ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

Sul teorema di Tschebotarev *

di

E. Bombieri (a Milano)

Sunto: Combinando una idea di A. C. Woods con un nostro teorema generale della geometria dei numeri, si assegna una maggiorazione per il minimo del prodotto di n forme lineari non omogenee, che migliora i risultati di H. Davenport e L. J. Mordell.

Summary: An improvement of the known Davenport's and Mordell's results on the minimum of the product of n inhomogeneous linear forms is given.

1. Introduzione al problema. Sia $F(\boldsymbol{x})$ la funzione distanza

(1) $$F(\boldsymbol{x}) = |x_1 \ldots x_n|^{1/n}$$

e sia Λ un reticolo n-dimensionale, $d(\Lambda) = \det \Lambda \neq 0$. Poniamo allora

(2) $$\mu(\Lambda) = \sup_{\boldsymbol{x}_0} \inf_{\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_0(\Lambda)} F(\boldsymbol{x})$$

(3) $$\mathfrak{D}_1 = \sup_{\Lambda} \big(\mu(\Lambda)\big)^n / d(\Lambda) .$$

Una nota congettura di Minkowski afferma:

(4) $$\mathfrak{D}_1 = 2^{-n} .$$

La congettura (4) è stata dimostrata soltanto per $n \leqslant 4$. Numerose dimostrazioni sono state date per $n = 2$; per $n = 3$ si hanno una dimostrazione di R. Remak [8] semplificata da H. Davenport [3], e una di B. J. Birch e H. P. F. Swinnerton-Dyer [1]. Per $n = 4$ F. J. Dyson [5]. Quando $n > 4$, si conoscono solamente maggiorazioni per $\mathfrak{D}_1$.

N. Tschebotarev [9] per primo si è avvicinato alla congettura in questione dimostrando che

(5) $$\mathfrak{D}_1 \leqslant 2^{-n/2} .$$

Successivi miglioramenti sono stati dati da L. J. Mordell [6] e da H. Davenport [4], il quale ha dimostrato:

(6) $$\mathfrak{D}_1 \leqslant \gamma_n 2^{-n/2}, \quad \text{con} \quad \gamma_n \to (2e-1)^{-1} \quad \text{per} \quad n \to \infty .$$

* Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N° 40 del Comitato per la Matematica del C. N. R. (1961-62).

Recentemente A. C. Woods [10] ha fatto osservare che la disuguaglianza

(7) $$\mathfrak{D}_1 \leqslant 2^{-n/2-1}\big(1+o(1)\big)$$

si poteva ottenere combinando l'idea di Tschebotarev con il principio di Blichfeldt. L. J. Mordell [7] ha così semplicemente dimostrato che

(8) $$\mathfrak{D}_1 \leqslant 2^{-n/2-2}\big(1+o(1)\big)\,.$$

Il suo risultato, per n moderato, è più preciso della (6) dovuta a Davenport, ma le è definitivamente inferiore per n grande. Vogliamo dimostrare, combinando l'idea di Woods con un nostro teorema generale, la seguente maggiorazione:

Teorema. *Per $n \geqslant n_0$ si ha*

(9) $$\mathfrak{D}_1 \leqslant \gamma_n 2^{-n/2}\,, \quad \textit{con} \quad \gamma_n \leqslant (3+\lambda)^{-1}(2e-1)^{-1} \quad \textit{e} \quad \lambda \geqslant 10^{-4}\,.$$

E'utile fare qualche osservazione a proposito di questo risultato. Infatti, usando soltanto il teorema di Blichfeldt-Woods al posto del nostro teorema generale, si otterrebbe la (9) con $\gamma_n \to 2^{-1}(2e-1)^{-1}$ per $n\to\infty$, ma non di più.

Inoltre, è chiaro che il valore preciso di λ nella (9) non ha alcuna importanza; è tuttavia interessante osservare che il nostro metodo porta a un $\lambda > 0$. Infine, poichè la (9) si ottiene combinando il nostro teorema generale con i risultati di Davenport [4], un miglioramento di questi ultimi dovrebbe portare a un corrispondente miglioramento nella (9).

