{d^k}\left\{\frac{m_M}{d}\right\} > M.$$

Ainsi, avec (31) et (32),

$$1 < k < k_M \Rightarrow \sum_{d=1}^{m_M} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{m_M}{d}\right\}\right) > M - \frac{3}{2}.$$

Le lemme 1 de [4] étant encore valable, il suit que $s_k > M - 3/2$ pour $1 < k < k_M$. D'où le résultat annoncé.

Conséquences : 1) Avec (19) :

$$\lim_{\substack{k\to 1\\ k>1}} I_k = -\infty. \tag{33}$$

2) Avec (33) : le théorème C n'admet pas de prolongement au voisinage de 1 (et a fortiori le théorème 1 non plus).

3) Toujours avec (19) : le théorème 2 n'admet pas de prolongement au voisinage de 1 : pour $k > 1$ suffisamment proche de 1, $E_k(n^-)$ est strictement positif pour une infinité de valeurs de l'entier n.

3.2. *Esquisse de la preuve du théorème* 3. Nous employons la méthode des moyennes sur des progressions arithmétiques. Nous posons, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et k réel > 1,

$$R_k(x) := \sum_{n\le x} \frac{J_k(n)}{n^k} - \frac{x}{\zeta(k+1)},$$

$$h_k(x) := \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x}{d}\right\}\right).$$

Nous définissons s par

$$\begin{cases} s(0) = 0, \ s(x) := 1/2 - x \text{ pour } 0 < x < 1, \\ s \text{ périodique de période } 1. \end{cases}$$

En adaptant les démonstrations de [3] nous avons obtenu :

Lemme 4. *Pour* $q \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$, $q \le \exp(c_2\sqrt{\log N})$, *et* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, $0 < \alpha < q$,

$$\sum_{n=1}^{N} R_k(nq+\alpha) = C_k(q,\alpha)N - \frac{N}{2\zeta(k)} + O(N\exp(-c_2\sqrt{\log N})),$$

où c_2 *est une constante strictement positive et*

$$C_k(q,\alpha) := \frac{1}{\zeta(k+1)} \prod_{p\mid q} (1-p^{-k-1})^{-1} \sum_{d\mid q} \mu(d)\frac{s(\alpha/d)}{d^k}.$$

LEMME 5. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a*

$$R_k(x) = h_k(x) - \frac{1}{2\zeta(k)}.$$

Preuve du résultat annoncé. Soit k réel > 1, la relation (13) étant en fait valable pour tout k réel > 1, on a

$$s_k = \limsup_{x\to+\infty} h_k(x).$$

Soit z réel > 0 vérifiant $\operatorname{card}\{p \le z : p \text{ premier}, p \equiv 3 \pmod p\}$ pair, et $q_z = \prod_{p\le z,\, p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)} p$; q_z est congru à 1 modulo 4 et, facilement,

$$C_k\left(q_z, \frac{q_z}{4}\right) = \frac{1}{4\zeta(k+1)}\Big(\prod_{p|q_z}(1-p^{-k-1})^{-1}\Big)\sum_{d|q_z}\frac{1}{d^k}.$$

Par le lemme 4 (en choisissant $\alpha = q_z/4$) et par le lemme 5, on obtient, en faisant tendre N, puis z, vers l'infini,

$$s_k \ge \frac{1}{5\zeta(k+1)}\Big(\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-k-1})^{-1}\Big)\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}\left(1+\frac{1}{p^k}\right),$$

ce qui prouve que l'on peut choisir c inférieure à

$$\begin{aligned}
&\inf_{K>1}\frac{1}{5\zeta(K+1)}\Big(\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-K-1})^{-1}\Big)\\
&\quad\times\sqrt{\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-2K})}\sqrt{\Big(\prod_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-K})\Big)\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(1+p^{-K})}\\
&\quad\ge \inf_{K>1}\frac{1}{5\zeta(K+1)}\sqrt{\Big(\prod_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-K})\Big)\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(1+p^{-K})}.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big(\prod_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-k})\Big)\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(1+p^{-k})\\
&\qquad\ge \exp\Big(-\sum_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}(p^{-k}+p^{-2k}) + \sum_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}(p^{-k}-p^{-2k})\Big)\\
&\qquad\ge \exp\Big(-\sum_{p\ge 3}p^{-2} + \sum_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}p^{-k} - \sum_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}p^{-k}\Big).
\end{aligned}$$

Reste à minorer $\sum_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)} p^{-k} - \sum_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)} p^{-k}$.

