[12] E. Landau, *Ueber die Klassenzahl Imaginär. Quadratischer Zahlkörper*, Nachrichten, königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1918), pp. 285-295.
[13] D. H. Lehmer, *On imaginary quadratic fields whose class-number is unity*, Bull. Am. Math Soc. 39 (1933), p. 360.
[14] G. Pólya, *Ueber die Verteilung der Quadratischen Reste und Nichtreste*, Nachrichten, königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1918), pp. 21-29.
[15] J. B. Rosser, *Real roots of real Dirichlet series*, Part 2, Cornell Univ. (Mimeographed).
[16] — and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Math. J. 6 (1962), pp. 64-94.
[17] J. A. Selfridge, M. Atkins and C. MacDonald, Mathematics of Computation (to appear).
[18] J. D. Swift, *Note on discriminants...*, Bull. AMS 54 (1948), pp. 560-561.

THE UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA

Reçu par la Rédaction le 28. 11. 1962

ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

Über die Ausnahmenullstelle der Heckeschen L-Funktionen

von

E. Fogels (Riga)

Für die Dirichletschen L-Funktionen

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$$

(d — Diskriminante) bewies Siegel [8] im Jahre 1935 den berühmten Satz

$$\log L_d(1) = o(\log|d|) \qquad (|d|\to\infty) \tag{1}$$

und vermutete den Analogon

$$\log(hR) \sim \log\sqrt{|d|} \tag{2}$$

für jeden algebraischen Körper k festen Grades n ($n \geqslant 2$; h, R und d bezeichnen die Klassenzahl, den Regulator und die Diskriminante des Körpers). Walfisz [9] folgerte von (1), daß für jede Dirichletsche Funktion $L(s,\chi)$ mit den Charakter $\chi \bmod q$:

$$L(s,\chi) \neq 0 \quad \text{in} \quad s > c(\varepsilon) q^{-\varepsilon} \tag{3}$$

(ε beliebig klein >0). Die Vermutung (2) wurde von R. Brauer [1] im Jahre 1947 bewiesen. Den Analogon von (3) für Heckesche L-Funktionen findet man nirgends publiziert, obwohl es eine bedeutende Rolle in der analytischen Theorie der Ideale spielt. Es ist der Zweck dieses Artikels zu zeigen, daß dieses Analogon eine einfache Folge der (von R. Brauer bewiesenen) Residuenabschätzung

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_k(s) = |d|^{o(1)} \qquad (|d|\to\infty) \tag{4}$$

der Dedekindschen Zetafunktion des Körpers k ist.

Für die Heckesche L-Funktionen [5] mit Charakteren $\bmod \mathfrak{f}$ des Körpers k wird fortan die Landausche [7] Bezeichnung $\zeta(s,\chi)$ benutzt. Wir setzen $D = |d| N\mathfrak{f}$, wo $N\mathfrak{f}$ die Norm des Idealen bezeichnet. Es ist bekannt (siehe [2]) daß für passende $c_1 = c_1(n) > 0$ im Gebiete

$$\sigma > 1 - c_1/\log D(2+|t|)$$

der Ebene der komplexen Zahlen $s = \sigma + it$ stets $\zeta(s, \chi) \neq 0$ ist; ausgenommen ist eventuell eine zu einem reellen χ' zugehörige Funktion $\zeta(s, \chi')$, welche dort eine reelle Nullstelle erster Ordnung $\beta' = 1-\delta$ hat. β', χ' und $\zeta(s, \chi')$ werden die Ausnahmenullstelle, Ausnahmecharakter und Ausnahmefunktion genannt.

Es ist im allgemeinen (falls $n > 1$) nicht ausgeschlossen, daß χ' gleich dem Hauptcharakter χ_0 sein kann. In diesem Falle ist unter Benutzung (4) schon bewiesen (siehe [2], § 21 mit $N\mathfrak{f} = 1$), daß für jeden $\varepsilon > 0$

$$\delta > c_2(\varepsilon, n)|d|^{-\varepsilon}. \tag{5}$$

Es bleibt nur zu zeigen, daß eine ähnliche Abschätzung auch im Falle $\chi' \neq \chi_0$ statt findet.