2. Il teorema di Tschebotarev. N. Tschebotarev [9], con un suo metodo di „riduzione non omogenea" ha dimostrato il seguente risultato:

Teorema A. *Sia Λ un reticolo tale che*

$$\prod |y_i - 1| \geqslant 1-\eta \quad \textit{per ogni} \quad y \in \Lambda\,.$$

Poniamo $\mu_1(\eta) = \operatorname*{Inf}_{\Lambda} d(\Lambda)$. Allora si ha $\mathfrak{D}_1 \leqslant \mu_1^{-1}(\eta)$, per ogni $\eta > 0$ arbitrario.

Per dimostrare dunque il nostro teorema, è sufficiente mostrare che

$$\mu_1(\eta) \geqslant (3+\lambda)(2e-1)2^{n/2} \quad \text{per} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{e} \quad \eta \to 0\,.$$

Poniamo ora:

(10) $$\vartheta = [1+(1-\eta)^2]^{1/2}\,;$$

se R è una regione nello spazio n-dimensionale E^n

$$V(R) = \text{volume di } R\,;$$

(11) $R(\boldsymbol{z})$ indica la regione R traslata secondo il vettore $\boldsymbol{z}$;

$R_\sigma(\boldsymbol{o})$ è la regione (considerata da H. Davenport)

(12) $$\begin{cases} |z_i| < (1+\sigma)\vartheta/2\,, & i \leqslant n\,,\\ |z_{i_1}+\ldots+z_{i_{m-1}}-z_{i_m}| < m\vartheta/2\,, & 2\leqslant m \leqslant n \end{cases}$$

dove le disuguaglianze sono estese a tutte le disposizioni di differenti i_r.

$2R_\sigma(\boldsymbol{o})$ indica la medesima regione, ma in cui il secondo membro della (12) è due volte più grande; $S_\sigma(\boldsymbol{o})$ è la regione

(13) $$|z_i| < (1+\sigma)\vartheta/2\,, \quad i \leqslant n\,.$$

3. Lemmi preliminari. In questa sezione, Λ indica un reticolo che soddisfa alle condizioni del teorema A.

Lemma 1 (H. Davenport [4]). *Esiste $c > 0$ indipendente da n tale che, per $0 \leqslant \sigma \leqslant c$ la regione $2R_\sigma(\boldsymbol{o})$ non contiene punti di Λ oltre $\boldsymbol{o}$. Inoltre $R_\sigma(\boldsymbol{o})$ è simmetrica e convessa, e per $n \geqslant n_1(\delta)$ e $\sigma = (\log n)/n$ si ha:*

(14) $$V\big(R_\sigma(\boldsymbol{o})\big) \geqslant (2e-1-\delta)\vartheta^n\,.$$

Dimostrazione. La prima parte del lemma è dimostrata in Davenport [4]; soltanto la parte riguardante il volume della regione richiede una giustificazione.

Si ha in Davenport [4]:

$$V\big(R_\sigma(\boldsymbol{o})\big) \geqslant \vartheta^n + 2\sum_{r=1}^{n-1} V_r/r!\,,$$

dove

$$V_r = \vartheta^n\Big\{1 - r(1-\sigma/2r)^n + \binom{r}{2}(1-2\sigma/2r)^n - \ldots\Big\} \geqslant 0\,.$$

Osserviamo ora che:

$$\binom{r}{m+1}\big(1-(m+1)\sigma/2r\big)^n\Big/\Big\{\binom{r}{m}(1-m\sigma/2r)^n\Big\} = (r-m)/(m+1)\cdot\big(1-\sigma/(2r-m\sigma)\big)^n$$
$$\leqslant r(1-\sigma/2r)^n \leqslant re^{-n\sigma/2r} < 1 \quad \text{quando} \quad \sigma > 2r(\log r)/n\,.$$

