ACTA ARITHMETICA
VIII (1962)

Über totalprimitive Folgen

von

A. Sárközy (Budapest)

1. Unter einer Folge verstehen wir im weiteren eine aus nicht negativen ganzen Zahlen bestehende, monoton wachsend geordnete Folge.

Bezeichnen wir die Anzahl der in dem Intervall $[0, x]$ gelegenen Elemente der Folge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $A(x)$. Die Funktion $A(x)$ nennt man die *Anzahlfunktion* der Folge $\mathfrak{A}$. Die Folgen werden wir im weiteren mit großen Frakturbuchstaben, ihre Anzahlfunktionen mit den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Es seien $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ beliebige endliche, oder unendliche Folgen. Dann versteht man unter der Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ die Folge von Zahlen, die in der Form a_i+b_j $(i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots,$ geschrieben werden können. Sind zu einer gegebenen Folge $\mathfrak{A}$ solche, aus mindestens je zwei Elementen bestehende Folgen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vorhanden, für die $\mathfrak{B}+\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ gilt, so wird die Folge $\mathfrak{A}$ *reduzibel*, andernfalls *primitiv* genannt.

Die Folgen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *asymptotisch gleich* $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$, wenn für genügend große n

$$\mathfrak{A} \cap [n, +\infty) = \mathfrak{B} \cap [n, +\infty)$$

gilt.

Eine primitive Folge heißt *totalprimitiv*, wenn alle zu ihr asymptotisch gleichen Folgen primitiv sind.

H. H. Ostmann gibt in [1] eine Übersicht aller die primitiven und totalprimitiven Folgen betreffenden Ergebnisse (auch die erwähnten Definitionen habe ich aus [1] entnommen); neuere Ergebnisse sind in [2] enthalten.

2. Herr Professor P. Turán warf folgende Frage auf: wird eine beliebige Folge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ angegeben, kann es durch Veränderung von $o(A(n))$ Elementen der Folge stets erreicht werden, daß die veränderte Folge totalprimitiv sei? In dieser Arbeit werde ich aus diesem Problem ausgehend folgenden Satz beweisen:

Satz I. *Es sei Folge* $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ *eine beliebige unendliche Folge. Man kann aus dieser Folge stets eine solche totalprimitive Folge* $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ *erhalten, für die*

$$(1)\qquad \limsup_{n=+\infty} \frac{f_A(n)}{\dfrac{A(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}}} \leqslant x_0 \sqrt{\log 2\left(1+\frac{\log 2}{\log\dfrac{1+x_0}{2}}\right)} = c \approx 1{,}31$$

erfüllt ist, wo $f_A(x)$ *die Anzahl der im* $[0, x]$ *Intervall gelegenen veränderten Elemente ist (das heißt, aus* $[0, x] \cap \mathfrak{A}$ *gelangen wir zum* $[0, x] \cap \mathfrak{B}$ *durch Zuschreibung und Weglassung von insgesamt* $f_A(x)$ *Elementen), ferner ist* $c \approx 1{,}31$ *der (bei der Abszisse* $x_0 \approx 1{,}17$ *erreichte) Minimalwert der Funktion*

$$g(x) = x\sqrt{\log 2\left(1+\frac{\log 2}{\log(1+x)/2}\right)}.$$

Beweis. Es wird eine Fallunterscheidung durchgeführt.

1. Fall. Nehmen wir an, daß für unendlich viele natürliche Zahlen n

$$(2)\qquad A(2n)-A(n) < \frac{cA(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}}$$

ist.

Wählen wir aus den die (2) befriedigenden natürlichen Zahlen eine solche unendliche Teilfolge $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$, für die

$$(3)\qquad A(m_k) > 3m_{k-1}^2 \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

gilt.

Es sei $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} = \Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(2m_k+1)\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\big\{\big(2m_k+\sqrt{A(m_k)},\, m_{k+1}\big] \cap \mathfrak{A}\big\}\Big)$$

(wegen $A(m_1) > 1$ ist $2m_k+1 < 2m_k+\sqrt{A(m_k)}$ und wegen (3) ist $2m_k+\sqrt{A(m_k)} < m_{k+1}$).

Zunächst wird (1) bewiesen.

Betrachten wir eine beliebige natürliche Zahl $n \geqslant m_2$. Es gibt Zahlen m_k und m_{k+1}, für die $m_k \leqslant n < m_{k+1}$ gilt.