Soient χ_0 et χ_1 les deux caractères modulo 4, χ_0 étant le caractère principal. χ_1 est défini par

$$\chi_1(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4, \\ 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Pour $l \in \{1, 3\}$ on a

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{p^\nu \equiv l \,(\mathrm{mod}\, 4)} \nu^{-1} p^{-\nu k} = \frac{1}{\varphi(4)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(l) \log L(k, \chi),$$

d'où

$$\sum_{p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} p^{-k} - \sum_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} p^{-k}$$
$$= -\log L(k, \chi_1) + \sum_{\nu=2}^{+\infty} \Big(\sum_{p^\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \nu^{-1} p^{-\nu k} - \sum_{p^\nu \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \nu^{-1} p^{-\nu k} \Big).$$

Par définition

$$L(k, \chi_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^k}$$

donc $0 < L(k, \chi_1) < 1$ (cf. l'expression de $\chi_1(n)$: $L(k, \chi_1)$ est une série alternée). Ainsi

$$\sum_{p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} p^{-k} - \sum_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} p^{-k}$$
$$= \sum_{\nu=2}^{+\infty} \Big(\sum_{p^\nu \equiv l \,(\mathrm{mod}\, 4)} \nu^{-1} p^{-\nu k} - \sum_{p^\nu \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \nu^{-1} p^{-\nu k} \Big)$$
$$\geq -\sum_{\nu=2}^{+\infty} \sum_{p^\nu \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \nu^{-1} p^{-\nu k} \geq - \sum_{\nu \geq 2,\, p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \frac{1}{2 p^{\nu k}}$$
$$\geq - \sum_{p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Cela achève la démonstration du théorème 3.

4. Preuve du théorème 4. Pour montrer la croissance de la suite $(I_k)_{k \geq 2}$, Pétermann s'est appuyé sur un encadrement de I_k. Notre démonstration repose sur une estimation exacte de I_k. Nous utiliserons à nouveau des résultats de [4].

LEMME 6. *Pour tout $k > 1$ on a $s_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} h_k(n)$.*

Lemme 7. *s_k est dérivable à droite sur* $]1,+\infty[$.

Remarque. s_k et I_k sont donc continues sur cet intervalle et I_k y est dérivable à droite.

Lemme 8. *Si* $D(k) := \sum_{d=1}^{+\infty} c_d/d^k \le 0$ *pour* $k = K$ *et si* $c_d \le 0$ *pour* $d < \Delta$, *et* $c_d \ge 0$ *pour* $d \ge \Delta$, *alors* $D(k) \le 0$ *pour tout* $k \ge K$.

Le lemme 6 est une conséquence immédiate de la démonstration de [4](2.4) : $s_k = \sup_{n\in\mathbb{Z}} h_k(n)$; celle-ci est, en fait, valable pour tout k réel > 1.

Le lemme 8 est une légère variante du lemme 3 de [4].

Preuve du lemme 7. Nous nous inspirons du travail de Pétermann. Pour n entier ≥ 1 nous notons p_n le n-ième nombre premier; pour r entier ≥ 1 nous posons $P_r := \prod_{p\le p_r} p$ et, pour k réel > 1,

$$\eta_0(k) := -\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{2d^k} + \sum_{\mu(d)=1} \frac{1}{d^{k+1}}.$$