Dunque se $\sigma \geqslant 2N(\log N)/n$ avremo per $r \leqslant N$:

$$V_r \geqslant \vartheta^n\{1 - r(1-\sigma/2r)^n\} > \vartheta^n(1-re^{-n\sigma/2r}) \geqslant \vartheta^n(1-Ne^{-n\sigma/2N})\,.$$

Poichè d'altra parte $V_r \geqslant 0$ per ogni r, avremo

$$V\big(R_\sigma(\boldsymbol{o})\big) \geqslant \vartheta^n + 2\vartheta^n\Big(\sum_{r=1}^{N} 1/r! - \sum_{r=1}^{N} Ne^{-n\sigma/2N}/r!\Big)\,.$$

Posto infine $N = (\log n)^{1/2}$, $\sigma = (\log n)/n$, $n \geqslant n_1(\delta)$, la condizione $\sigma > 2N(\log N)/n$ risulta soddisfatta, e si ha

$$V\big(R_\sigma(\boldsymbol{o})\big) \geqslant (2e-1-\delta)\vartheta^n\,.$$

LEMMA 2. *Sia $\boldsymbol{x}_0$ un punto nello spazio n-dimensionale E^n, e siano $m_1, \ldots, m_4$ 4 numeri interi non negativi tali che $m_1+\ldots+m_4=n$. Allora la regione $2R_\sigma(\boldsymbol{o})$, $\sigma<c$, contiene al massimo $n!/(m_1!\ldots m_4!)$ punti $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ tali che:*

$$\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}_0(\Lambda)\,, \tag{15}$$

e

$$\begin{cases} m_1 \quad \textit{degli} \quad x_i \quad \textit{sono} \quad 0\leqslant x_i<\vartheta\,, \\ m_2 \quad \textit{degli} \quad x_i \quad \textit{sono} \quad \vartheta\leqslant x_i<(1+\sigma)\vartheta\,, \\ m_3 \quad \textit{degli} \quad x_i \quad \textit{sono} \quad -(1+\sigma)\vartheta<x_i\leqslant-\vartheta\,, \\ m_4 \quad \textit{degli} \quad x_i \quad \textit{sono} \quad -\vartheta<x_i<0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Dimostrazione. Fissiamo per il momento una qualunque scelta S degli indici degli x_i, e supponiamo che il punto $\boldsymbol{x}$ soddisfi alla (15), e alla (16) secondo questa scelta S. Supponiamo ora che esistano in $2R_\sigma(\boldsymbol{o})$ due punti $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ che soddisfino alla (15), e alla (16) sempre secondo la scelta S fissata degli indici degli x_i. Il punto $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\in\Lambda$ a causa della (15); d'altra parte $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\in 2R_\sigma(\boldsymbol{o})$. Risulta infatti evidente dalla (16) e dalle ipotesi fatte sulla disposizione degli indici per la quale la (16) è soddisfatta, che:

$$|x_{1i}-x_{2i}|<\vartheta, \quad \text{e dunque è chiaro che} \quad \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\in 2R_\sigma(\boldsymbol{o})\,.$$

Poichè $\sigma<c$, a causa del lemma 1 sarà $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$.

Dunque ad ogni disposizione degli indici i per la quale la (16) è soddisfatta, corrisponde al più un solo punto $\boldsymbol{x}$ che soddisfa alle condizioni del lemma. Poichè vi sono ora esattamente $n!/(m_1!\ldots m_4!)$ disposizioni, il lemma è dimostrato.

LEMMA 3. *Siano m_1 e m_2 due numeri interi non negativi tali che $m_1+m_2=n$, e sia per un ϱ fissato, $0\leqslant\varrho\leqslant1/e$:*

$$|(x_1-\varrho)\ldots(x_n-\varrho)|\geqslant1\,, \tag{17}$$

e inoltre

$$\begin{cases} m_1 \quad \textit{degli} \quad x_i \quad \textit{siano} \geqslant 0\,, \\ m_2 \quad \textit{degli} \quad x_i \quad \textit{siano} <0\,. \end{cases} \tag{18}$$