Dann ist wegen (2) und (3) für genügend große n

$$\begin{aligned} f_A(n) &\leqslant f_A\big(2m_{k-1}+\sqrt{A(m_{k-1})}\big) + \big[f_A(2m_k+1) - f_A\big(2m_{k-1}+\sqrt{A(m_{k-1})}\big)\big] + \\ &\qquad + \big[f_A(m_{k+1}) - f_A(2m_k+1)\big] \\ &< 3m_{k-1} + \left(\frac{cA(m_k)}{\sqrt{\log\log A(m_k)}}+1\right) + \sqrt{A(m_k)} \\ &\leqslant 5\sqrt{A(n)} + \frac{cA(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}} \end{aligned}$$

(da im Intervall $(30, +\infty)$ die Funktion $x/\sqrt{\log\log x}$ monoton wachsend ist), woraus sich (1) schon leicht ergibt.

Gehen wir nun auf den Beweis der Totalprimitivität der Folge $\mathfrak{B}$ über. Nehmen wir an, daß im Gegensatz zur Behauptung solche $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, \ldots\}$ und aus mindestens je zwei Elementen bestehende $\mathfrak{D} = \{d_1, d_2, \ldots\}$ und $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ Folgen und eine Zahl n_0 existieren, für die

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{E}$$

und

$$\mathfrak{C} \cap [n_0, +\infty) = \mathfrak{B} \cap [n_0, +\infty)$$

erfüllt ist.

Wählen wir k so groß, daß $m_k > n_0$, $\sqrt{A(m_k)} > 1+\max\{d_2-d_1, e_2-e_1\}$ erfüllt wird. Dann existieren wegen $2m_k+1 \in \mathfrak{C}$ Zahlen $d_i \in \mathfrak{D}$ und $e_j \in \mathfrak{E}$, für die $d_i+e_j = 2m_k+1$ gilt, ferner ist wegen $(m_k, 2m_k] \cap \mathfrak{C} = (m_k, 2m_k] \cap \mathfrak{B} = 0$ offensichtlich $d_i = d_1$ oder $e_j = e_1$; es ist anzunehmen, daß $d_i = d_1$ ist. Dann ist $d_2+e_j \in \mathfrak{C}$ und $2m_k+1 < d_2+e_j = (2m_k+1)+(d_2-d_1) < 2m_k+\sqrt{A(m_k)}$, obwohl der Konstruktion gemäß $\big(2m_k+1, 2m_k+\sqrt{A(m_k)}\big) \cap \mathfrak{B} = \big(2m_k+1, 2m_k+\sqrt{A(m_k)}\big) \cap \mathfrak{C} = 0$ ist; das heißt, aus der Behauptung, daß $\mathfrak{B}$ nicht totalprimitiv ist, sind wir zu einem Widerspruch gelangt.

2. Fall. Nehmen wir an, daß für $n \geqslant n_0$

$$(4)\qquad A(2n)-A(n) \geqslant \frac{cA(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}}$$

gilt.

Auch in diesem Fall werden wir einen kostruktiven Beweis durchführen. Zunächst wollen wir folgendes Lemma bestätigen:

Lemma. *Es sei* $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ *eine beliebige unendliche Folge, für die bei* $n \geqslant n_0$ (4) *erfüllt ist. Es sei* ε *eine beliebig kleine (aber* $\varepsilon < x_0-1$), ω *eine beliebig große positive Zahl. Es gibt dann eine Zahl* $n_1(\varepsilon, \omega)$ *so, daß für* $n \geqslant n_1(\varepsilon, \omega)$ *solche natürliche Zahlen* p *und* q *existieren, für die*

$$(5)\qquad n^{2+\varepsilon} \leqslant p \leqslant n^{(2+\varepsilon)\left(1+\frac{\log(2+\varepsilon)}{\log(1+x_0)-\log(2+\varepsilon)}\right)},$$

$$(6)\qquad 2p \leqslant q \leqslant (2+\varepsilon)p,$$

$$(7)\qquad A(p) > \omega A(n),$$

$$(8)\qquad A\big((2+\varepsilon)p\big) - A(p) < x_0 A(p)$$

und

$$(9)\qquad A(q+2n) - A(q-n) < \frac{A(q-n)}{\omega\sqrt{\log\log A(q-n)}} - 1$$

erfüllt ist.

Beweis. Aus (4) folgt, daß für $n \geqslant n_0$, $A(n) > 30$

$$A(n^2) \geqslant \sum_{k=1}^{[\log n/\log 2]} \big(A(2^k n) - A(2^{k-1} n)\big) \geqslant \frac{cA(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}} \left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$$

und so für $n \geqslant n_2(\varepsilon, \omega)$

$$A(n^2) > \omega A(n)$$

gilt.