Pour $r \ge 1$, les différentes classes de congruence $m(P_r)$ ($m = 0, 1, \ldots$ $\ldots, P_r - 1$) correspondent chacune à un système de congruences $S_{r,m} := \{m_d(d) : d \mid P_r\}$ (où par convention $0 \le m_d - 1$). Si $n \equiv m \pmod{P_r}$ alors, pour tout k réel > 1,

$$h_k(n) = \sum_{d\mid P_r} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \frac{m_d}{d}\right) + \sum_{d\nmid P_r} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right)$$

et l'on a

$$h_k(n) = \eta_0(k) + \varepsilon_{r,m}(k) + \delta_{r,n}(k) \tag{34}$$

où

$$\varepsilon_{r,m}(k) := \sum_{d\mid P_r} \frac{a_d}{d^{k+1}},$$

avec

$$a_d = a_{d,r}(m) := \begin{cases} m_d & \text{si } \mu(d) = -1, \\ d - 1 - m_d & \text{si } \mu(d) = 1 \end{cases}$$

et

$$0 < \delta_{r,n}(k) := \sum_{\substack{d\nmid P_r \\ \mu(d)=-1}} \frac{1}{d^k}\left\{\frac{n}{d}\right\} + \sum_{\substack{d\nmid P_r \\ \mu(d)=-1}} \frac{1}{d^k}\left(1 - \frac{1}{d} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right) < \frac{1}{(k-1)p_r^{k-1}}. \tag{35}$$

Soient

$$\varepsilon_{r_M}(k) := \sup_{0\le m\le P_r-1} \varepsilon_{r,m}(k) \quad \text{et} \quad \varepsilon_M(k) := \lim_{r\to+\infty} \varepsilon_{r_M}(k)$$

(qui existe dans $\mathbb{N}$ puisque la suite $(\varepsilon_{r_M}(k))_{r\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $\zeta(k)/\zeta(2k) - \zeta(k+1)/\zeta(2k+2)$).

Par (34), (35) et le lemme 6 nous avons $s_k = \eta_0(k) + \varepsilon_M(k)$, ce qui équivaut à

$$s_k = -\frac{\zeta(k)}{2\zeta(2k)} + \frac{\zeta(k+1)}{2\zeta(2k+2)} + \frac{1}{2\zeta(k+1)} + \varepsilon_M(k). \tag{36}$$

Or, pour $r \ge 1$ et $m \in \{0,1,\ldots,P_r-1\}$, $k \mapsto \varepsilon_{r,m}(k)$ étant convexe, il en est de même de $k \mapsto \varepsilon_M(k)$. D'où, avec (36), le lemme 7.

Soit $K > 1$ tel que $s_K \ge 1/2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, par le lemme 6,

$$h_K(n) \le s_K = \left(s_K + \frac{\beta}{2^K}\right) - \frac{1}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K}$$

où

$$\beta := 2^K \frac{1}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K} \qquad (\beta = \beta(K)).$$

Par conséquent, par le lemme 8,

$$k \ge K \Rightarrow h_k(n) \le \left(s_K + \frac{\beta}{2^k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^k};$$

d'où

$$k \ge K \Rightarrow s_k \le \left(s_K + \frac{\beta}{2^k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^k}.$$

Il suit de cela que la dérivée à droite de s_k en K est majorée par

$$-\frac{\beta}{2^K}\log 2 + \frac{1}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K}\log d.$$

Ceci équivaut à

$$0 \le I'_{K_d} + \frac{\zeta'(K+1)}{\zeta(K+1)^2} - \frac{\log 2}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K}\log d$$

où I'_{K_d} désigne la dérivée à droite de I_k au point K. Posons

$$F(K) := \frac{\zeta'(K+1)}{\zeta(K+1)^2} - \frac{\log 2}{2}\sum_{d=3}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K}\log d.$$

Avec la calculette du logiciel de calcul arithmétique PARI, nous avons obtenu $F(1.961\ldots) = 0$. Nous allons établir $F(K) < 0$ pour tout $K \ge 1.97$.