Allora vale la disuguaglianza

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\geqslant(1-1/e)\,n+m_1/e\,. \tag{19}$$

Dimostrazione. Si può supporre senza mancare di generalità che $x_i\geqslant0$ per $i\leqslant m_1$, e che $\varrho>0$. Supponiamo ancora che $x_1, \ldots, x_{m'}>\varrho$, e che $x_{m'+1}, \ldots, x_{m_1}\leqslant\varrho$. Avremo

$$|(x_1-\varrho)\ldots(x_{m'}-\varrho)(x_{m_1+1}-\varrho)\ldots(x_n-\varrho)| \\ \geqslant 1/\big\{|(x_{m'+1}-\varrho)\ldots(x_{m_1}-\varrho)|\big\}\geqslant(1/\varrho)^{m_1-m'}\,.$$

Per la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica avremo:

$$|(x_1-\varrho)|+\ldots+|(x_{m'}-\varrho)|+|(x_{m_1+1}-\varrho)|+\ldots+|(x_n-\varrho)| \\ \geqslant(n-m_1+m')\,(1/\varrho)^{(m_1-m')/(n-m_1+m')}\,,$$

e di qui si ha con facilità, tenendo conto della (18):

$$|x_1|+\ldots+|x_{m'}|+|x_{m_1+1}|+\ldots+|x_n| \\ \geqslant(m_1+m'-n)\,\varrho+(n-m_1+m')\,(1/\varrho)^{(m_1-m')/(n-m_1+m')}\,. \tag{20}$$

Posto infine $m'=\alpha n$, $m_1=\beta n$, il secondo membro della (20), dopo aver diviso per n, diventa:

$$\varrho(\alpha+\beta-1)+(1+\alpha-\beta)\,(1/\varrho)^{(\beta-\alpha)/(1+\alpha-\beta)}\,.$$

La funzione di ϱ

$$\varrho(\beta-1)+(1+\alpha-\beta)\,(1/\varrho)^{(\beta-\alpha)/(1+\alpha-\beta)}$$

è decrescente. Posto $\varrho=1/e$, avremo

$$(\beta-1)/e+(1+\alpha-\beta)\,e^{(\beta-\alpha)/(1+\alpha-\beta)} \\ \geqslant(\beta-1)/e+(1+\alpha-\beta)\,\{1+(\beta-\alpha)/(1+\alpha-\beta)\}=(1-1/e)+\beta/e\,,$$

e di qui si ha immediatamente il lemma 3.

LEMMA 4. *$\big(\sqrt{2}-(1-1/e)-\beta/e\big)\,(1/\beta)^\beta[1/(1-\beta)]^{1-\beta}<\sqrt{2}-\eta_0$ per $0\leqslant\beta\leqslant1$, con $\eta_0>0$. (Si ha $\eta_0>10^{-3}$.)*

Terminiamo con la seguente osservazione: se nel lemma 3 si considera l'intervallo $-1/e\leqslant\varrho\leqslant0$, la (19) resta valida con m_2 al posto di m_1.

4. Lemma principale.

LEMMA 5. *$\sum_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}V\big(R_\sigma(\boldsymbol{t})\cap R_\sigma(\boldsymbol{x})\big)\leqslant\big(\sqrt{2}-\eta_1\big)^n$, per $n\geqslant n_2$, $\sigma=(\log n)/n$, $\eta_1>0$ (si ha $\eta_1>10^{-3}$), dove $\boldsymbol{t}$ è il punto $(t, t, \ldots, t)$, per $1-(1-\eta)^{1/n}/e\leqslant t\leqslant1+(1-\eta)^{1/n}/e$.*

Osservazione. E' su un lemma analogo, per $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{1}$, che si basa la semplice ed elegante dimostrazione di Woods [10]; è stato necessario, per raggiungerlo, l'apparato dei lemmi 1, 2, 3, 4.