Nun soll bewiesen werden, daß für $n \geqslant \max\{2, a_1\}$ eine Zahl p existiert, für die (5) und (8) erfüllt sind. Nehmen wir an, daß eine solche Zahl p nicht existiert. Dann ist für jedes (5) befriedigende p $A\big((2+\varepsilon)p\big) - A(p) \geqslant x_0 A(p)$ erfüllt, und so für

$$1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{(2+\varepsilon)\log n}{\log(1+x_0) - \log(2+\varepsilon)}\right] + 1 \stackrel{\text{def}}{=} g(n),$$

$$A\big((2+\varepsilon)^k n^{2+\varepsilon}\big) - A\big((2+\varepsilon)^{k-1} n^{2+\varepsilon}\big) \geqslant x_0 A\big((2+\varepsilon)^{k-1} n^{2+\varepsilon}\big)$$

gilt, das heißt

$$A\big((2+\varepsilon)^k n^{2+\varepsilon}\big) \geqslant (1+x_0) A\big((2+\varepsilon)^{k-1} n^{2+\varepsilon}\big)$$

ist. Daraus folgt, daß

$$(2+\varepsilon)^{g(n)} n^{2+\varepsilon} \geqslant A\big((2+\varepsilon)^{g(n)} n^{2+\varepsilon}\big) \geqslant (1+x_0)^{g(n)}$$

woraus

$$g(n) \leqslant \frac{(2+\varepsilon)\log n}{\log(1+x_0) - \log(2+\varepsilon)}$$

ist, was der Definition von $g(n)$ widerspricht.

Nun werden wir auf indirektem Weg bestätigen, daß zu einer Zahl p, die (5) und (8) befriedigt, für $n \geqslant n_3(\varepsilon, \omega)$ immer ein q zu finden ist, das (6) und (9) befriedigt. Wenn nämlich ein solches q nicht existierte, so wäre — da im Intervall $(30, +\infty)$ die Funktion $x/\sqrt{\log\log x}$ monoton wächst — für $n \geqslant n_4(\varepsilon, \omega)$ bei beliebigem $2p \leqslant i \leqslant (2+\varepsilon)p - n$ offenbar

$$A(i+3n) - A(i) \geqslant \frac{A(i)}{\omega\sqrt{\log\log A(i)}} - 1 \geqslant \frac{A(2p)}{\omega\sqrt{\log\log A(2p)}} - 1$$
$$> \frac{A(n)}{\omega\sqrt{\log\log A(n)}}$$

erfüllt. So würde aus der Behauptung für $n \geqslant n_5(\varepsilon, \omega)$

$$A\big([(2+\varepsilon)p] - n\big) > A\big([(2+\varepsilon)p] - n\big) - A(2p)$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{[(\varepsilon p - n)/3n]} \big\{A(2p+3kn) - A\big(2p+3(k-1)n\big)\big\}$$
$$\geqslant \left(\frac{A(n)}{\omega\sqrt{\log\log A(n)}} - 1\right)\left[\frac{\varepsilon p - n}{3n}\right] \geqslant \left(\frac{A(n)}{\omega\sqrt{\log\log A(n)}} - 1\right)\left[\frac{\varepsilon n^{2+\varepsilon} - n}{3n}\right] > n^{1+\varepsilon}$$

folgen und so wäre für $n \geqslant n_6(\varepsilon, \omega)$

$$\frac{A\big([(2+\varepsilon)p] - n\big)}{\sqrt{\log\log A\big([(2+\varepsilon)p] - n\big)}} > \frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{\log\log n^{1+\varepsilon}}} = \frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{\log(1+\varepsilon) + \log\log n}}$$
$$> 3\omega n \geqslant \omega\big\{A\big([(2+\varepsilon)p] + 2n\big) - A\big([(2+\varepsilon)p] - n\big)\big\},$$

die Zahl $q = [(2+\varepsilon)p]$ würde also den Voraussetzungen (6) und (9) genügen und so sind wir tatsächlich zu einem Widerspruch gelangt. Damit ist das Lemma bewiesen worden.

Nun gehen wir auf die Konstruktion über. Wir werden eine Teilfolge angeben, auf der die Konstruktion beruht. Diese Teilfolge werden wir aus „Blöcken“ zusammenstellen.