Nous commençons par prouver cette inégalité pour $K \geq 3$. Pour tout $K > 1$, $F(K)$ est majoré par

$$\begin{aligned}
&\biggl(-\frac{\log 2}{2^{K+1}} - \frac{\log 3}{3^{K+1}} - \frac{\log 5}{5^{K+1}} + \sum_{d=6}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^{K+1}} \log d \biggr) \\
&\qquad - \frac{\log 2}{2} \biggl(\frac{1}{3^K} + \frac{1}{5^K} + \sum_{d=6}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K} \biggr) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \biggl(\frac{\log 3}{3^K} + \frac{\log 5}{5^K} + \Bigl(\log 5 + \frac{1}{K-1} \Bigr) \frac{1}{(K-1)5^{K-1}} \biggr) \\
&\quad \leq \biggl(-\frac{\log 2}{2^{K+1}} + \frac{1}{2} \Bigl(\log 5 + \frac{1}{K-1} \Bigr) \frac{1}{K-1} \cdot \frac{1}{5^{K-1}} \biggr) \\
&\qquad + \biggl(\frac{\log(3/8)}{2 \cdot 3^{K+1}} + \frac{\log(125/32)}{2 \cdot 5^{K+1}} \biggr) + \sum_{d=6}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K} \biggl(\mu(d) \frac{\log d}{d} - \frac{\log 2}{2} \biggr),
\end{aligned}$$

qui est < 0 pour $K \geq 3$.

Nous écrivons maintenant $F(K)$ sous forme d'une somme de deux séries de Dirichlet, l'une à coefficients positifs, l'autre à coefficients négatifs : $F(K) = f(K) + g(K)$ où

$$\begin{aligned}
f(K) &:= \sum_{d=5}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^K} \biggl(\mu(d) \frac{\log d}{d} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log d}{2} \biggr), \\
g(K) &:= -\frac{\log 2}{2^{K+1}} + \frac{1}{3^K} \biggl(\frac{\log 3}{6} - \frac{\log 2}{2} \biggr).
\end{aligned}$$

f et g sont respectivement croissantes et décroissantes sur $]1, +\infty[$; un calcul machine similaire à celui effectué à la fin de la démonstration du théorème 1, avec cette fois des pas de $1/80$, permet d'aboutir à la majoration de $F(K)$ recherchée pour $1.97 \leq K \leq 3$.

Pour terminer la démonstration du théorème 4, il reste à verifier $s_k \geq 1/2$ pour tout $k \geq 1.97$. Nous montrons que cette inégalité est vraie pour tout $k > 1$.

Le point (2.2) de [4] s'étend aux k réels > 1 :

$$s_k \geq h_k(-1) = \frac{1}{\zeta(k+1)} - \frac{1}{2\zeta(k)} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^{k+1}} - \frac{1}{2(k-1)5^{k-1}},$$

qui est $> 1/2$ pour $k \geq 3$. Les fonctions $k \mapsto 1/\zeta(k+1)$ et $k \mapsto 1/(2\zeta(k))$ sont croissantes sur $]1, +\infty[$. Nous avons vérifié que

$$\frac{1}{\zeta\bigl(2 + \frac{n-1}{1000}\bigr)} - \frac{1}{2\zeta\bigl(1 + \frac{n}{1000}\bigr)} \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 2000,$$

ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Nous conjecturons que I_k est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

L'auteur remercie vivement Y.-F. S. Pétermann pour les remarques et commentaires qu'il a apporté à ce travail.

Bibliographie

[1] S. D. Adhikari and A. Sankaranarayanan, *On an error term related to the totient function* $J_k(n)$, J. Number Theory 34 (1990), 177–188.

[2] P. Erdős and H. N. Shapiro, *On the changes of sign of a certain error function*, Canad. J. Math. 3 (1951), no. 3, 375–384, et no. 4, 385.

[3] H. L. Montgomery, *Fluctuations in the mean of Euler's phi function*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 97 (1987), 239–245.

[4] Y.-F. S. Pétermann, *Oscillations d'un terme d'erreur lié à la fonction totient de Jordan*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux 3 (1991), 311–335.

[5] J. J. Sylvester, *Collected Papers IV*, Cambridge, 1912, 101–109.

34, rue Limogeanne
24 000 Périgueux, France

Reçu le 13.5.1996 (2985)