Dimostrazione. Poichè $R_\sigma(\boldsymbol{o})\subset S_\sigma(\boldsymbol{o})$, avremo

$$V\big(R_\sigma(\boldsymbol{t})\cap R_\sigma(\boldsymbol{x})\big)\leqslant V\big(S_\sigma(\boldsymbol{t})\cap S_\sigma(\boldsymbol{x})\big)=V\big(S_\sigma(\boldsymbol{o})\cap S_\sigma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\big) \\ =\begin{cases}\prod\limits_{i\leqslant n}[(1+\sigma)\vartheta-|x_i-t|] & \text{se} \quad |x_i-t|<(1+\sigma)\vartheta,\ i\leqslant n\,, \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Poniamo $\varrho=1-t$, e $z_i=x_i-t$.

Da quanto precede, nell'effettuare la $\sum_{x\in\Lambda}$, possiamo supporre che il punto x sia tale che $|z_i| < (1+\sigma)\vartheta$ per $i \leqslant n$. Il punto $z = (z_1, \dots, z_n)$ sia tale che:

$$\begin{cases} m_1 & \text{degli} & z_i & \text{sono} & 0 \leqslant z_i < \vartheta\,, \\ m_2 & \text{degli} & z_i & \text{sono} & \vartheta \leqslant z_i < (1+\sigma)\vartheta\,, \\ m_3 & \text{degli} & z_i & \text{sono} & -(1+\sigma)\vartheta < z_i \leqslant \vartheta\,, \\ m_4 & \text{degli} & z_i & \text{sono} & -\vartheta < z_i < 0\,. \end{cases}$$

Osserviamo che se y è un punto tale che

(21) $$V\big(R_\sigma(o) \cap R_\sigma(y)\big) > 0\,, \quad \text{sarà anche} \quad y \in 2R_\sigma(o)$$

a causa della simmetria e convessità di $R_\sigma(o)$.

D'altra parte

(22) $$V\big(R_\sigma(o) \cap R_\sigma(z)\big) \leqslant \prod_{i\leqslant n} [(1+\sigma)\vartheta - |z_i|]\,.$$

Si ha:

(23) $$\prod_{i\leqslant n} [(1+\sigma)\vartheta - |z_i|] \leqslant (1+\sigma)^{m_1+m_4}\sigma^{m_2+m_3}\vartheta^n\,.$$

Si ha anche: $\prod_{i\leqslant n} |(z_i - 1 + t)| = \prod_{i\leqslant n} |x_i - 1| \geqslant 1-\eta$ poichè $x \in \Lambda$, da cui $\prod_{i\leqslant n} |z_i - \varrho| \geqslant 1-\eta$. Sia $\varrho \geqslant 0$.

Ne segue $\prod_{i\leqslant n} |(1-\eta)^{-1/n} z_i - (1-\eta)^{-1/n}\varrho| \geqslant 1$, e applicando il lemma 3 avremo

(24) $$\begin{aligned} |z_1| + \dots + |z_n| &\geqslant (1-\eta)^{1/n}(1-1/e)\,n + (1-\eta)^{1/n}(m_1+m_2)/e \\ &\geqslant (1-\eta)^{1/n}(1-1/e)\,n + (1-\eta)^{1/n} m_1/e\,, \quad \text{se} \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant (1-\eta)^{1/n}/e\,. \end{aligned}$$

Ma ora, per la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica, ricordando la (24) si ha:

(25) $$\begin{aligned} \prod [(1+\sigma)\vartheta - |z_i|] &\leqslant [(1+\sigma)\vartheta - (|z_1| + \dots + |z_n|)/n]^n \\ &\leqslant [(1+\sigma)\vartheta - (1-1/e)(1-\eta)^{1/n} - (1-\eta)^{1/n} m_1/(ne)]^n\,. \end{aligned}$$

Ricordando il lemma 2 (applicabile per la (20)), la (22), la (23) e la (25), si ha, posto per semplicità di scrittura $(1-\eta)^{1/n} = a$:

(26) $$\begin{aligned} &\sum_{x\in\Lambda} V\big(R_\sigma(t) \cap R_\sigma(x)\big) \\ &\leqslant \sum_{m_1+\dots+m_4=n} n!/(m_1!\dots m_4!)\,\min\big\{[(1+\sigma)\vartheta - a(1-1/e) - am_1/(ne)]^n; \\ &\qquad\qquad (1+\sigma)^{m_1+m_4}\sigma^{m_2+m_3}\vartheta^n\big\}\,. \end{aligned}$$

Spezziamo ora il secondo membro della (26) in due parti, a seconda che $m_2 + m_3 > 2n/(\log n)^{1/2}$ oppure che $m_2 + m_3 < 2n/(\log n)^{1/2}$. Assumendo $\sigma = (\log n)/n$, il contributo alla somma per $m_2 + m_3 > 2n/(\log n)^{1/2}$ è $\leqslant \sigma^{2n/(\log n)^{1/2}}(1+\sigma)^n\vartheta^n 4^n \leqslant (8\vartheta)^n e^{-n(\log n)^{1/2}} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Quando sia $m_2 + m_3 \leqslant 2n/(\log n)^{1/2}$, una facile applicazione della formula di Stirling ci dà:

$$n!/(m_1!\dots m_4!) \leqslant (1+\delta_1)^n \binom{n}{m_1} < (1+\delta_2)^n (n/m_1)^{m_1}\big(n/(n-m_1)\big)^{n-m_1}\,,$$

con $\delta_2 > 0$ fissato arbitrario e $n \geqslant n_2(\delta_2)$.

Posto $m_1 = \beta n$, e assumendo $\eta \leqslant 1/n$, avremo

$$(1+\sigma)\vartheta - a(1-1/e) - am_1/(ne) \leqslant \sqrt{2} - (1-1/e) - \beta/e + c_2(\log n)/n\,,$$

e inoltre

$$(n/m_1)^{m_1}\big(n/(n-m_1)\big)^{n-m_1} = \big[(1/\beta)^\beta\big(1/(1-\beta)\big)^{1-\beta}\big]^n\,.$$

Ricordando il lemma 4, se $n \geqslant n_3(\delta_2)$ avremo:

$$\sum_{m_2+m_3<2n/(\log n)^{1/2}} \leqslant (1+\delta_2)^n(\sqrt{2}-\eta_2)^n \sum_{m_1+\dots+m_4=n} 1 < (\sqrt{2}-\eta_1)^n\,,$$

per δ_2 sufficientemente piccolo.

Avendo maggiorato separatamente i due contributi alla somma, si ha il lemma principale. Infatti, quando $\varrho < 0$, la trattazione è identica: basterà scambiare m_1 con m_4, e ricordare l'osservazione alla fine della sezione 3.

5. Il teorema generale ausiliario e la dimostrazione del nostro risultato. Si ha il seguente teorema generale nella geometria dei numeri:

Teorema B (E. Bombieri [2]). *Sia $R(o)$ una regione a n dimensioni, M un reticolo n-dimensionale. Poniamo $V_R(z) = \sum_{x\in M} V\big(R(z) \cap R(x)\big)$, e sia $\sum_{h=0}^{N} a_h \cos hx$ un polinomio trigonometrico tale che $a_0 + a_1\cos x + \dots + a_N \cos Nx \geqslant 0$ per ogni x reale, con $a_h \geqslant 0$. Allora per ogni punto z vale la disuguaglianza*:

$$d(M)\sum_{h=0}^{N} a_h V_R(hz) \geqslant (a_0 + a_1 + \dots + a_N)V^2(R)\,.$$

Dimostrazione del teorema. Osserviamo che per nessuna traslazione $R_\sigma(o)$, $\sigma < c$, contiene due punti di Λ. Se infatti $R_\sigma(z)$ contenesse due punti distinti x_1 e x_2 di Λ, sarebbe $x_1 - x_2 \in 2R_\sigma(o)$, assurdo per il lemma 1. Avremo perciò:

(27) $$V_{R_\sigma}(o) = \sum_{x\in\Lambda} V\big(R_\sigma(o) \cap R_\sigma(x)\big) = V(R_\sigma)\,.$$

Si ha $(1 + 2\cos x)^2 = 3 + 4\cos x + 2\cos 2x \geqslant 0$.