Die Definition des ersten Blockes ist die folgende:

Es sei $m_1^{(1)} = \max\{n_1(\frac{1}{10}, 10), a_{100}\}$ (wo $n_1(\varepsilon, \omega)$ die im Lemma definierte Funktion ist). Die Zahlen $m_2^{(1)}, m_3^{(1)}, \ldots, m^{(1)}_{(m_1^{(1)})^2+1}$ werden wir durch Rekursion definieren. Nehmen wir an, daß $m_{i-1}^{(1)}$ $(i = 2, 3, \ldots, (m_1^{(1)})^2+1)$ schon bekannt ist. Wenden wir das Lemma mit $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\omega = 10$ und $n = m_{i-1}^{(1)}$ an, und bezeichnen wir das minimale p mit $p_{i-1}^{(1)}$, das zugehörige minimale q mit $q_{i-1}^{(1)}$. Es sei $0 < r_{i-1}^{(1)} \leqslant m_1^{(1)}$ das Repräsentantelement jener Restklasse $\bmod m_1^{(1)}$ (wenn es mehrere gibt, einer von ihnen), die aus den Restklassen $\bmod m_1^{(1)}$ die wenigsten Elemente des Durchschnitts $(p_{i-1}^{(1)}; q_{i-1}^{(1)}] \frown \mathfrak{A}$ enthält. Es sei $m_i^{(1)} = q_{i-1}^{(1)} + r_{i-1}^{(1)}$. Damit sind die Elemente des ersten Blockes definiert.

Die Elemente des k-ten Blockes $(k = 2, 3, \ldots)$ sind mit der folgenden Rekursion zu definieren: es sei $m_1^{(k)}$ die kleinste Zahl, für die $m_1^{(k)} \geqslant n_1(1/10^k, 10^k)$ und $A(m_1^{(k)}) \geqslant \max\big\{\big(m^{(k-1)}_{(m_1^{(k-1)})^2+1}\big)^2, 10^{2k}\big\}$ erfüllt ist. Nehmen wir an, daß $m_{i-1}^{(k)}$ $(i = 2, 3, \ldots, (m_1^{(k)})^2+1)$ schon bekannt ist, und definieren wir $m_i^{(k)}$ auf folgende Weise: wenden wir das Lemma mit $\varepsilon = 1/10^k$, $\omega = 10^k$ und $n = m_{i-1}^{(k)}$ an, und bezeichnen wir das minimale p mit $p_{i-1}^{(k)}$, das dazugehörende minimale q mit $q_{i-1}^{(k)}$. Es sei $0 < r_{i-1}^{(k)} \leqslant m_1^{(k)}$ das Repräsentantelement jener Restklasse $\bmod m_1^{(k)}$ (wenn es mehrere gibt, einer von ihnen), die aus den Restklassen $\bmod m_1^{(k)}$ die wenigsten Elemente des Durchschnitts $(p_{i-1}^{(k)}; q_{i-1}^{(k)}] \frown \mathfrak{A}$ enthält. Es sei $m_i^{(k)} = q_{i-1}^{(k)} + r_{i-1}^{(k)}$.

Nun sind wir in der Lage die gesuchte Folge $\mathfrak{B}$ zu definieren. Es sei

$$\mathfrak{B}^{(k)} = \big(\mathfrak{A} \frown [m_1^{(k)}; p_1^{(k)}]\big) \smile$$
$$\smile \Big\{\mathfrak{A} \frown \Big(\bigcup_{i=1}^{(m_1^{(k)})^2} \{n\colon p_i^{(k)} < n < m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)},\ n \not\equiv r_i^{(k)} \ (\bmod m_1^{(k)})\}\Big)\Big\} \smile$$
$$\smile \Big(\bigcup_{i=1}^{(m_1^{(k)})^2+1} m_i^{(k)}\Big) \smile \Big\{\mathfrak{A} \frown \Big(\bigcup_{i=1}^{(m_1^{(k)})^2-1} (m_{i+1}^{(k)} + m_i^{(k)}; p_{i+1}^{(k)}]\Big)\Big\} \smile$$
$$\smile \Big(\mathfrak{A} \frown \big(m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2+1} + m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2}; m_1^{(k+1)}\big)\Big) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathfrak{B}^{(k)}.$$

Zunächst beweisen wir (1). Beginnen wir mit einigen einfachen Bemerkungen.

Wie erwähnt, ist im Intervall $(100, +\infty)$ die Funktion $x/\sqrt{\log\log x}$ monoton wachsend. So ergibt sich aus der Konstruktion auf Grund (9) und $A(m_1^{(k)}) \geqslant A(m_1^{(1)}) \geqslant 100$, daß

$$(10)\qquad f_A(m_{i+1}^{(k)} + m_i^{(k)}) - f_A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)} - 1) \leqslant \frac{A(q_i^{(k)} - m_i^{(k)})}{10^k\sqrt{\log\log A(q_i^{(k)} - m_i^{(k)})}}$$

$$\leqslant \frac{A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)})}{10^k\sqrt{\log\log A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)})}} \qquad \big(k = 1, 2, 3, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, (m_1^{(k)})^2\big)$$

ist.