Fortan bezeichne $\mathfrak{H}$ die Idealklassen mod $\mathfrak{f}$. Durch Komplexion (siehe [4], § 3) definieren wir die Idealgruppe

$$H = \sum_{\chi'(\mathfrak{H})=1} \mathfrak{H}$$

mit dem Index 2. Der zu dieser Gruppe H nach dem Satz von Takagi eindeutig bestimmte Klassenkörper K ist relativ-quadratisch über k. Sei Δ die Diskriminante und $\mathfrak{d}$ die Relativdiskriminante des Körpers K. Es ist bekannt (siehe [6], S. 206), daß

$$d^2 N\mathfrak{d} = |\Delta|. \tag{6}$$

Der Führer $\mathfrak{f}_{\chi'}$ der Gruppe H ist ein Teiler von $\mathfrak{f}$ und χ' ist zugleich ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}_{\chi'}$ (siehe [4], S. 7 und 33). Im vorliegendem Falle ist die Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_K(s)$ des Körpers K gleich dem Produkt zweier Heckeschen L-Reihen mit eigentlichen Charakteren:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s, \chi_0)\zeta(s, \chi') = \zeta_k(s)\zeta(s, \chi') \tag{7}$$

und die Relativdiskriminante gleich dem Produkte der Führer dieser Charakteren:

$$\mathfrak{d} = 1\cdot\mathfrak{f}_{\chi'};$$

somit

$$N\mathfrak{d} = N\mathfrak{f}_{\chi'} \leqslant N\mathfrak{f}$$

(siehe [4], S. 38 und Satz 14). Es ist nach (6)

$$|\Delta| \leqslant d^2 N\mathfrak{f} \leqslant D^2$$

Da nach (7) die Ausnahmenullstelle β' auch eine Nullstelle von $\zeta_K(s)$ ist, so gilt nach (5)

$$\delta > c_2(\varepsilon, 2n)|\Delta|^{-\varepsilon} > c_3(\varepsilon, n)D^{-2\varepsilon}.$$

Damit ist bewiesen der folgende

Satz. *Sei $\beta' = 1-\delta$ die Ausnahmenullstelle der Heckeschen L-Funktion $\zeta(s, \chi')$ mit dem Ausnahmecharakter χ' mod $\mathfrak{f}$ in dem algebraischen Körper k n-ten Grades und $D = |d|N\mathfrak{f}$, wo d die Diskriminante von k bezeichnet. Bei jedem $\varepsilon > 0$ und passendem, von D unabhängigen $c = c(\varepsilon, n) > 0$ gilt*

$$\delta > c(\varepsilon, n)D^{-\varepsilon}. \tag{8}$$

Es soll nun eine Anwendung des Satzes angeführt werden.

In [3] habe ich bewiesen, daß für passendes $c = c(n)$ und für jeden $x \geqslant 1$ in dem Intervall (x, xD^c) befindet sich eine Primzahl $p = N\mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal gegebener Klasse $\mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{f}$ bezeichnet. In dem Beweise statt (8) wurde nur eine schwächere Abschätzung

$$\delta > c_4 D^{-c_5} \quad (c_4 = c_4(n),\ c_5 = c_5(n))$$

benutzt. Wird nun (8) benutzt, so gibt dieselbe Beweismethode einen engeren Intervall

$$(x, xD^{\varepsilon}) \quad (0 < \varepsilon \leqslant c,\ D > D_0(\varepsilon),\ x \geqslant D^{c'\log(c/\varepsilon)})$$

in dem sich eine Primzahl p mit der gewünschten Eigenschaft befindet.

Literaturverzeichnis

[1] R. Brauer, *On the zetafunctions of algebraic number fields*, Amer. Journ. Math. 69 (1947), S. 243-250.

[2] E. Fogels, *On the zeros of Hecke's L-functions I*, Acta Arithm. 7 (1962), S. 87-106.

[3] — *On the distribution of prime ideals*, ibid. S. 255-269.

[4] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. 35 (1926), S. 1-55.

[5] E. Hecke, *Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper*, Göttinger Nachrichten, Math. ph. Klasse 1917, S. 299-318.

[6] D. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. 4 (1897), S. 175-546.

[7] E. Landau, *Über Ideale und Primideale in Idealklassen*, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 52-154.

[8] C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Körper*, Acta Arithm. 1 (1935), S. 83-86.

[9] A. Walfisz, *Zur additiven Zahlentheorie II*, Mathem. Zeitschr. 40 (1936), S. 592-607.

Reçu par la Rédaction le 19. 12. 1962