Poniamo nel teorema B $N=2$, $a_0=3$, $a_1=4$, $a_2=2$, $\boldsymbol{z}=(\frac{2}{3},\ldots,\frac{2}{3})$. Poichè $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ sono compresi nell'intervallo $1-1/e \leqslant t \leqslant 1+1/e$, siamo in grado di applicare il lemma principale.

Per il lemma 1 saràinoltre $V(R_\sigma) \geqslant (2e-1-\delta)\vartheta^n$. Osservando che $\vartheta=[1+(1-\eta)^2]^{1/2}\to\sqrt{2}$ per $\eta\to 0$, avremo, applicando il teorema B, il lemma principale e la (27):

$$d(\Lambda) \geqslant 9(2e-1-\delta)^2\vartheta^{2n}/\left[3(2e-1-\delta)\vartheta^n+6\left(\sqrt{2}-\eta_1\right)^n\right] \sim 3(2e-1-\delta)2^{n/2} \quad \text{per } \eta\to 0 \text{ e } n\to\infty. \tag{28}$$

Si può aumentare leggermente il secondo membro della (28) con una scelta più opportuna del polinomio trigonometrico.

Osserviamo infatti che:

$$\min_x\{(1+2\cos 27x)^2+(1+2\cos 28x)^2\} > 10^{-3}.$$

Ne viene

$$(6-10^{-3})+4\cos 27x+4\cos 28x+2\cos 54x+2\cos 56x > 0 \quad \text{per } x \text{ reale.}$$

Se $t=1/42$, i numeri $27t$, $28t$, $54t$, $56t$ sono tutti compresi nell'intervallo $(1-1/e)$, $(1+1/e)$.

Siamo così in grado di applicare il lemma principale, il teorema B e il lemma 1. In modo identico al precedente si ottiene per $\eta\to 0$, $n\to\infty$

$$d(\Lambda) \geqslant (18-10^{-3})/(6-10^{-3})(2e-1-\delta)2^{n/2}, \tag{29}$$

da cui

$$d(\Lambda) \geqslant (3+10^{-4})(2e-1)2^{n/2} \quad \text{se} \quad n \geqslant n_0. \tag{30}$$

Ricordando il teorema A, il nostro teorema è dimostrato.

Bibliografia

[1] B. J. Birch e H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On the inhomogeneous minimum of the product of n linear forms*, Mathematika 3 (1956), pp. 25-39.

[2] E. Bombieri, *Sulla dimostrazione di C. L. Siegel del teorema fondamentale di Minkowski nella Geometria dei numeri* (in corso di pubblicazione).

[3] H. Davenport, *A simple proof of Remak's Theorem on the product of 3 linear forms*, J. London Math. Soc. 14 (1939), pp. 47-51.

[4] — *On a theorem of Tschebotareff*, J. London Math. Soc. 21 (1946), pp. 28-34. Corrigendum, 24 (1949), p. 316.

[5] F. J. Dyson, *On the product of four non-homogeneous linear forms*, Ann. of Math. (2) 49 (1948), pp. 82-109.

[6] L. J. Mordell, *Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms*, Vjschr. naturforsch. Ges. Zurich 85 (1940), Beiblatt (Festschrift Rudolf Fueter), pp. 47-50.

[7] L. J. Mordell, *Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms II*, J. London Math. Soc. 35 (1960), pp. 91-97.

[8] R. Remak, *Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes*, (I e II), Math. Zeit. 17, pp. 1-34; 18, pp. 173-200 (1924).

[9] N. Tschebotarev, *Beweis der Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen*, Ucen. Zapiski Kazansk. Gos. Univ. 94 (1934), pp. 3-16.

[10] A. C. Woods, *On a theorem of Tschebotarev*, Duke Math. Jour. 25 (1958), pp. 631-638.

Reçu par la Rédaction le 7. 8. 1962