Aus der Konstruktion auf Grund (8) und $A(m_1^{(k)}) \geqslant A(m_1^{(1)}) \geqslant 100$ läßt es sich leicht beweisen, daß

$$N\{n\colon\ n \in \mathfrak{A};\ p_i^{(k)} < n < m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)};\ n \equiv r_i^{(k)} \pmod{m_1^{(k)}}\}$$

$$\leqslant \frac{A(q_i^{(k)}) - A(p_i^{(k)})}{m_1^{(k)}} < \frac{x_0 A(p_i^{(k)})}{m_1^{(k)}} \qquad \big(k = 1, 2, 3, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, (m_1^{(k)})^2\big)$$

(die linke Seite bedeutet die Anzahl jener ganzen Zahlen n, für die $n \in \mathfrak{A}$, $p_i^{(k)} < n < m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)}$ und $n \equiv r_i^{(k)} \pmod{m_1^{(k)}}$ erfüllt ist), folglich ist

$$(11)\qquad f_A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)} - 1) - f_A(p_i^{(k)}) < \frac{x_0 A(p_i^{(k)})}{m_1^{(k)}}$$

$$\big(k = 1, 2, 3, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, (m_1^{(k)})^2\big).$$

Schließlich soll erwähnt werden, daß — da $A(m_1^{(k)}) \geqslant 10^{2k}$ ist und im Intervall $(100, +\infty)$ die Funktion $x/\sqrt{\log\log x}$ monoton wächst — für $m_1^{(k)} \leqslant y$ und $A(y) < A(z)/10^k$ gilt offensichtlich

$$(12)\qquad \frac{A(y)}{\sqrt{\log\log A(y)}} < \frac{A(z)/10^k}{\sqrt{\log\log(A(z)/10^k)}}$$

$$= \frac{A(z)}{10^k\sqrt{\log(\log A(z) - \log 10^k)}} < \frac{A(z)}{10^k\sqrt{\log(\frac{1}{2}\log A(z))}}$$

$$= \frac{A(z)}{10^k\sqrt{\log\log A(z) - \log 2}} < \frac{A(z)}{10^k\sqrt{\frac{1}{2}\log\log A(z)}}$$

$$< \frac{2A(z)}{10^k\sqrt{\log\log A(z)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Es sei nun n eine beliebige natürliche Zahl, für die $n \geqslant m_1^{(2)}$ erfüllt ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, für die $m_1^{(k)} \leqslant n < m_1^{(k+1)}$ $(k \geqslant 2)$ ist. Führen wir eine Fallunterscheidung durch.

a) Es sei $n \leqslant p_1^{(k)}$. Dann ist

$$(13)\qquad f_A(n) = f_A(m_1^{(k)}) \leqslant f_A(m^{(k-1)}_{(m_1^{(k-1)})^2+1} + m^{(k-1)}_{(m_1^{(k-1)})^2}) + 1$$

$$< m^{(k-1)}_{(m_1^{(k-1)})^2+1} + m^{(k-1)}_{(m_1^{(k-1)})^2} + 1 \leqslant 2m^{(k-1)}_{(m_1^{(k-1)})^2+1} \leqslant 2\sqrt{A(m_1^{(k)})} \leqslant 2\sqrt{A(n)}.$$

Es sei $n > p_1^{(k)}$ und es sei der größte Index i, für den noch $p_i^{(k)} < n$ ist, i_0.

b) Nehmen wir an, daß $p_{i_0}^{(k)} < n < m_{i_0+1}^{(k)} - m_{i_0}^{(k)}$ ist. Dann ist auf Grund von (7), (10), (11), (12), (13) und $A(m_1^{(k)}) > A(m_1^{(1)}) \geqslant 100$

$$(14)\qquad f_A(n) \leqslant f_A(m_1^{(k)}) + \sum_{i=1}^{i_0}\big(f_A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)} - 1) - f_A(p_i^{(k)})\big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i_0-1}\big(f_A(m_{i+1}^{(k)} + m_i^{(k)}) - f_A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)} - 1)\big)$$

$$< 2\sqrt{A(m_1^{(k)})} + \sum_{i=1}^{i_0}\frac{x_0 A(p_i^{(k)})}{m_1^{(k)}} + \sum_{i=1}^{i_0-1}\frac{A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)})}{10^k\sqrt{\log\log A(m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)})}}$$

$$< 2\sqrt{A(m_1^{(k)})} + \sum_{i=0}^{i_0-1}\frac{x_0}{m_1^{(k)}}\cdot\frac{A(p_{i_0}^{(k)})}{(10^k)^i} + \frac{1}{10^k}\sum_{i=0}^{i_0-2}\left(\frac{2}{10^k}\right)^i \frac{A(m_{i_0}^{(k)} - m_{i_0-1}^{(k)})}{\sqrt{\log\log A(m_{i_0}^{(k)} - m_{i_0-1}^{(k)})}}$$

$$< 2\sqrt{A(m_1^{(k)})} + \frac{1}{1 - 1/10^k}\cdot\frac{x_0 A(p_{i_0}^{(k)})}{m_1^{(k)}} + \frac{1}{10^k(1 - 2/10^k)}\cdot\frac{A(p_{i_0}^{(k)})}{\sqrt{\log\log A(p_{i_0}^{(k)})}}$$

$$< 2\sqrt{A(n)} + \frac{x_0 A(n)}{(1 - 1/10^k)\, m_1^{(k)}} + \frac{A(n)}{(10^k - 2)\sqrt{\log\log A(n)}}.$$

c) Nehmen wir an, daß $i_0 < (m_1^{(k)})^2$ und $m_{i_0+1}^{(k)} - m_{i_0}^{(k)} \leqslant n \leqslant p_{i_0+1}^{(k)}$ ist. Dann ist auf Grund von (10), (14) und $A(m_1^{(k)}) > A(m_1^{(1)}) \geqslant 100$

$$(15)\qquad f_A(n) \leqslant f_A(m_{i_0+1}^{(k)} - m_{i_0}^{(k)} - 1) + \big(f_A(m_{i_0+1}^{(k)} + m_{i_0}^{(k)}) - f_A(m_{i_0+1}^{(k)} - m_{i_0}^{(k)} - 1)\big)$$

$$< \left(2\sqrt{A(m_1^{(k)})} + \frac{x_0 A(p_{i_0}^{(k)})}{(1 - 1/10^k)\, m_1^{(k)}} + \frac{A(p_{i_0}^{(k)})}{(10^k - 2)\sqrt{\log\log A(p_{i_0}^{(k)})}}\right) +$$

$$+ \frac{A(m_{i_0+1}^{(k)} - m_{i_0}^{(k)})}{10^k\sqrt{\log\log A(m_{i_0+1}^{(k)} - m_{i_0}^{(k)})}}$$

$$< 2\sqrt{A(n)} + \frac{x_0 A(n)}{(1 - 1/10^k)\, m_1^{(k)}} + \frac{1}{10^k}\left(1 + \frac{1}{1 - 2/10^k}\right)\frac{A(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}}.$$

d) Es sei $m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2+1}-m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2}\leqslant n<m_1^{(k+1)}$. Dann kann in Analogie zum Beweis von (15) bewiesen werden, daß

$$f_A(n)\leqslant f_A\big(m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2+1}+m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2}\big) \tag{16}$$
$$<2\sqrt{A(n)}+\frac{x_0A\big(p^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2}\big)}{(1-1/10^k)\,m_1^{(k)}}+\frac{1}{10^k}\left(1+\frac{1}{1-2/10^k}\right)\frac{A(n)}{\sqrt{\log\log A(n)}}.$$

Schließlich ist es leicht ersichtlich, daß $m^{(k)}_{i+1}<4p_i^{(k)}$ ($k=1,2,3,\ldots;$ $i=1,2,\ldots,(m_1^{(k)})^2$) ist. Infolge von (5) ist also

$$(4m_1^{(k)})^{\left(\left(2+\frac{1}{10^k}\right)\left(1+\frac{\log(2+1/10^k)}{\log(1+x_0)-\log(2+1/10^k)}\right)\right)^{(m_1^{(k)})^2}}>m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2+1},$$

woraus sich ergibt, daß für ein beliebiges $\varepsilon>0$ bei $k>k_0(\varepsilon)$

$$m_1^{(k)}>\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\log\left(2+\frac{1}{10^k}\right)\left(1+\frac{\log(2+1/10^k)}{\log(1+x_0)-\log(2+1/10^k)}\right)}}\sqrt{\log\log m^{(k)}_{(m_1^{(k)})^2+1}} \tag{17}$$

gilt.

Aus (13), (14), (15), (16) und (17) folgt (1) schon leicht.

Gehen wir auf den Beweis der Totalprimitivität der Folge $\mathfrak{B}$ über, wobei wir einen indirekten Beweis durchführen werden. Nehmen wir an, daß eine solche Folge $\mathfrak{C}$ und aus mindestens je zwei Elementen bestehende Folgen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ existieren, für die

$$\mathfrak{C}\cap[n_7,+\infty)=\mathfrak{B}\cap[n_7,+\infty)$$

und

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{D}+\mathfrak{E}$$

erfüllt ist.

Wählen wir k so groß, daß $m_1^{(k)}>\max\{n_7,d_2,e_2\}$ sei. Wir können dann infolge von $m_i^{(k)}\in\mathfrak{C}$ zu einem beliebige Element $m_i^{(k)}$ ($i=1,2,\ldots,(m_1^{(k)})^2+1$) solche Zahlen d_{r_i} und e_{s_i} finden, für die $d_{r_i}\in\mathfrak{D}$, $e_{s_i}\in\mathfrak{E}$ und

$$d_{r_i}+e_{s_i}=m_i^{(k)}$$

gilt.

Wir werden beweisen, daß für $j\neq l$ von

$$d_{r_j}\not\equiv d_{r_l}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)})$$

und

$$e_{s_j}\not\equiv e_{s_l}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)})$$

mindestens das eine erfüllt wird. Dies würde offensichtlich einen Widerspruch bedeuten; $\operatorname{mod} m_1^{(k)}$ können nämlich nur $(m_1^{(k)})^2$ inkongruente Zahlenpaare existieren.

Ist

$$m_j^{(k)}\not\equiv m_l^{(k)}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)}),$$

so ist die Behauptung trivial; es genügt daher sich auf

$$m_j^{(k)}\equiv m_l^{(k)}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)})$$

zu beschränken. Ohne Beschränkung der Verallgemeinerung ist anzunehmen, daß $j<l$ ist.

Wäre

$$d_{r_j}\equiv d_{r_l}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)})$$

und

$$e_{s_j}\equiv e_{s_l}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)}),$$

so wäre von

$$d_{r_j}\geqslant d_{r_l} \tag{18}$$

und

$$e_{s_j}\geqslant e_{r_l} \tag{19}$$

mindestens das eine erfüllt. Wegen $d_{r_l}+e_{s_l}=m_l^{(k)}>2p^{(k)}_{l-1}$ ist nämlich aus $d_{r_l}>p^{(k)}_{l-1}$ und $e_{s_l}>p^{(k)}_{l-1}$ mindestens das eine erfüllt; es ist anzunehmen, daß das letztere erfüllt ist. Dann ist $e_{s_l}+d_{r_j}>p^{(k)}_{l-1}$, $e_{s_l}+d_{r_j}\in\mathfrak{B}$ und

$$e_{s_l}+d_{r_j}\equiv e_{s_l}+d_{r_l}\equiv m_l^{(k)}\equiv r^{(k)}_{l-1}\ (\operatorname{mod} m_1^{(k)})$$

und daher $e_{s_l}+d_{r_j}\geqslant m_l^{(k)}=e_{s_l}+d_{r_l}$; mithin wäre (18) wirklich erfüllt.

Nehmen wir an, daß von (18) und (19) (18) erfüllt wird. Dann existiert wegen $m_1^{(k)}>d_2$ eine Zahl d_t, für die $d_t\in[0,m_1^{(k)})\cap\mathfrak{D}$ und $d_t\neq d_{r_l}$ gilt. So ist $d_t+e_{s_l}\in\mathfrak{B}$, $d_t+e_{s_l}\neq d_{r_l}+e_{s_l}=m_l^{(k)}$ und $|(d_t+e_{s_l})-m_l^{(k)}|=|(d_t+e_{s_l})-(d_{r_l}+e_{s_l})|=|d_t-d_{r_l}|\leqslant m_j^{(k)}\leqslant m^{(k)}_{l-1}$; der Konstruktion gemäß ist aber $\mathfrak{B}\cap[m_l^{(k)}-m^{(k)}_{l-1};\ m_l^{(k)}+m^{(k)}_{l-1}]=m_l^{(k)}$, und so sind wir tatsächlich zu einem Widerspruch gekommen.

3. Mit Hilfe einer ähnlichen Idee, aber auf wesentlich einfachere Weise ist der folgende—teils schwächere, teils stärkere—Satz beweisbar:

SATZ II. *Es sei* $\mathfrak{A}=\{a_1,a_2,\ldots\}$ *eine beliebige unendliche Folge. Dann kann durch Veränderung von* $O\left(\frac{n\log\log n}{\log n}\right)$ *Elementen der Folge stets erreicht werden, daß die veränderte Folge totalprimitiv sei.*

Beweis. Wir geben einen konstruktiven Beweis.

Zunächst definieren wir eine Teilfolge, auf welcher die Konstruktion beruht. Die Teilfolge werden wir aus Blöcken zusammenstellen und die Definition derselben durch Rekursion durchführen.

Die Definition des ersten Blockes lautet: es sei $m_1^{(1)} = 10$. Es sei $p_{i-1}^{(1)} = [m_{i-1}^{(1)} \log m_{i-1}^{(1)}]$ und $m_i^{(1)} = ([2p_{i-1}^{(1)}/m_1^{(1)}]+1)\,m_1^{(1)}$ $(i = 2, 3, \ldots, m_1^{(1)}+1)$.

Die Definition des k-ten Blockes $(k = 2, 3, \ldots,)$ lautet: es sei $m_1^{(k)} = (m^{(k-1)}_{m_1^{(k-1)}+1})^2$. Es sei $p_{i-1}^{(k)} = [m_{i-1}^{(k)} \log m_{i-1}^{(k)}]$ und $m_i^{(k)} = ([2p_{i-1}^{(k)}/m_1^{(k)}]+1)\,m_1^{(k)}$ $(i = 2, 3, \ldots, m_1^{(k)}+1)$.

Es sei nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}^{(k)} = (\mathfrak{A} \cap [m_1^{(k)}; p_1^{(k)}]) \cup \\ \cup \Big\{\mathfrak{A} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{m_1^{(k)}} \{n\colon p_i^{(k)} < n < m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)},\ n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m_1^{(k)})\}\Big)\Big\} \cup \\ \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{m_1^{(k)}+1} m_i^{(k)}\Big) \cup \Big\{\mathfrak{A} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{m_1^{(k)}-1} (m_{i+1}^{(k)} + m_i^{(k)},\ p_{i+1}^{(k)}]\Big)\Big\} \cup \\ \cup \big(\mathfrak{A} \cap (m^{(k)}_{m_1^{(k)}+1} + m^{(k)}_{m_1^{(k)}};\ m_1^{(k+1)})\big) \qquad (k = 1, 2, \ldots)\end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathfrak{B}^{(k)}.$$

Es ist unschwer zu ersehen, daß die Anzahl der veränderten Elemente $O\left(\frac{n \log\log n}{\log n}\right)$ ist. Die Totalprimitivität der Folge $\mathfrak{B}$ kann mittels des — bei dem Beweis des ersten Satzes angewandten — Verfahrens bewiesen werden.

4. Ebenfalls mit der Methode des ersten Satzes kann der folgende Satz bewiesen werden:

Satz III. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige unendliche Folge. Durch Weglassung von $o(A(n))$ Elementen der Folge kann man stets erreichen, daß die übriggebliebene Folge totalprimitiv sei.*

Dagegen ist folgende Verallgemeinerung des zweiten Satzes nicht stichhaltig:

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige unendliche Folge und $\mathfrak{A}^*$ eine beliebige unendliche Teilfolge derselben. Man kann aus $\mathfrak{A}$ eine passende Teilfolge von $\mathfrak{A}^*$ so weglassen, daß die übriggebliebene Teilfolge von $\mathfrak{A}$ totalprimitiv sei. In der Tat, wählen wir für $\mathfrak{A}$ die Folge der natürlichen Zahlen, für $\mathfrak{A}^*$ die Folge der durch drei teilbaren Zahlen. Es ist leicht ersichtlich, daß wie auch immer aus $\mathfrak{A}$ eine Teilfolge von $\mathfrak{A}^*$ weggelassen wird, die übriggebliebene Teilfolge stets eine Zerlegung der Form $\{0, 1, 3, 6, 9, \ldots, 3k, \ldots\} + \mathfrak{B}$ aufweist (wo $\mathfrak{B}$ eine passend gewählte Folge ist).

Auch folgende Behauptung — die in gewissem Sinne die Umkehrung des ersten Satzes wäre — ist nicht stichhaltig: ist eine beliebige, unendliche Folge $\mathfrak{A}$ angegeben, man kann durch Veränderung von $o(A(n))$ Elementen der Folge stets erreichen, daß die veränderte Folge reduzibel sei. In der Tat, sei $\mathfrak{A} = \{1, 3, 3^2, \ldots, 3^k, \ldots\}$. Es ist offensichtlich, daß wie auch immer $o(A(n))$ Elemente dieser Folge verändert werden, die Folge totalprimitiv bleibt.

Schließlich möchte ich Herren Professoren P. Erdös und P. Turán für ihre wertvollen Bemerkungen bestens danken.

Literaturverzeichnis

[1] H. H. Ostmann, *Additive Zahlentheorie*, Springer Verlag, 1956, S. 1-21.
[2] B. Volkmann, *Über die Klasse der Summenmengen*, Arch. Math. 6 (1955), S. 200-207.

Reçu par la Rédaction le 7. 4. 1962